# Perioden, Elementarteiler, Transzendenz

## – Kurt Hensels Weg zu den $p$-adischen Zahlen –

Vom Fachbereich Mathematik
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)
genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Math. Birgit Petri
aus Leipzig

Darmstadt 2011
D 17

Umschlag gestaltet unter Verwendung eines Fotos von Thomas Sütterle, ts-fotoart.de.

# Vorwort

Im Fokus der vorliegenden Arbeit stehen die $p$-adischen Zahlen, wie sie Kurt Hensel 1904 einführte. Er definierte sie im Zuge der Umsetzung einer Idee, der er seit etwa 1893 nachging: der Nutzung von Potenzreihenentwicklungen in der Zahlentheorie.

Hensels Arbeiten werden in ihrer zeitlichen Abfolge betrachtet und innere Zusammenhänge aufgedeckt, so daß verfolgt werden kann, welche Ideen für Hensel spezifisch sind und wie sie sich entwickelten. Es gibt vielfältige Wechselwirkungen zwischen Hensels Arbeiten und seinem Umfeld, insbesondere zu wissenschaftlichen Veröffentlichungen anderer Mathematiker, methodischen Standpunkten und professionellen Handlungsoptionen. Dieses Umfeld wird in der vorliegenden Arbeit ausschließlich in Hinblick auf die $p$-adischen Zahlen untersucht.

Das Herzstück der Arbeit bilden die technischen Kapitel 2-5. Weniger technisch sind demgegenüber die Einleitung und die Kapitel 1 und 7.

Mein herzlichster Dank geht zunächst an meinen Betreuer Norbert Schappacher, der mich vielfältig anregte, unterstützte und begleitete, und dabei immer an die vorliegende Arbeit geglaubt hat.

Daneben geht mein Dank an Regina Bruder und die Mitglieder der AG Fachdidaktik Mathematik, die mir eine neue Heimat an der TUD boten, nachdem Norbert Schappacher Darmstadt verlassen hatte.

Besonderen Dank schulde ich Moritz Epple und den Mitgliedern der AG Wissenschaftsgeschichte in Frankfurt, die mich quasi als auswärtiges Mitglied aufnahmen.

Für Anregungen, Unterstützung und Kritik danke ich meinen ehemaligen Kolleginnen Astrid Schwarz, Franziska Siebel und Nicole Roth-Sonnen.

Am wichtigsten bei der Abfassung dieser Arbeit war die rückhaltlose Unterstützung durch meine Familie. Dafür herzlichen Dank an Klaus, Beate, Ernst, Gerti und Männe.

Tilman Heisterhagen war ein unermüdlicher Testleser, weitere Korrekturvorschläge verdanke ich Jochen Wege. Ihnen beiden und Ulrich Voigt sei an dieser Stelle aber vor allem für den dauerhaften Zuspruch gedankt, der die Fertigstellung außerhalb eines akademischen Kontextes sehr erleichterte.

Ein besonders herzliches Dankeschön geht an Hans Niels Jahnke, der mir die sehr umfangreichen Zwischenergebnisse seines DFG-Projekts zu Kurt Hensel zur Verfügung stellte. Vielen Dank auch an Harold M. Edwards, der seine vor mehr als 30 Jahren erstellte Kopie von Hensels mathematischem Tagebuch mit mir teilte.

Schließlich gilt mein Dank den folgenden Bibliotheken und ihren Mitarbeiterinnen, die den Abdruck verschiedener Dokumente gestatteten bzw. meine Arbeit in den Handschriftenabteilungen und Archiven unterstützten: SUB Göttingen, Bibliothek der ETH Zürich, Archiv der HU Berlin.

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

> Man kann nicht sagen: Alle diese Resultate hatte ich schon, ich finde jetzt nur noch einen besseren Weg, der zu allem hinführt. Sondern dieser Weg ist ein neuer Ort, den man bisher noch nicht hatte.
>
> Ludwig Wittgenstein (PB §155)

Kurt Hensel stellte die $p$-adischen Zahlen im Jahre 1904 im Crelle-Journal als *Neue Grundlagen der Arithmetik* vor. Damit positionierte er sich in den damals hochaktuellen Debatten darüber, welche Vorgehensweisen in der Mathematik überhaupt zulässig sind und welche Begrifflichkeiten zur Theorie der algebraischen Zahlen passen.
1905 behauptete Hensel eine enorme Tragweite der $p$-adischen Methoden, indem er in einem Vortrag eine Reihe von Transzendenzbeweisen skizzierte. Nachdem sich sein Beweisansatz als fehlerhaft erwies, betrachteten viele Mathematiker die $p$-adischen Zahlen als unfruchtbaren Seitenweg.

Der philosophische Schriftsteller Hugo Dingler sah sie jedoch 1915 als eine wichtige Inspiration für sein Buch *Das Prinzip der logischen Unabhängigkeit in der Mathematik* an:

> Der Verfasser widmet dieses Buch dem Begründer der modernen Axiomatik *David Hilbert* und dem Schöpfer einer neuen Arithmetik *Kurt Hensel* als ein kleines Zeichen seiner Dankbarkeit für die Anregung und Förderung, die ihm durch das Studium ihrer Schriften zuteil geworden ist.

Nach dem ersten Weltkrieg konnte Hensels Schüler Helmut Hasse überzeugend den Wert der $p$-adischen Zahlen nachweisen, indem er mit ihrer Hilfe Lokal-Global-Prinzipien in der Zahlentheorie bewies. Oskar Perron bezeichnete die Schöpfung der $p$-adischen Zahlen in seinem Nachruf auf Hensel als eine "glänzende und höchst originelle Leistung".

Heute werden die $p$-adischen Zahlen in der algebraischen Zahlentheorie und der arithmetischen algebraischen Geometrie benutzt. Daneben gibt es die ultrametrische Analysis, deren Grundbegriffe erst durch die $p$-adischen Zahlen motiviert wurden. Die Anwendungmöglichkeiten für $p$-adische Zahlen gehen jedoch weit über die Mathematik hinaus. Betrachtet man die erste Ausgabe der seit März 2009 im Springer-Verlag erscheinenden Zeitschrift *P-Adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Applications*, so führen die Beiträge von der Quantentheorie über die Graphentheorie zur Bildanalyse, von neuronalen Netzwerken und Bioinformatik über chaotische Systeme bis hin zur Genomik.
Thema dieser Arbeit ist die *Entstehung* der $p$-adischen Zahlen. Es geht um die Entscheidungen, die zu ihnen führten, die mathematischen Fragestellungen und Objekte, die sie ermöglichten, und die Eigenschaften, die sie zum Zeitpunkt ihrer Entstehung verkörperten.

Dabei sind die $p$-adischen Zahlen ein "modernes mathematisches Objekt" im Sinne von Herbert Mehrtens, das in seiner Einfachheit aus einer komplizierten mathematischen Situation hervorging. Ihr Schöpfer Hensel ist hingegen fest in Mehrtens' Gegenmoderne verankert. Trotzdem zeigte seine entscheidende Veröffentlichung auch modernistische Züge. Das hier skizzierte Spannungsfeld wird in Kapitel 7 genauer untersucht.

Bereits seit der Arbeit an seiner Dissertation hatte Hensel einen ganz spezifischen Blick auf die arithmetische Theorie der algebraischen Zahlen. In den 1890er Jahren behandelte er sie (wie zuvor sein Lehrer Leopold Kronecker) parallel zur Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen.
Ab etwa 1893 versuchte er, zu den dort auftretenden Potenzreihen eine zahlentheoretische Entsprechung zu konstruieren. Dahinter stand die Idee einer diskreten Riemannschen Fläche, auf der analoge Strukturen zu denen auf einer gewöhnlichen Riemannschen Fläche identifiziert werden sollten.
Erst 1897 stellte Hensel die von ihm gefundenen Potenzreihen, in deren Verwendung er einen Bruch mit Kroneckers Methodik sah, auch öffentlich vor.

Die einzelnen Schritte von diesen Potenzreihen bis zu den $p$-adischen Zahlen seien anhand der zu Hensels Zeit gebräuchlichen Gebäudemetapher für mathematische Theorien illustriert:
Die neuen Potenzreihen waren ein neuer Typ von Ziegelsteinen, den Hensel in das etablierte Haus der Zahlentheorie mitbrachte. Dort baute er mit ihnen zunächst ein Modell für ein neues Gebäude, d.h. er stellte die erhofften Ergebnisse einer geplanten Theorie vor.
Anschließend baute er mit ihrer Hilfe an das alte Gebäude an, d.h. seine Theorie beinhaltete Potenzreihen, benutzte aber Teile der alten Theorie.
Hensel arbeitete hart an seinem Ziel, anhand des Modells ein neues, freistehendes Gebäude zu errichten, also mit Hilfe der Potenzreihen eine selbständige arithmetische Theorie der algebraischen Zahlen aufzubauen, konnte es jedoch nicht vollständig erreichen. Das Fundament dieses Vorhabens bildeten die als unabhängige mathematische Objekte eingeführten $p$-adischen Zahlen.

Diese Einführung der $p$-adischen Zahlen illustrierte implizit die definitorische Freiheit und Macht der begrifflichen Mathematik: Die neu eingeführten Objekte sind unendliche Reihen einer präzisen Form und werden *Zahlen* genannt. Einige davon, nämlich die abbrechenden Reihen, entsprechen unmittelbar natürlichen Zahlen. Mit Hilfe einer neuen Gleichheitsdefinition kann man bestimmte unendliche Reihen mit den negativen und rationalen Zahlen identifizieren.
Unklar blieb allerdings, ob bezüglich dieser Gleichheitsdefinition jede $p$-adische Zahl eindeutig mit einer bereits bekannten (d.h. komplexen) Zahl identifiziert werden kann. Hensel hatte offenbar diese Vorstellung und ließ sich insbesondere bei seinen mißglückten Transzendenzbeweisen von ihr leiten.

Hensel wurde als enger Schüler Kroneckers wahrgenommen. Methodisch wurde er zudem von Karl Weierstraß geprägt. In der Debatte über die Begrifflichkeiten und Methoden in der arithmetischen Theorie der algebraischen Zahlen argumentierte er 1894 für Kronecker (und damit gegen Dedekind). Ab 1897 vertrat er eine unabhängige Position. Die dazugehörige Theorie wurde jedoch von David Hilberts Synkretismus der Theorien von Richard Dedekind und Kronecker im *Zahlbericht* [Hilbert, 1897] in den Schatten gestellt.

Nach Kroneckers Tod 1891 litt Hensel stark unter den Spannungen zwischen der geschwächten Berliner und der erstarkten Göttinger Schule. Obwohl sich die genauen Vorgänge nicht rekonstruieren lassen, ist sicher, daß neben Hensel auch andere Personen der Meinung waren, er sei in verschiedenen Situationen ungerecht behandelt worden. Hensel erwog sogar, die wissenschaftliche Laufbahn aufzugeben. Im Herbst 1902 erhielt er einen Lehrstuhl in Marburg, wo er bis zu seinem Lebensende blieb.

Hensel hatte die angestrebten Resultate nicht erreichen können, doch von seinem Weg blieben die $p$-adischen Zahlen als neuer Ort, die ihn fest im Gedächtnis der Mathematiker verankern.

## 0.1 Die $p$-adischen Zahlen als neues mathematisches Objekt

**Was ist eine $p$-adische Zahl?**

In diesem Abschnitt soll eine möglichst *konkrete* Vorstellung davon vermittelt werden, was für ein Objekt eine $p$-adische Zahl ist. Dabei wird eine modernisierte Notation benutzt; die Inhalte sind jedoch im Sinne Hensels.

Für eine Primzahl $p$ hat eine $p$-adische Zahl die Form

$$z_p = \sum_{i=k}^{\infty} a_i p^i \qquad \text{mit} \qquad a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}, k \in \mathbb{Z}.$$

Eine $p$-adische Zahl ist also eine möglicherweise unendliche Summe, deren Summanden die Form $a_i p^i$ haben, wobei die Koeffizienten $a_i$ natürliche Zahlen kleiner als $p$ sind. Dies sichert, daß sich die einzelnen Summanden nicht stören. Die folgende abkürzende Schreibweise verdeutlicht die Analogie zu einem Dezimalbruch: $z_p = a_k \ldots a_0, a_1 a_2 \ldots \quad (k < 0)$.

Die Zahl $k$ gibt dabei an, durch welche Potenz von $p$ das betrachtete $z_p$ teilbar ist. Ist $k \geq 0$, so heißt $z_p$ eine *ganze* $p$-adische Zahl. Beschränkt man sich auf ganze $p$-adische Zahlen, so werden nur die natürlichen Zahlen durch endliche Summen beschrieben. Die übrigen rationalen Zahlen kann man ebenfalls durch $p$-adische Zahlen beschreiben, man benötigt dazu jedoch unendliche Summen. Dies soll an zwei Beispielen erläutert werden:

Sei $p = 3$. Dann ist $100 = 1 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 9 + 1 \cdot 81 = 1 \cdot 3^0 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3$. Dem entspricht die Schreibweise $100 = 1,021 \quad (3)$.
Der Zahl $-1$, die ja zum Beispiel für $6 - 7$ steht, entspricht hingegen die unendliche Reihe
$-1 = 2,222... = \sum_{i=0}^{\infty} 2 \cdot 3^i \quad (3)$.
Diese Gleichung läßt sich folgendermaßen erklären: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ besteht bei Betrachtung der Summenglieder bis zum Exponenten $n - 1$ die Kongruenz

$$-1 \equiv \sum_{i=0}^{n-1} 2 \cdot 3^i \mod p^n, \quad \text{also etwa } -1 \equiv 2 + 6 + 18 = 26 \mod 27.$$

Für eine genauere Motivation und Definition der Operationen sei auf Kapitel 5 verwiesen.
Alle nichtperiodischen $p$-adischen Zahlen entsprechen keiner rationalen Zahl und haben damit zunächst keine Verbindung zu bekannten Zahlen.

**Was für ein neues mathematisches Objekt sind die $p$-adischen Zahlen?**

Man kann die $p$-adischen Zahlen folgendermaßen charakterisieren:

> Die $p$-adischen Zahlen sind der Prototyp eines einfachen, abstrakten mathematischen Gegenstands im Herzen der Mathematik.

Im Herzen der Mathematik befinden sie sich, weil es um Zahlen und Teilbarkeitsaussagen geht. Eine einzelne $p$-adische Zahl ist ein einfaches Objekt, weil man sie als geordnete Zusammenfassung der Koeffizienten $a_i$ auffassen kann, die keine zusätzliche Struktur besitzt. Die $p$-adischen Zahlen sind, ebenso wie die Regeln für die Operationen mit ihnen, direkt analog zu den reellen Zahlen. Damit sind sie einfach zugänglich, weil sie syntaktisch etwas Gewohntem entsprechen.
Abstrakt sind die $p$-adischen Zahlen in mehrerer Hinsicht: Zum einen beschreibt die Formel, mit der eine $p$-adische Zahl notiert wird, im gewöhnlichen Sinn eine unendlich große Zahl. Zum anderen haben die (meisten) $p$-adischen Zahlen nach heutiger Sichtweise keinen Bezug zu den reellen bzw. komplexen Zahlen, also keinen Bezug zu zuvor bekannten mathematischen Objekten. Diese beiden Aspekte illustrieren, daß die Theorie der $p$-adischen Zahlen keine Größenlehre ist und sich daher in die seit Mitte des 19. Jahrhunderts beginnende Moderne in der Mathematik einordnet.
Die $p$-adischen Zahlen befriedigen ein innermathematisches Interesse, denn $p$-adische Koeffizienten beschreiben die Zerlegung eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten modulo $p^M$ für alle $M$ gleichzeitig.

Die Einführung der $p$-adischen Zahlen geschah in drei Schritten. Hensel ordnete zunächst einem angesehenen mathematischen Objekt (einer rationalen Zahl $r$) eine Entwicklung zu. Die erhaltene Reihe ist ein neues mathematisches Objekt. Dieses Objekt ist aber sowohl durch die Beschreibung "Entwicklung von $r$" als auch durch eine Rechenvorschrift fest mit der gegebenen rationalen Zahl $r$ verbunden. Die Reihe kodiert auf eine neue Art Informationen über die rationale Zahl.
Anschließend abstrahierte Hensel von einem ihrer Merkmale, nämlich der Periodizität, und betrachtete beliebige Reihen gleicher Bauart. Nach dieser Vervollständigung faßte er noch alle so erhaltenen Reihen in einem Objekt "Körper der $p$-adischen Zahlen" zusammen.

Hensels Texte geben keine eindeutige Auskunft darüber, ob er annahm, daß zu jeder dieser Reihen mindestens eine (komplexe) Zahl existiert, der sie zugeordnet ist. Falls er dies annahm, so hätte er seiner Auffassung nach nur bekannte mathematische Objekte neu beschrieben und anhand dieser Beschreibung neu zusammengefaßt.
In der Arbeit [47, 1904], die die $p$-adischen Zahlen systematisch der Öffentlichkeit vorstellte, deutete Hensel eine solche Verbindung allerdings nicht einmal an. Entsprechend wurden die $p$-adischen Zahlen als ein neuartiges Beispiel eines Körpers wahrgenommen und motivierten in den ersten 15 Jahren nach

ihrer Einführung vor allem strukturelle und axiomatische Untersuchungen. Dazu gehören neben Steinitz' Untersuchungen zum Körperbegriff [Steinitz, 1910] und Kürschaks Definition des Bewertungsbegriffs [Kürschak, 1913] auch Fraenkels Axiomatisierung der $p$-adischen Zahlen [Fraenkel, 1912].

## 0.2 Kurt Hensel (1861-1941)

Kurt Hensel stammte aus einer wohlhabenden jüdischen Berliner Familie. Seine Großmutter väterlicherseits war Fanny Hensel, die ebenfalls komponierende Schwester von Felix Mendelssohn-Bartholdy. Dieses kulturelle Erbe war innerhalb der Familie stets präsent, denn Kurt Hensels Vater Sebastian hatte 1879 das aus Familienbriefen komponierte Buch *Die Familie Mendelssohn 1729-1847* herausgegeben. Bis 1924 erlebte es achtzehn Auflagen und Kurt Hensel war zeitweise die Kontaktperson des Verlages. Zuletzt wurde es 2010 verlegt. Daneben pflegte die Familie Hensel aber auch ihren eigenen Familienstolz. So wurde *Der richtige Hensel in Worten und Redensarten* schriftlich fixiert und nach und nach (auch von Kurt Hensel) ergänzt.

Ab 1880 studierte Kurt Hensel Mathematik, davon zwei Semester in Bonn, die übrigen in Berlin. Er hatte bald persönlichen Kontakt zu Leopold Kronecker. Kroneckers akademischer Lehrer Dirichlet war mit einer Schwester von Hensels Großmutter (väterlicherseits) verheiratet gewesen. Hensel selbst formulierte später, er "habe es bei Kronecker immer so herzlich gehabt", und bezeichnete sich als seinen "Hauptschüler".
Hensels erste mathematische Forschungen schlossen sich explizit an Kronecker an: Das Thema seiner Dissertation wurde von Kronecker angeregt, die Habilitationsarbeiten enthielten Ergänzungen zu Kroneckers *Grundzügen* [Kronecker, 1882]. Hensel übernahm auch Kroneckers Konstruktivitätsforderungen und entwickelte konstruktive Verfahren für die Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen.
An Hensels dreißigstem Geburtstag starb Kronecker. In den folgenden Jahren lockerte Hensel seine Konstruktivitätsforderungen. Insbesondere entschloß er sich zur Benutzung von Potenzreihenentwicklungen, da diese für ihn algorithmische Vorteile hatten. Anschließend fand er nicht nur entsprechende Potenzreihenentwicklungen für die Zahlentheorie, sondern suchte auch nach einer Möglichkeit, mit Hilfe dieser Entwicklungen Primdivisoren zu definieren, um die Theorien von Kronecker und Dedekind ablösen zu können.

Hensel hatte 1890 eine Beförderung zum Extraordinarius beantragt. Nach Kroneckers Tod wurde er schließlich im März 1892 (unbesoldeter) Extraordinarius, da er Werke und Vorlesungen Kroneckers herausgeben sollte. Hensel hielt thematisch vielseitige Vorlesungen, seine Veröffentlichungen blieben jedoch einseitig. In den nächsten Jahren kam Hensels Karriere nicht voran, was sehr wahrscheinlich auch mit antijüdischen Vorbehalten zusammenhing.

1897 organisierte Dedekind die DMV-Tagung in Braunschweig, auf der er die Zahlentheorie stark repräsentiert sehen wollte. Auf Einladung von Dedekind stellte Hensel seine Theorie der Potenzreihen in der Zahlentheorie vor. Dabei kodiert eine Potenzreihe unendlich viele Teilbarkeitsaussagen in Bezug auf eine feste Primzahl $p$. Hensel betonte vor allem, daß diese Reihen analog zusammenhängen wie die auf Riemannschen Flächen. (In Abschnitt 4.2.4 wird die damit verbundene geometrische Vorstellung erläuteret.) Seine Ideen wurden insbesondere von Dedekind positiv aufgenommen.

In der Folgezeit litt Hensel sehr unter seiner unbesoldeten Anstellung. Zwar hatte er aufgrund seines privaten Vermögens keine finanziellen Probleme, aber die fehlende Anerkennung machte ihm so sehr zu schaffen, daß er im Jahr 1900, obwohl Vorstandsmitglied der DMV, weder deren Jahrestagung noch den Internationalen Mathematikerkongreß in Paris besuchte. Erst im Jahr 1902 erhielt Hensel bei Stellenneubesetzungen aufgrund mehrerer Todesfälle eine Professur in Marburg.
Da es Hensel zunächst nicht gelang, aus seinen Ideen eine *neue* Primdivisortheorie zu entwickeln, veröffentlichte er 1902 eine ausführliche Herleitung der Potenzreihen aus bekannten Primdivisortheorien.

Die 1904 veröffentlichten *Neue[n] Grundlagen der Arithmetik* sind wohl die am deutlichsten wahrgenommene Arbeit Hensels; sie inspirierte verschiedene Anknüpfungen. In ihr werden zu den jeweiligen Objekten Teilbarkeitsaussagen bezüglich der verschiedenen Potenzen einer Primzahl $p$ betrachtet. Aus dieser Sichtweise leitete Hensel die $p$-adischen Zahlen ab. Sie waren bereits in seinen letzten Berliner Vorlesungen im Sommersemester 1902 quasi selbstverständlich aufgetreten, aber jetzt betonte Hensel ihre Neuheit.
Noch bekannter wurden die $p$-adischen Zahlen nach einem Vortrag 1905, in dem Hensel sie und seine neue Betrachtungsweise für ganze Serien von Transzendenzbeweisen nutzen wollte. Es stellte sich jedoch heraus, daß Hensels Beweisidee fehlerhaft war.
In den folgenden Jahren gelang es Hensel nicht, seine Transzendenzbeweise zu vervollständigen. Auch die Primeigenschaften seiner abgeleiteten Primdivisoren konnte er nicht beweisen, ohne eine andere Primdivisorentheorie zu benutzen. 1913 brachte er die $p$-adischen Zahlen 1913 in ein Lehrbuch der elementaren Zahlentheorie [56, 1913] ein. Von diesem ausgehend führte Helmut Hasse sie nach dem Ersten Weltkrieg zu einem Siegeszug, indem er sie für Lokal-Global-Prinzipien nutzte.

Hensel hatte 1887 geheiratet, seine Frau Gertrud stammte aus einer jüdischen Industriellenfamilie und ließ sich vor der Hochzeit taufen, während Hensel (wie bereits die Familie Mendelssohn-Bartholdy) von Geburt an evangelisch war. Das Paar hatte fünf Kinder: vier Töchter und einen Sohn.
Hensels Karriereverlauf läßt nur die Vermutung zu, daß seine jüdische Abstammung ihn behinderte. In der Zeit des Nationalsozialismus wurde er allerdings ganz direkt ihretwegen schikaniert. Konkret wurde ihm 1935 (bereits nach seiner Emeritierung) das Abhalten von Vorlesungen verboten und die Kürzung der Bezüge angedroht. Die entsprechende Gesetzesauslegung wurde später allerdings zurückgenommen. 1936 trat Hensel als Herausgeber des Crelle-Journals zurück, 1939 trat er aus der DMV aus. Beides erfolgte aufgrund der wohlbegründeten dringenden Befürchtung, ansonsten ausgeschlossen zu werden. Hensel starb 1941 an einem Herzinfarkt.

## 0.3 Die Entstehung der $p$-adischen Zahlen im Überblick

Die folgende Überblicksdarstellung verzichtet so weit wie möglich auf komplizierte Formeln.

**Vorgeschichte**

In Hensels mathematischen Überlegungen im Zusammenhang mit seiner Dissertation befinden sich zwei Strukturen, die er später ausbaute.
Die erste dieser Strukturen störte ihn im Spezialfall der Kreisteilungskörper bei einem Beweisversuch: Er betrachtete die Reste der Konjugierten eines Elements eines Periodenunterkörpers modulo eines Primdivisors. Diese Reste können nicht beliebig vorgeschrieben werden, sondern sie bilden Zyklen. Das heißt, mit einem Rest sind auch die anderen Reste des Zyklus bereits bestimmt. Der erste Schritt zur Einführung der $p$-adischen Zahlen war die Konstruktion eines Szenarios, in dem nicht nur der Rest modulo eines Primdivisors, sondern auch die Reste bezüglich aller Primdivisorpotenzen durch eine lokale Reihe kodiert werden. Die Reihen, die dabei konjugirten Zahlen zugeordnet werden, sind untereinander konjugiert.
Die zweite Strukur ist ein Zwischenkörper, nach dem Hensel bei der Arbeits an seiner Dissertation (vergeblich) gesucht hatte, nämlich nach einem Zwischenkörper, über dem die Reste eines Zyklus konjugiert sind. Im gerade angesprochenen Szenario konstruierte er später die Reihen so, daß ihre Bestandteile konjugiert sind, aber nicht im Zahlkörper liegen müssen.

Wesentliche technische Rahmenbedingungen für seine späteren Untersuchungen erarbeitete sich Hensel anhand der Problemstellung, die Diskriminante der Komposition zweier Körpererweiterungen zu bestimmen:
Hierbei führte Hensel eine lokale Sichtweise ein, betrachtete die Situation also in Bezug auf einen Primdivisor $P$. Dem entspricht die Frage nach dem $P$-Anteil der Diskriminante und einem lokalen Fundamentalsystem (für den Modul $P$), mit dem alle Elemente dargestellt werden können, die $P$ nicht im Nenner haben. Hensels Idee war, beides aus der Primdivisorzerlegung von $P$ zu bestimmen.
Auch zu einem Primdivisor gibt es ein sogenanntes Fundamentalsystem, das es erlaubt, alle Reste bezüglich dieses Primdivisors darzustellen. Hensel bildete ein Fundamentalsystem für den Modul $P$ aus den Fundamentalsystemen zu den Primdivisoren von $P$, indem er die Elemente mit geeigneten Vorfaktoren multiplizierte.
Ein solches an die Primdivisorzerlegung angepaßtes lokales Fundamentalsystem konstruierte Hensel in der Folge in den verschiedensten Situationen.
Vom Fall der Periodenunterkörper ausgehend modellierte er das für ihn ideale Verhalten im Begriff des *normalen Fundamentalsystems $S$ für den Modul $P$*: Um den $P$-Anteil der Determinante der Konjugiertenmatrix von $S$ (und damit der Diskriminante von $S$ ) zu bestimmen, kann man die Spalten einzeln betrachten.
In späteren Arbeiten operierte Hensel in leicht veränderten Situationen mit zwei verschiedenen äquivalenten Definitionen.

In einer Serie von Arbeiten ab 1895 untersuchte Hensel die Konjugiertenmatrix eines lokalen Fundamentalsystems im Fall der algebraischen Funktionen einer Variablen mit Hilfe von Elementarteilern.
Aus den Elementarteilern eines beliebigen linear unabhängigen Systems kann man den $(x-a)$-Anteil der Diskriminante des Körpers berechnen. Dies beruht darauf, daß man das System in eines mit gleichen Elementarteilerexponenten überführen kann, bei dem man die Spalten der Konjugiertenmatrix nur einzeln betrachten muß.
Außerdem beschreiben die Elementarteiler die Verzweigung. Für den Nachweis nutzte Hensel die Theorie der Riemannschen Flächen, um ein der Primdivisorenzerlegung von $(x-a)$ entsprechendes Fundamentalsystem für den Modul $(x-a)$ aufzustellen.
Für die Berechnung von dessen Elementarteilern mußte er die Konjugiertenmatrix nur modulo $(x-a)$ betrachten, wodurch sie Blockdiagonalgestalt erhielt: Jedem Verzweigungspunkt entspricht ein quadratischer Block.

### 'Zugeordnete' algebraische $p$-adische Zahlen

Zugeordnete Potenzreihen benutzte Hensel im zahlentheoretischen Fall der *wilden Verzweigung* für die Bestimmung der Diskriminante. (Dies ist der Fall, wenn ein Exponent in der Primdivisorzerlegung von $p$ durch $p$ teilbar ist. Bei den von Hensel zuvor betrachteten algebraischen Funktionen kann dieser Fall nicht auftreten.)
Hierbei kann der $p$-Anteil der Diskriminante nicht aus den Graden und Vielfachheiten der Primdivisoren bestimmt werden. Hensel bestimmte ihn trotzdem aus einem Fundamentalsystem modulo $p$, das der Primdivisorzerlegung von $p$ entspricht, also mit Hilfe von Vorfaktoren aus den Elementen von Fundamentalsystemen bezüglich der Primdivisoren von $p$ zusammengesetzt ist. Die Konjugiertenmatrix des Systems hat modulo $p^M$ (für ein geeignetes $M$) Blockdiagonalgestalt.
Dabei entspricht jedem Block ein Primdivisor und zu jedem von letzteren bestimmte Hensel ein genau einmal durch ihn teilbares Element $\pi$, das lokal (d.h. modulo $p^M$) eine Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten erfüllt. Dann bestimmt sich der von diesem Block stammende $p$-Anteil der Diskriminante aus der Diskriminante der lokalen Gleichung für das Element $\pi$.
Zu Primdivisoren bestimmte Hensel seit seiner Habilitation immer ein Element $\varepsilon$, dessen Potenzen ein vollständiges Restsystem modulo des Primdivisors erzeugen. Hier konstruierte er dieses Element so, daß es ebenfalls eine lokale Gleichung erfüllt.

Die zugeordneten algebraischen $p$-adischen Zahlen beschreiben die Teilbarkeit durch einen der Primdivisoren von $p$. Sie haben die Gestalt

$$\sum_{i=o}^{\infty} r_i(\varepsilon) \cdot \pi^i, \quad \text{wobei die } r_i \text{ die jeweiligen Reste bedeuten.}$$

Hensel erhielt zu einem festen $p$ insgesamt $n$ Entwicklungen für ein beliebiges Element des Zahlkörpers. (Dabei bezeichnet $n$ den Grad des Zahlkörpers.) Die zum Primdivisor $P$ von $p$ gehörenden Entwicklungen ergeben sich aus einer ersten von ihnen, indem die Entwicklungselemente $\pi$ und $\varepsilon$ durch ihre Konjugierten bezüglich der lokalen Gleichungen ersetzt werden.

Im unverzweigten Fall gibt es keine Konjugationen von $\pi$ und daher beschreiben die Übergänge von $\varepsilon$ zu seinen Konjugierten dann insbesondere die Struktur zwischen den Resten modulo eines Primdivisors, die Hensel während der Arbeit an seiner Dissertation bemerkt hatte.

Hensel motivierte die Konstruktion von lokalen Entwicklungen zu den Primdivisoren, indem er die Situation analog zur der in der Theorie der Riemannschen Flächen modellierte. Er nutzte die Analogie auch als rhetorisches Mittel, um seine vereinfachte Darstellung des Zusammenhangs zwischen Konjugierten und Entwicklungen zu überspielen.

**'Unabhängige' $p$-adische Zahlen**

Hensels Ziel war es, mit Hilfe der lokalen Entwicklungen eine neue Primdivisorentheorie aufzubauen. Dazu wollte er die Entwicklungen unabhängig von den Primdivisoren ableiten. Anschließend sollten die Primdivisoren mit Hilfe der Entwicklungen definiert werden: Eine algebraische Zahl $x$ ist mit der Vielfachheit $k$ durch den Primdivisor $P$ teilbar, wenn alle zu $P$ gehörigen Entwicklungen durch $\pi^k$ teilbar sind.
Hensel gelang kein befriedigender Aufbau der Theorie. Insbesondere führte er keine Nachweise über die benötigten Eigenschaften der von ihm eingeführten Primdivisoren.
Bei Betrachtung modulo $p^M$ erhält man aus den konjugierten lokalen Entwicklungen zu einem Primdivisor einen Teiler der definierenden Gleichung modulo $p^M$ mit ganzzahligen Koeffizienten, insgesamt also eine Zerlegung der definierenden Gleichung modulo $p^M$. Läßt man die Reihenentwicklungen nicht abbrechen, so erhält man entsprechend Faktoren, deren Koeffizienten nicht abbrechen. Diese Koeffizienten sind die $p$-adischen Zahlen.
Diesen Gedankengang führte Hensel im Sommersemester 1902 in Berlin in Vorlesungen aus.

Hensel wollte daher die definierende Gleichung in Bezug auf $p$ so zerlegen, daß jedem Faktor ein Primdivisor entspricht. Dazu mußte er zunächst die Gestalt der Faktoren festlegen und dann die Eindeutigkeit der Zerlegung zeigen. Für die Koeffizienten der Faktoren definierte Hensel *wohldefinierte $p$-Reihen* bzw. *$p$-adische Zahlen* - sie laufen nach Potenzen von $p$ und haben Koeffizienten aus dem vollständigen Restsystem $\{0, 1, \ldots, p-1\}$.

Zu den so bestimmten Faktoren konstruierte Hensel die Entwicklungen der algebraischen Zahlen. Der einfachere Fall ist der, in dem die definierende Gleichung des Zahlkörpers für den Bereich von $p$ irreduzibel bleibt. In diesem wählte Hensel als Primelement ein Element $\pi$, das durch die minimale gebrochene Potenz von $p$ teilbar ist. Im weiteren Aufbau der Theorie bis hin zu den Potenzreihen nahm es den Platz des genau einmal durch den Primdivisor teilbaren Elements ein.
Im allgemeinen Fall zerlegte Hensel die definierende Gleichung in irreduzible Faktoren, behandelte diese wie angegeben und setzte das Ergebnis zusammen.

Später modifizierte bzw. konkretisierte er seinen Ansatz: Ist die definierende Gleichung nicht irreduzibel, so haben die irreduziblen Faktoren keine rationalen Koeffizienten. Da man dann nicht direkt Wurzeln

dieser Faktoren erhält, konstruierte Hensel sie als Potenzreihe. Die Bestandteile dieser Potenzreihe erhielt er durch die bekannte Behandlung einer endlichen Näherungsgleichung. (Dies ist möglich, da letztere ebenfalls irreduzibel ist.)
Die so konstruierte Potenzreihe ist einer der konkreten Anlässe für die auch sonst naheliegende Definition der allgemeinen algebraischen $p$-Reihen bzw. *algebraischen $p$-adischen Zahlen.*

**Einführung der $p$-adischen Zahlen**

Hensel wollte *Neue Grundlagen der Arithmetik* legen, indem er für ein gegebenes $p$ eine spezifische Sichtweise vorstellte, die sich ganz auf die Teilbarkeit durch $p$ konzentrierte. Dabei wird insbesondere von der im Vorgang des Zählens implizit enthaltenen Größe, der Anzahl, abstrahiert.
Er betrachtete die "von der Natur gegebenen ganzen positiven Zahlen" und ihre Operationen Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division. Für die Rechnungen, die innerhalb der positiven ganzen Zahlen nicht ausführbar sind, stellte er Symbole für das Ergebnis bereit. (Beispiele für solche Rechnungen wären $2 - 7$ oder $15 : 4$.) Hensel erläuterte, diese Ergebnisse würden von ihm nur anders als gewöhnlich bezeichnet.
Von den endlichen $p$-Reihen für natürliche Zahlen ausgehend leitete Hensel die unendlichen (periodischen) $p$-Reihen für rationale Zahlen ab. Zusätzlich ließ er beliebige wohldefinierte Reihen zu, die er ebenfalls als *Zahlen* bezeichnete.
Hensel übertrug weiter einige Konzepte der Algebra, wodurch er ein konstruktives Zerlegungsverfahren für Polynome erhielt, deren Koeffizienten solche neuen Zahlen sind (Hensels Lemma).
In dieser Arbeit stehen die $p$-adischen Zahlen nur für sich selbst - sie dienen weder direkt einer weiterführenden Fragestellung noch wird thematisiert, ob jede $p$-adische Zahl mit einer bekannten Zahl in Verbindung steht.

Hensel nutzte jedoch seine Ergebnisse in einer Veröffentlichung zur Theorie der algebraischen Zahlen. Zunächst definierte er eine erste Art neuer, zu einem Zahlkörper $\mathbb{Q}(\alpha)$ spezifischer Zahlen als eine wohldefinierte Reihe nach (ganzen) Potenzen von $p$ mit Koeffizienten in einem vollständigen Restsystem.
Falls die definierende Gleichung irreduzibel ist, bestimmte er wiederum ein Primelement $\pi$. Dann kann man die oben eingeführten Zahlen genauer als wohldefinierte Reihe nach Potenzen von $\pi$ mit Koeffizienten in einem vollständigen Restsystem modulo $\pi$ schreiben. Da dann die Koeffizienten Einheite modulo $p$ sind, kann man die Teilbarkeit durch gebrochene Potenzen von $p$ an diesen letzteren Reihen direkt ablesen.
Im allgemeinen Fall zeigte Hensel, daß $n$ der neuen Zahlen Lösungen der definierenden Gleichung sind. Hierzu benutzt er das oben bereits angesprochen Verfahren, die Lösungen von endlichen Näherungsgleichungen der irreduziblen Faktoren zu verfeinern.

Bei seinem Vortrag 1905 in Meran bezeichnete Hensel eine $p$-adische Zahl als ein Rechnungssymbol, bei dem es sich nicht um eine Summe im gewöhnlichen Sinne, sondern um ein Aggregat von Ziffern handele. Gleichzeitig behauptete er aber explizit, bestimmte $p$-adische Zahlen *seien* transzendente Zahlen.

Vermutlich befand Hensel sich auch selbst in diesem Spannungsfeld zwischen der formalen Betrachtungsweise und seiner eigenen Vorstellung von der mathematischen Situation.
Hensel führte die Begriffe Betrag, Konvergenz und Umgebung ein, um den Konvergenzradius der Reihendarstellungen der Exponentialfunktion für den Bereich von $p$ (für verschiedene $p$) zu bestimmen. Für jedes $p$ erhielt er eine irreduzible Gleichung vom Grad $p$ für $e$ im Bereich von $p$. Sein Fehler war, daß er die Wurzeln dieser abgeleiteten Gleichungen miteinander und mit der üblichen reellen Zahl $e$ identifizierte.

**Zusammenfassung**

Hensels frühe Arbeiten zeigen neben unverhofften Beobachtungen viel technische Phantasie, um die Situation mit der maximal möglichen Kontrolle zu modellieren und ggf. die optimale Situation herbeizuführen. Dies führte ihn zu der Behauptung, man könne eine vereinfachte Primdivisorentheorie anhand lokaler Entwicklungen aufbauen, wobei die Situation völlig analog zu der im Fall der Riemannschen Flächen sei.
Sowohl in der Vorlesung als auch in den Veröffentlichungen wurden $p$-adische Zahlen eingeführt, die zumindest nicht unmittelbar als Entwicklung einer Zahlgröße zugeordnet sind.
Die Gegenüberstellung von Vorlesung und Veröffentlichung zeigt vor allem, wie stark Hensel für die Veröffentlichung an der rhetorischen Wirkung seiner Darstellung gefeilt hat.
Während er sich in der Arbeit 1904 auf die moderne Kraft der Neuschöpfung verließ, kehrte er in seinem Vortrag 1905 zur Idee des Zusammenhangs aller möglichen Zahlen zurück. Da seine Intuition aber fehlschlug, wirkten die $p$-adischen Zahlen ziellos modern. Es gab kein naheliegendes Anwendungsgebiet und vermutlich hielten es andere Mathematiker für gefährlich, mit ihnen zu arbeiten, nachdem Hensel selbst von seinen Intuitionen getäuscht worden war.

## 0.4 Fragestellungen

Diese Arbeit leistet etwas für vier verschiedene Fragen- bzw. Themenkomplexe:

**1. Wie entstanden die $p$-adischen Zahlen als mathematisches Objekt?** Im engeren Sinne wird diese Frage in den Kapiteln 4 und 5 beantwortet: Hensel benötigte die $p$-adischen Zahlen, um die lokalen Potenzreihen, die er (vgl. Kapitel 4) zunächst nur behauptet und mit Hilfe der Primdivisoren abgeleitet hatte, auch unabhängig von letzteren erhalten zu können.

**2. Welche mathematischen Probleme und mathematikhistorischen Konstellationen und Prozesse führten zur Entstehung der $p$-adischen Zahlen?** Der Beantwortung dieser Frage dienen die Kapitel 2 bis 5. Insbesondere mußten auch die frühen Arbeiten Hensels untersucht werden, um sichtbar zu machen, warum sich die Theorie der algebraischen Zahlen für Hensel anders darstellte als für alle seine Zeitgenossen: Bereits während der Arbeit an seiner Dissertation war Hensel auf eine (technische) Struktur gestoßen, die er später versuchte auszubauen und fruchtbar zu machen.

**3. Welche Bedeutung hatten die $p$-adischen Zahlen zum Zeitpunkt ihrer Entstehung?** Hensel erläuterte die $p$-adischen Zahlen in unterschiedlichen Textformen zwischen 1902 und 1905 in verschiedenen Zusammenhängen. Dies wird in Kapitel 5 dargestellt. Überlegungen zur Bedeutung der $p$-adischen Zahlen, die letztere im Kontext der modernen/modernistischen Mathematik gewinnen, werden im zusammenfassenden Kapitel 7 angestellt.

**4. Was folgt für eine wissenschaftliche Biographie Hensels?** Da alle wesentlichen Arbeiten Hensels zwischen 1884 und 1904 vorgestellt werden, könnte ein Vergleich zu anderen Mathematikern seiner Generation direkt anschließen. Ein solcher wäre eine notwendige Voraussetzung für eine fundierte Abschätzung der Frage, ob sein Fortkommen durch sein (getauftes) "Jüdischsein", seine Identität als Kronecker-Schüler bzw. Mitglied der Berliner Schule oder doch durch seine enge thematische Ausrichtung (oder noch andere Faktoren) behindert wurde.

## 0.5 Quellen und Vorgehen

### Quellen

Die erste und wichtigste Materialgrundlage dieser Untersuchung bilden Hensels veröffentlichte Forschungsarbeiten aus den Jahren zwischen 1884 und 1909.
Neben diesen stehen die von Hensel publizierten Bücher, die aber im Text kaum Erwähnung finden. Zunächst enthält der von Hensel geschriebene Teil des Buches *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln* [Hensel/Landsberg, 1902] eine Zusammenschau der (vorgestellten) Henselschen Forschungsarbeiten zu diesem Thema, die in Bezug auf die $p$-adischen Zahlen wenig Neues bietet. Das von Hensel seit 1897 geplante Buch *Theorie der algebraischen Zahlen* erschien erst 1908, also vier Jahre nach der Einführung der $p$-adischen Zahlen. Daher kann es nur beleuchten, wie Hensels Einstellungen sich in der Zwischenzeit änderten. Das 1913 veröffentlichte Buch *Zahlentheorie*, durch das Hasse für die $p$-adischen Zahlen begeistert wurde, wird nicht behandelt, weil es außerhalb des Untersuchungszeitraums entstand und weil Hensel in ihm die $p$-adischen Zahlen in einem anderen Zusammenhang präsentierte.
Als wichtigste unveröffentlichte Materialien werden Vortragsausarbeitungen und ein mathematisches Tagebuch aus Hensels Studienzeit sowie Hensels Vorbereitungen für eine Vorlesung im Sommersemester 1902 benutzt. Die Vortragsausarbeitungen befinden sich im Archiv der HU Berlin, das Tagebuch in Familienbesitz und die Vorlesungsvorbereitungen im Imperial College in London. Weiterhin gehören zum Material der Arbeit veröffentlichte und unveröffentlichte Briefe; zum Beispiel von Kurt Hensel, David Hilbert, Felix Klein, Heinrich Weber, Richard Dedekind und Georg Frobenius, sowie veröffentlichte Forschungsarbeiten anderer Mathematiker.

### Textform und Voraussetzungen

Die wichtigste Textform der folgenden Arbeit ist das Ergebnis der Lektüre eines mathematischen Textes: Eine knappe, strukturierte Darstellung des Ausgangstextes, die wiederum ein mathematischer Text ist. Dabei besteht der Anspruch, daß die mathematischen Aussagen verständlich werden. Auch die mathematische Argumentation soll in den meisten Fällen nachvollziehbar sein. Genaue Formulierungen,

Positionierungen und rhetorische Strategien werden in die Analyse einbezogen. Aus Gründen der Übersicht geht einer solchen Darstellung oft eine zitatfreie Zusammenfassung des Inhaltes voraus.
Daneben gibt es Textteile, die den chronologischen Ablauf dokumentieren, Zusammenhänge rekonstruieren bzw. Schlußfolgerungen aus den Analyseergebnissen formulieren.
Die Kapitel 1 und 7 benötigen kaum spezielle mathematische Kenntnisse. Für die übrigen Kapitel sind hingegen Kenntnisse der von Leopold Kronecker und Richard Dedekind entwickelten Theorien der algebraischen Zahlen hilfreich, da diese den Hintergrund zu Hensels Überlegungen bilden. Zur Einführung in diese beiden Theorien sei die Arbeit [Edwards, 1980] empfohlen.

### "Lokale" Beschreibungen

Bereits in dieser Einleitung und in der gesamten Arbeit werden Aspekte von Hensels Vorgehensweise mit dem Wort "lokal" beschrieben. Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei hier explizit darauf hingewiesen, daß Hensel dieses Wort (zumindest im hier untersuchten Zeitraum 1881-1910 und dem hier untersuchten Zusammenhang) an keiner Stelle verwendete.

Vielmehr wird das Wort "lokal" benutzt, um Hensels Vorgehen zu beschreiben und Parallelen zwischen verschiedenen Betrachtungsweisen aufzuweisen. Dabei wird implizit auf die heute geläufige Vorstellung rekurriert, wonach die Punkte einer Varietät Primidealen entsprechen. Eine lokale Betrachtung konzentriert sich dabei auf die Umgebung eines Punktes; dem entspricht in Hensels Terminologie die Betrachtung in Bezug auf eine Primzahl bzw. einen Primdivisor.

Hensel explizierte diese Vorstellung ab seinem Vortrag auf der DMV-Tagung 1897, die dafür benötigten Überlegungen waren jedoch spätestens seit 1882 bekannt: In der Arbeit [Dedekind/Weber, 1882] entsprechen die Punkte einer Riemannschen Fläche den Primidealen des Ganzheitsrings (bezüglich der gewählten Variable). Dabei wird die Analogie zwischen algebraischen Funktionenkörpern einer Variablen und Zahlkörpern genutzt, um Konzepte aus dem zahlentheoretischen Fall in den Fall der algebraischen Funktionen zu übertragen. Ebenfalls 1882 behandelte Kronecker in seinen *Grundzügen* [Kronecker, 1882] beide Theorien gemeinsam in einer allgemeineren Theorie.
Zwischen Hensel und dem Wort "lokal" besteht zudem ein unmittelbarer Zusammenhang, denn Hensel strebte einen bestimmten Aussagentyp an, der heute als "Lokal-Global-Prinzip" bezeichnet wird. Diese Bezeichnung wurde jedoch, ebenso wie der mathematische Begriff "lokal", erst deutlich nach 1920 üblich.

Das Wort "lokal" dient also der Zusammenfassung und hat in dieser Verwendung keinen eigenen mathematischen Inhalt. In den folgenden Kapiteln ist jeweils eindeutig erkennbar, auf welche konkrete Betrachtungsweise Hensels sich das Wort "lokal" gerade bezieht. Typische Beispiele wären die Betrachtung der algebraischen Zahlen eines Zahlkörpers modulo eines Primdivisors oder modulo $p^M$ für beliebig großes $M$ (und eine Primzahl $p$). Insbesondere bezieht sich "lokal" damit auch auf Situationen, die in der heutigen mathematischen Terminologie als "semilokal" bezeichnet würden.

**Überblick**

Die Reihenfolge der Kapitel ist thematisch-chronologisch. Dies bedeutet, daß an einigen Stellen inhaltlich zusammengehörige Arbeiten gemeinsam dargestellt wurden, auch wenn sie zu verschiedenen Zeitpunkten veröffentlicht wurden.

Das erste Kapitel erläutert Hintergründe. Neben einer Einführung in die mathematische Thematik und die Akteure, die die entsprechenden Fragestellungen bearbeiteten, beinhaltet dies auch eine biographisch-chronologische Skizze.

Die folgenden vier Kapitel befassen sich mit den einzelnen mathematischen Arbeiten. Das zweite Kapitel behandelt die Dissertation, die Habilitationsarbeiten und eine einzelne Arbeit in der allgemeinen Situation aus dem Jahr 1889.

Thema des dritten Kapitels sind Hensels Veröffentlichungen in der Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen, die keine Potenzreihenentwicklungen voraussetzen. Diese beginnen 1891 und enden 1895 mit zwei Notizen, die die Potenzreihenentwicklungen noch nicht zum Gegenstand haben, aber bereits mit ihnen argumentieren.

Das vierte Kapitel beginnt mit Hensels Einführung von Potenzreihenentwicklungen in die zahlentheoretische Situation 1897. Anschließend leitete er diese unter Benutzung einer Primdivisortheorie her und transformierte seine Theorie der algebraischen Funktionen unter der Voraussetzung, daß die Potenzreihenentwicklungen bekannt sind.

Im fünften Kapitel wird dargestellt, wie Hensel 1904 die $p$-adischen Zahlen einführte, um die 1897 behauptete Theorie 1905 auch unabhängig von einer Primdivisortheorie beweisen zu können. Dabei kann man anhand der Vorlesungsvorbereitungen von 1902 nachvollziehen, wie Hensel die Konzepte einführte und umformulierte. Dieses Kapitel behandelt zudem Hensels fehlerhaften Beweis für die Transzendenz von $e$.

Im sechsten Kapitel werden alle vorgestellten mathematischen Arbeiten Hensels chronologisch zusammengefaßt, indem die technischen Übergänge zwischen ihnen in den Blick genommen werden.

Das abschließende siebente Kapitel betrachtet die $p$-adischen Zahlen im Spiegel der Debatte zur Moderne in der Mathematik.

# Kapitel 1

# Hintergründe

## 1.1 Biographisch-chronologische Skizze

### Familiäre Wurzeln

Kurt Hensel wurde am 29.12.1861 in Königsberg geboren.[1]
Sein Vater Sebastian Hensel (1830 - 1898) stammte aus einer berühmten Berliner Künstlerfamilie: Dessen Mutter Fanny Hensel, geb. Mendelssohn-Bartholdy (1805 - 1847) war die ebenfalls komponierende Schwester von Felix Mendelssohn-Bartholdy, der Vater der Maler Wilhelm Hensel. Nach Fannys Tod 1847 wurde Sebastians Tante Rebecka, die Frau des Mathematikers Dirichlet, Mutterersatz und vertraute Briefpartnerin für ihn.[2]
Sebastian Hensel hatte Landwirtschaft studiert und kaufte im Jahr 1853 ein größeres Gut Großbarthen in Ostpreußen. Aufgrund des feuchten Klimas in den Pregelniederungen kränkelten jedoch sowohl seine Frau Julie von Adelson als auch Kurts älterer Bruder Paul, und daher beschloß die Familie 1870, nach Berlin zurückzukehren, wo sie bis 1880 eine elegante Zwölfzimmerwohnung an der Mohrenstraße bewohnten.
Während Kurt Hensel zuvor von seinen Eltern privat unterrichtet worden war, besuchte er in Berlin erst die Döbbelinsche Privatschule und anschließend das Friedrich-Wilhelms-Gymnasium.[3] Dort begeisterte Karl Heinrich Schellbach ihn für die Mathematik. Nach den Erinnerungen von Sabine Lepsius, einer Freundin von Kurt Hensels jüngster Schwester Lili, zeichneten sich alle fünf Geschwister durch eine große geistige Lebhaftigkeit und ungewöhnliche Bildung aus, ihr Gespräch habe einem Feuerwerk geglichen und in seinen Anspielungen einen solchen Bildungsschatz vorausgesetzt, daß “der gewöhnliche Sterbliche kaum folgen konnte.”[4]

1879 erschien die erste Auflage von *Die Familie Mendelssohn*, Sebastian Hensels “harmonische[m] Gemälde seiner assimilierten Familie,”[5] eine Erzählung mit zahlreichen Briefdokumenten. Bis 1933 sollten davon

[1] Die Darstellung folgt [Hasse, 1950], d.h. alle nicht belegten Aussagen finden sich dort.
[2] Kurt Hensel war also mit Kroneckers verehrtem Lehrer Dirichlet verwandt.
[3] Dies hing u.a. damit zusammen, daß sein Vater sich noch längere Zeit mit dem Verkauf des Gutes beschäftigen mußte, und daher selten in Berlin war. Vgl. [Hensel, 1903].
[4] [Lepsius, 1972, 47].
[5] [Lackmann, 2005, 359]. Lackmann schreibt ebenfalls, mit seiner Ehe habe Sebastian Hensel “das Assimilationsprogramm der Familie konterkariert”, da die (ostjüdische) Familie seiner Frau “erst zwei Jahrzehnte zuvor getauft worden war,”

achtzehn Auflagen (in fünf Verlagen) erscheinen, wobei (mindestens) in den 1920er Jahren auch Kurt Hensel für die Verhandlungen mit den Verlagen zuständig war.
Laut Lackmann hat Sebastian Hensel darin "zweifellos, ohne das Thema zu benennen, die Diskussion über ein jüdisches Selbstverständnis zwischen deutschem Nationalbewußtsein und christlichem Bekenntnis angeregt."[6] Das Buch sei ein Zeichen der Hoffnung, daß "das jüdische Erbe nun keine Belastung mehr darstellt."[7] Dieses deutliche Bewußtsein des jüdischen Erbes in Kurt Hensels Familie rechtfertigt es, Kurt Hensel als getauften jüdischen Mathematiker zu bezeichnen.[8] Seine Lebensauffassung war hingegen atheistisch.[9]

### Mathematische Anfänge

Hensel verbrachte sein erstes Studiensemester (das Sommersemester 1880) und das Sommersemester 1882 in Bonn.[10] Die übrigen Semester studierte er in Berlin, neben Mathematik auch etwas Physik und Philosophie.
Hensels am 28.10.1879 begonnenes Tagebuch enthält bereits Ende 1879 bzw. Anfang 1880 erste Berechnungen zur analytischen Geometrie. Die erste Notiz über eine "Privatunterhaltung" mit "Prof. Kronecker" ist auf den 6.2.1882 datiert.[11] Wenige Seiten danach beginnen (undatiert) die Rechnungen, die später den veröffentlichten Teil von Hensels Dissertation ausmachen sollten.
In seinen Bonner Semestern hörte Hensel vor allem Vorlesungen bei Lipschitz und gewann einen Preis für eine Seminararbeit. In Berlin hörte er u.a. Vorlesungen von Weierstraß, Kronecker, Kirchhoff und Helmholtz. Seine Ausarbeitungen des Weierstraß'schen Vorlesungszyklus sind in der Bibliothek des IRMA Straßburg erhalten.[12] Die für seine Dissertation maßgebliche Theorie Kroneckers aus den *Grundzügen einer Theorie der algebraischen Größen*[13] scheint dieser jedoch erst in späteren Jahren in seinen Universitätsvorlesungen behandelt zu haben.[14]

Ende November 1882 dachte Hensel, er habe das Problem der *gemeinsamen außerwesentlichen Diskriminantenteiler* (im Folgenden stets gaDT, für die Erläuterung des Problems vgl. 1.2.1) für Periodenunterkörper vollständig gelöst, da er eine hinreichende Bedingung für deren Auftreten gefunden hatte,

[Lackmann, 2005, 344]. Fanny Mendelssohn (damals noch ohne den Zusatz "Bartholdy") war bereits 1816 getauft worden, ihre Eltern konvertierten 1822, [Lackmann, 2005, 161].

[6] [Lackmann, 2005, 359].

[7] [Lackmann, 2005, 359].

[8] So argumentierten Birgit Bergmann und Anette Vogt, die Hensel 2006 in die Ausstellung über jüdische Mathematiker aufnahmen, vgl. den Katalog [Bergmann/Epple, 2009].

[9] Daran erinnert sich die Enkelin Luise Hackelsberger vor allem, da es zu Konflikten zwischen ihrem religiösen (zunächst evangelischen, dann katholischen) Vater Werner Bergengruen und den Hensels kam. Diese Information verdanke ich Britta Habdank-Eichelsbacher, die am 12.6.1998 ein Interview mit Luise Hackelsberger führte.

[10] Diese Datierung weicht von der Behauptung in [Hasse, 1950] aufgrund eines Briefes ab, den Kurt Hensel am 7.6.1882 aus Bonn an seine Schwester Cecilie schrieb. Nach Hasse verbrachte Hensel die Sommersemester 1880 und 1881 in Bonn. Auch die "Biographischen Mittheilungen", die Hensel der Leopoldina am 1.2.1908 machte, unterstützen die hier vertretene Meinung, vgl. Matrikel-Mappe Nr. 3256 der Leopoldina zu Halle.

[11] Gedanken zu einem Ausspruch Kroneckers, [TB, 20-26].

[12] Durch einen Schriftvergleich mit Hensels Tagebuch ist erkennbar, daß Hensel diese Ausarbeitungen anfertigte. Allerdings entsprechen sie nicht der kanonischen Reihenfolge des Zyklus.

[13] [Kronecker, 1882]

[14] Kronecker hielt auch in Hensels Studienjahren Vorlesungen mit dem Titel "Zahlentheorie". Mitschriften von diesen Vorlesungen sind über Hensels Bibliothek an das IRMA Straßburg gelangt und inzwischen zum Teil online zugänglich. Diese Mitschriften legen nahe, daß Kronecker bis 1884 die Divisorentheorie nicht in Vorlesungen behandelte. Später änderte sich dies; insbesondere gab Hensel 1901 ein Buch *Zahlentheorie* mit Vorlesungen Kroneckers heraus, wobei ein Abschnitt die Divisorentheorie behandelte, vgl. [Kronecker, 1901].

die er auch für notwendig hielt.[15] Diese erwies sich jedoch als nicht notwendig und Kronecker erklärte ihm, er müsse auch ideale Primdivisoren mit berücksichtigen, sich also mit Kroneckers Theorie vertraut machen.

Am 14.4.1883 enthält Hensels Tagebuch den ersten Eintrag, der eine Theorie der gaDT einer beliebigen galoisschen Gattung verspricht. Wie erhaltene Ausarbeitungen von Seminarvorträgen am 23.5., 6.6. und 1.8. 1883 zeigen, beschäftigte er sich zu diesem Zeitpunkt ausschließlich mit dem galoisschen Fall, den er in strenger Analogie zum Fall der Periodenunterkörper behandelte.

Die schrittweise eingereichte (verschollene) Dissertationsschrift behandelte hingegen auch den allgemeinen unverzweigten Fall.[16] Bei der Abfassung seiner Dissertation hatte Hensel sich überarbeitet, so daß er Reitstunden nahm und Kroneckers Empfehlung folgte, Karl May zu lesen, um so einige Zeit auszuspannen.

### Dissertation, Hochzeit und die Privatdozentenzeit

Kronecker beschrieb die Arbeit in seinem Gutachten vom 10.2.1884 als sehr umfangreich. Er habe sie bereits mehrere Monate geprüft, wobei er "Mancherlei zu bemerken gefunden" habe,[17] was vor dem Abdruck noch zu berücksichtigen sei, sie sei jedoch

> eine *hervorragende* Arbeit, ein Zeugniß von Forschergeist und Forscherkraft, von mathematischem Talent und mathematischer Bildung.[18]

Es erfolgte allerdings kein Abdruck, die veröffentlichte Promotionsschrift enthält nur eine Übersicht über den Inhalt der Arbeit sowie die Rechnungen im Fall der Periodenunterkörper.[19]

Die Promotionsprüfung fand am 28.2.1884 statt. In Mathematik bei Kronecker und in Mechanik bei Kirchhoff lautete das Urteil jeweils sehr gut, auf die philosophischen Fragen Zellers zeigte sich Hensel "im wesentlichen wohl orientiert".[20] Die Promotion erfolgte am 24.3.1884.

Anschließend diente Hensel als Einjährig-Freiwilliger in Freiburg, danach wollte er sich in Göttingen habilitieren. Dieser Plan zerschlug sich jedoch aus unbekannten Gründen,[21] so daß Kronecker ihm 1886 in Berlin "die Habilitation ermöglichte",[22] obwohl es mit Blick auf seine mathematischen Kenntnisse außerhalb der Arithmetik "an sich gerechtfertigt gewesen [wäre], die Ertheilung der venia legendi an Dr. Hensel noch einige Zeit zu vertagen."[23]

Bereits am 12.12.1885 hatte sich Hensel mit Gertrud Hahn (1866 - 1954), der Tochter einer aus den Sommerferien befreundeten jüdischen Familie, verlobt. In einem Brief an seine Schwester Cecile schrieb

[15] [TB, 48-51] vom 27.11.1882.

[16] Mit Hilfe der veröffentlichten Einleitung kann man argumentieren, daß Hensel ein falsches Ergebnis erhielt, dieses aber in ein richtiges rücktransformierte, vgl. in 2.2.3 den Abschnitt mit FN 87 und [1, 1884].

[17] Zitiert nach [Biermann, 1988, 295].

[18] [Biermann, 1988, 296].

[19] Vgl. 2.2.1 für mögliche Gründe.

[20] [Biermann, 1988, 296] wirft die Frage auf, warum das Gesamturteil nur "magna cum laude" war. Einerseits kann das an der Philosophieprüfung liegen, andererseits zeigte sich Hensels Bruder Paul sehr zufrieden, als er 1885 seine Doktorprüfung mit diesem Prädikat abschloß, vgl. [Hensel, 1937, 37].

[21] Diese Behauptung wird stets mit Bezug auf [Hasse, 1950, 2] wiedergegeben. Es gibt noch eine weitere Quelle, die etwas damit zu tun haben könnte: In einem Brief Hilberts aus Berlin an Klein in Göttingen heißt es, "der Hänsel" (sic!) werde sich in Berlin habilitieren, Brief vom 9.7.1886 zitiert nach [Frei, 1985, 15]. Es stellt sich die Frage, warum Hilbert dies für mitteilenswert hält.

[22] [Hasse, 1950, 2].

[23] Rückblickende Erinnerung Weierstraß aus dem Jahr 1891, zitiert nach [Biermann, 1988, 148f]. Der hier zitierte Text Weierstraß' wird in 2.3.1 umfangreicher zitiert.

er am 13.12.1885 von der "tiefen Neigung, welche ich seit beinah einem Jahr für sie hege," sowie davon, daß die Verlobung geheim bleiben solle. Sein Enkel Walter Hayman erinnerte sich an eine Geschichte aus der Verlobungszeit, wonach Kurt Hensel bei einem Essen bei seiner Familie auf die Fragen, wer denn links und rechts von ihm sitzen solle, jeweils mit "Trudchen" geantwortet habe.[24] Während es von seiner Seite also offenbar eine Liebesheirat war, haben ihr ihre Eltern möglicherweise zugeraten, welchen der zahlreichen Bewerber sie auswählen solle. Ihre Enkelin Luise Hackelsberger erinnerte sich, daß sie auf die Frage, ob sie denn gar nicht gefragt worden sei, wen sie heiraten wolle, antwortete: "Mein liebes Kind, meine Eltern wußten ganz genau, was gut für mich war, und wir hatten eine sehr glückliche Ehe."[25]

Anfang März 1886 stellte Hensel den Antrag auf Habilitation, dem er acht thematisch zusammengehörige handschriftliche Abhandlungen zur Zahlentheorie sowie einen kleineren Aufsatz über eine in der Theorie der Elektrizität auftretende Reihe beilegte.[26] Kronecker hob in seinem Gutachten vom 16.7.1886 am meisten die fruchtbare Abstraktion hervor, die in der Betrachtung von Gattungsbereichen und Fundamentalsystemen modulo eines Primdivisors liege.[27] Daneben lobte er auch den Beweis der absoluten Äquivalenz zwischen der Diskriminante einer Gattung und der Diskriminante ihrer Fundamentalgleichung. Er sicherte weiterhin zu, zwei der acht Arbeiten seien bereits seit längerer Zeit für den Abdruck im Crelle-Journal angenommen. Letztendlich wurde nur eine der Arbeiten überhaupt vor Kroneckers Tod veröffentlicht, nämlich die, in der Gattungsbereiche modulo eines Primdivisors untersucht werden, und auch diese erst 1887.[28]
Hensels Probevortrag beschäftigte sich historisch und methodisch mit einem von Kroneckers Lieblingsthemen, der Anwendung der Analysis des Unendlichen auf die Zahlentheorie. Auch das Thema der am 29.7.1886 stattfindenden Probevorlesung stand Kronecker nahe, nämlich der Einfluß von Gauss' Kreisteilungstheorie auf die Entwicklung der Algebra.[29] Weierstraß erinnerte sich 1891, daß im anschließenden Colloquium deutlich geworden sei, daß "Hensel in den letzten Jahren seine Studien in zu einseitiger Weise betrieben habe."[30]
Nach der Habilitation am 30.7.1886 wurde die Verlobung öffentlich, am 3.3.1887 wurde Gertrud Hahn getauft und die Hochzeit fand am 26.3.1887 statt.[31] Auf drei Töchter, die 1888, 1889 und 1890 geboren wurden, folgte 1895 der heiß ersehnte Sohn und 1896 eine weitere Tochter.

[24] [Hayman, 1998, 107].

[25] Auch dies ist nach dem Interview zitiert, das Britta Habdank-Eichelsbacher am 12.6.1998 mit Luise Hackelsberger führte. Eventuell sollte diese Geschichte nur pädagogischen Wert haben. Die Familiengeschichte, daß Kurt Hensel einer von sechs Bewerbern war, die am gleichen Tag um ihre Hand anhielten, und unter denen ihre Eltern ihn auswählten, scheint mir auf jeden Fall übertrieben zu sein. Eine überlieferte Äußerung Kurt Hensels ist: "Ich erzähle die Geschichten nicht so, wie sie sich zufällig ereignet haben, sondern wie sie wirklich sind." Auch diese verdanke ich Britta Habdank-Eichelsbacher, sie stammt von einem Familientreffen der Familie Günther-Schenk am 6.9.1998 in Schlierbach im Odenwald. Dabei handelt es sich ebenfalls um Enkel Hensels.

[26] Der Antrag selbst ist nicht datiert. Aus den Unterlagen zum Habilitationsvorgang geht hervor, daß Kronecker und Fuchs am 4.3.1886 mit der Begutachtung beauftragt wurden. Vgl. [Akte H, 145-150].

[27] Die dadurch ermöglichten Untersuchungen würden heute als Theorie der endlichen Körper bezeichnet werden.

[28] [2, 1887].

[29] [Biermann, 1988, 366]. Die beiden anderen von Hensel vorgeschlagenen Themen waren der Sturmsche Satz und Strahlensysteme, [Akte H, 153].

[30] Abgedruckt in [Biermann, 1988, 148f], "zu" wurde beim Abdruck vergessen. Es handelt sich um dasselbe Dokument wie in FN 23. Auch dieser Ausschnitt ist in dem längeren Zitat in Abschnitt 2.3.1 enthalten.

[31] In Kurt Hensels lateinischem Lebenslauf, der mit der Dissertation veröffentlicht wurde, ist als Konfession evangelisch angegeben, wie es in seinem Zweig der Familie Mendelssohn üblich war, vgl. [1, 1884].

Hasse und nach ihm auch Hayman schreiben, Hensel sei "bald" nach seiner Habilitation Extraordinarius geworden.[32] Betrachtet man aber zum Vergleich die Biographie des wenige Wochen jüngeren David Hilbert, der ebenfalls 1884 promovierte und 1886 habilitierte, so ist sein Biograph Blumenthal der Überzeugung, ihm sei die Zeit bis zu seiner Ernennung zum Extraordinarius 1892 recht lang geworden.[33] Ebenso war es vermutlich bei Hensel, der am 7.12.1890 selbst den Antrag stellte, die Fakultät möge beim Ministerium seine Beförderung zum außerordentlichen Professor vorschlagen.[34]
Bis dahin hatte Hensel insgesamt erst fünf Veröffentlichungen vorzuweisen. Neben der Dissertation und der 1887 veröffentlichten Habilitationsschrift handelte es sich um eine Abhandlung zur Theorie der unendlich dünnen Strahlenbündel, die ein Resultat seiner Mitarbeit bei der Herausgabe der Kirchhoffschen Werke war, eine kurze Abhandlung zur Zahlentheorie, sowie die an Fehlern und interessanten Ideen reiche Arbeit *Ueber Gattungen, welche durch Composition aus zwei anderen Gattungen entstehen* aus dem Jahr 1889.[35] Diese steht aller Wahrscheinlichkeit nach bereits im Zusammenhang mit Hensels Hoffnung auf arithmetische Transzendenzbeweise, denn Hilbert notierte 1888 in seinem Reisetagebuch nach einem Gespräch mit Hensel in Berlin:

> Er will den Beweis für die Transzendenz der Zahl $\pi$ so führen, dass er nachweist, dass die Diskriminante von der numerischen Gl.[eichung] dann durch jede Primzahl teilbar sein müsste.[36]

Hensels erste an der Universität gehaltene Vorlesung behandelte im Wintersemester 1886/87 die allgemeine Theorie der Strahlensysteme, vom Wintersemester 1887/88 bis zum Sommersemester 1890 hielt er jedes Semester eine andere, eher grundlegende Vorlesung mit einer relativ hohen Hörerzahl von durchschnittlich 16 Zuhörern.[37]
Um etwas vorzugreifen: In seinem Nachruf auf Hensel erinnert sich Oskar Perron, der zwischen 1898 und 1902 in Berlin (und München) studierte, daß Hensels Vorlesung über Synthetische Geometrie bei ihm "einen besonders tiefen nachhaltigen Eindruck hinterlassen hat."[38]

Sowohl Weierstraß als auch Kronecker äußerten sich positiv zu Hensels Beförderungsgesuch. So schrieb Weierstraß am 15.1.1891 in einer Stellungnahme an den Dekan der Fakultät, er würde in der Zustimmung zu ihm "eine gerechte Anerkennung nicht nur seines Talentes, sondern auch seines Eifers und seiner wissenschaftlichen Tüchtigkeit" erblicken.[39] Kronecker schrieb am 10.2.1891 abschließend an den Kultusminister von Goßler:

> Die vorgeschlagene Beförderung würde Herrn Hensel selbst eine wohlverdiente Anerkennung seines bisherigen Wirkens sein sowie eine Aufmunterung, seine Kräfte auch fernerhin ganz und voll der Universität und der Wissenschaft zu widmen.[40]

[32] [Hasse, 1950, 3] bzw. [Hayman, 1998, 107].
[33] [Blumenthal, 1935, 396].
[34] Vgl.[Biermann, 1988, 148].
[35] Vgl. [5, 1989] und 2.5.
[36] [Hilbert, RTB 1888, 1/5 - 1/6].
[37] [Biermann, 1988, 148]. Über 20 Zuhörer hatte er in den Veranstaltungen zur Differentialrechnung und zur Analytischen Geometrie.
[38] [Perron, 1948, 234]. Erinnerungen von Hörern an Hensels Vorlesungstätigkeit in Berlin sind sehr selten.
[39] Zitiert nach [Biermann, 1988, 149].
[40] Zitiert nach [Biermann, 1988, 301]. Zuvor hatte er ausgeführt: "Herr Hensel besitzt in seiner vielseitigen humanistischen Bildung und in der glücklichen Vereinigung von Lehr- und Forschungsgaben alle für einen mathematischen Universitätsdocenten erforderlichen Eigenschaften; sein Eintritt in den Kreis der Professoren erscheint uns daher sehr erwünscht."

Trotzdem wurde Hensels Beförderung zu diesem Zeitpunkt abgelehnt.

1891 veröffentlichte Hensel neben drei Notizen mit maximal sechs Seiten zur linearen Algebra bzw. Physik auch eine lange Abhandlung zur *Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der algebraischen Integrale.*[41] Über diese Arbeit trug Hensel auch am 26.9.1891 auf der ersten DMV-Tagung in Halle vor.[42] Während der Vortrag vor allem die eingeführte Homogenisierung hervorhob, zeichnete sich die gedruckte Arbeit durch die im Werk Hensels einmalig strikten Konstruktivitätsforderungen aus. Diese verboten die Betrachtung von Wurzeln eines Polynoms und damit auch die Betrachtung der Konjugierten zu einer algebraischen Funktion.

Ebenfalls bereits in dieser Arbeit untersuchte Hensel den Fall, in dem die gebrochene Potenz eines gegebenen Faktors, durch die eine algebraische Funktion genau teilbar ist, nur vom Absolutglied der Minimalgleichung der algebraischen Funktion abhängt.[43] Die Einführung der $p$-adischen Zahlen erlaubte es Hensel später in der zahlentheoretischen Situation, den allgemeinen Fall auf diesen Spezialfall zurückzuführen.[44]

**Nach Kroneckers Tod**

Hensels Situation in Berlin änderte sich erst nach Kroneckers überraschendem Tod am 29.12.1891. Jetzt argumentierte die Fakultät, daß Hensel, der ihr mit der Abhaltung von Vorlesungen im Sinne Kroneckers hervorragende Dienste leisten würde und der geeignetste Herausgeber von Kroneckers wissenschaftlichem Nachlaß sei, in Berlin gehalten werden sollte.[45] Hensel wurde am 7.3.1892 zum Extraordinarius befördert, jedoch ohne die eigentlich damit verbundenen Bezüge. Er erzählte Fraenkel später darüber, der Ministerialdirektor Friedrich Althoff[46] habe diesbezüglich zu ihm gesagt: "Sie haben ohnehin genug Geld."[47]

Hensel hatte zu Kronecker eine enge persönliche und wissenschaftliche Bindung aufgebaut und bezeichnete sich selbst später als seinen "Hauptschüler".[48] Aus einer Förderung mit großem Wohlwollen war eine "geistige Gemeinschaft" geworden, der Hensel ein "Denkmal" setzte, indem er in jahrelanger Arbeit die Werke und Teile der Vorlesungen Kroneckers herausgab.[49] An Adolf Hurwitz schrieb Hensel 1897 rückblickend, daß er es "früher bei Kronecker so herzlich gehabt" habe.[50]

Vermutlich nachdem er keine entsprechenden Resultate in Kroneckers Nachlaß gefunden hatte, veröffentlichte Hensel im Jahr 1894 zwei Arbeiten, deren wesentliche Resultate noch aus der Zeit seiner Habilitation stammten. Die Arbeit [13, 1894], die die Äquivalenz von Diskriminante der Gattung und Diskriminante der Fundamentalgleichung zeigt, wurde sowohl von Hilbert als auch von Hurwitz als Zeichen dafür zitiert,

[41] [9, 1891].

[42] Abdruck: [11, 1892].

[43] Allerdings spezifizierte er die dem entsprechende Bedingungen nicht präzise, vgl. 3.1.2.

[44] Vgl. 5.5.3 und [49, 1905].

[45] Hensel hatte einen Ruf an die TH Darmstadt erhalten. Die Fakultät ging zurecht davon aus, daß Hensel diesen ablehnen würde, wenn er ein Extraordinariat in berlin erhielte, vgl. den Antrag auf Nachfolge von Weierstraß und Kronecker vom 8.2.1892, wiedergegeben nach [Biermann, 1988, 309f].

[46] Zu Althoff vgl. z.B. [vom Brocke, 1980].

[47] Zitiert nach [Fraenkel, 1967, 97]. Vgl. allerdings Hensels oben angebenen Ausspruch, er erzähle die Geschichten, wie sie wirklich sind, nicht wie sie sich zufällig zugetragen haben. Fraenkels Erinnerung ist in keinem Fall ganz korrekt, denn er behauptete, das Extraordinariat sei bereits in Marburg gewesen. Richtig sind Fraenkels Aussagen, Hensel habe "reich geheiratet", denn seine Frau stammte aus einer "angesehenen Berliner jüdischen Industriellenfamilie."

[48] [Fraenkel/Hensel, 1927, 754].

[49] [Hasse, 1950, 2f].

[50] Brief Hensels an Hurwitz vom 13.5.1897.

daß die Kroneckersche Benutzung von Unbestimmten zu einer Vereinfachung der Theorie führe.[51] Die Arbeit [14, 1894] über die gemeinsamen außerwesentlichen Diskriminantenteiler enthält hingegen möglicherweise auch neue Resultate.

Seit dem Wintersemester 1892/93 war Georg Frobenius (1849-1917) als Nachfolger Kroneckers in Berlin. 1894 publizierte er *Ueber die Elementarteiler der Determinanten*,[52] wobei er eine Kroneckersche Determinantenformel mit dem Weierstraß'schen Begriff der Elementarteiler verband.
An diese Arbeit schloß Hensel Aussagen *Ueber die Elementarteiler componirter Systeme* an,[53] die er als methodisches Hilfsmittel für eine Reihe von Abhandlungen in der Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen fruchtbar machte.[54]
Ab [20, 1895] waren für Hensel auch Wurzelfunktionen, also Wurzeln aus rationalen Funktionen,[55] Objekte der arithmetischen Theorie. Betrachtet man zu einem linear unabhängigen System mit $n$ Elementen die oben $H$ genannte Matrix der Konjugierten, so sind die Elementarteiler solche Wurzelfunktionen. Auch ein beliebiges linear unabhängiges System erlaubt durch Betrachtung der Elementarteiler die Bestimmung der Diskriminante, da ihre (gebrochenen) Reste Invarianten sind.
Die Anteile eines bestimmen Linearfaktors in den Elementarteilern bilden Folgen, die mit der Primidealzerlegung dieses Linearfaktors zusammenhängen. Diesen Zusammenhang bewies Hensel mit Hilfe der Theorie der Riemannschen Flächen und ihrer lokalen Potenzreihenentwicklungen. Die entsprechenden Ergebnisse wollte er schnell veröffentlichen und ließ sie daher von Frobenius am 17.10.1895 bzw. 14.11.1895 der Berliner Akademie vorlegen.

**Enttäuschte Hoffnungen**

1894 wurde Georg Hettner an die TH Charlottenburg berufen. Er behielt zwar sein Extraordinariat an der Berliner Universität, um je Semester eine zweistündige Veranstaltung anzubieten, doch wurde dadurch seine Besoldung frei. Es wurde beantragt, aber abgelehnt, die freie Besoldung auf Hensel zu übertragen.[56]
Ebenfalls 1894 war Hensel auch für die Nachfolge Dedekinds an der TH Braunschweig im Gespräch, die schließlich Robert Fricke bekam. Eine interessante Außensicht auf Hensel gibt die in diesem Zusammenhang erfolgte Beurteilung:

> ...Kronecker, als dessen hervorragendster Schüler er gilt....In wissenschaftlicher Beziehung liegen die Haupt-Verdienste Hensel's in der Herausgabe der Kirchhoff'schen und Kronecker'schen Schriften. Derselbe ist hauptsächlich von den zu Rathe gezogenen Berliner Autoritäten als einer derjenigen jungen Gelehrten bezeichnet, welche am Geeignetsten dazu erscheinen, Nachfolger von Rich. Dedekind zu werden.[57]

Eine Berliner Sichtweise sieht man im Briefwechsel zwischen Frobenius und Dedekind. Hensel war mit dem 13 Jahre älteren Frobenius befreundet, er war Taufpate von Hensels einzigem Sohn. An Hurwitz

[51] [Hilbert, 1894a, 21] und [Hurwitz, 1895, 199]. Vgl. auch 2.4.1.
[52] [Frobenius, 1894].
[53] [17, 1894].
[54] Beginnend mit [20, 1895]. Die für Hensel entscheidende Aussage Frobenius' hatte dieser schon in [Frobenius, 1879] bewiesen. Hensel benötigte vermutlich eine frische Anregung, weil Kronecker die größten gemeinsamen Teiler (im Folgenden: ggTs) der Unterdeterminanten (einer bestimmten Größe) und nicht deren Quotienten (also die Elementarteiler) für die "richtigen" Invarianten hielt. Vgl. dazu 3.5.2 und [27, 1897, 350f].
[55] D.h. $w(x) = r(x)^{\frac{1}{k}}$ mit einer rationalen Funktion $r(x)$ und $k \in \mathbb{Z}$.
[56] Dies geht aus dem Briefwechsel Frobenius - Dedekind um den 20.3.1896 hervor.
[57] Braunschweiger Rektoratsbericht vom 14.2.1894.

schrieb Hensel 1897 darüber:

> Aber hier habe ich außer Frobenius, dem ich allerdings ganz außerordentlich viel verdanke, niemand, der ein arithmetisches Herz hat, und das wird mir, nachdem ich es früher bei Kronecker so herzlich hatte, jetzt schwerer zu entbehren.[58]

Frobenius berichtete an Dedekind über Hensel, bevor letzterer am 28.3.1896 erstmals zu Dedekind nach Braunschweig kam:

> Hensel fühlt sich zurecht zurückgesetzt und schlecht behandelt. Leider kann ich ihm nicht helfen, nicht einmal Weierstraß kann es, der ihm ebenso wohl will wie ich. Sollte er Ihnen sein Leid klagen, so mahnen Sie ihn doch recht zur Geduld.[59]

Es ist nicht klar, auf welche Vorkommnisse sich dies genau bezieht.

### Zürich

Ebenfalls 1896 gab es mit dem Scheitern seiner Berufung nach Zürich ein weiteres Ärgernis für Hensel. Um die Sympathien zu beleuchten, sei zunächst eine Briefstelle von Hilbert zitiert, in der es um Minkowskis Nachfolge in Königsberg geht: "..., dagegen habe ich Minkowski den Hensel auszureden gesucht."[60] Über die Stelle an der Universität Zürich schrieb Minkowski am 17.11.1896 an Hilbert:

> Hensel würde gute Aussichten haben, wenn man nicht glaubte, daß er schließlich doch ausschlagen und den Ruf nur für Berlin benutzen würde.[61]

Nachdem dieser Hinderungsgrund durch Nachfrage bei Hensel aus dem Weg geräumt worden war, traten jedoch weitere Stimmen gegen Hensel auf den Plan. Im Bericht der Erziehungsdirektion der Universität vom 14.12.1896 kann man darüber unter anderem lesen:

> Von den nicht versorgten jüngeren Mathematikern wird von Frobenius und von den hiesigen Mathematikern und nach den Versicherungen von Frobenius auch von Weierstraß am meisten in den Vordergrund gerückt: Kurt Hensel...
> Hiesige Mathematiker und Kenner der Verhältnisse (Hurwitz, Geiser etc.) glauben eher annehmen zu sollen, dass eine Berufung Hensels 'ein Schlag ins Wasser' wäre, trotzdem er gerne von Berlin wegginge, weil ihm dort 'übel mitgespielt' worden sei. Warum ihm in Berlin 'übel mitgespielt wurde', ob etwa aus Gründen, die auch bei uns ins Gewicht fallen könnten (die vielleicht mit Semitismus oder Antisemitismus zusammenhängen), haben wir nicht zu eruieren vermocht. Es bleibt hier ein Punkt dunkel, der die meisten Mitglieder der Fakultät vorsichtig und zurückhaltend gestimmt hat.[62]

Am 13.5.1897 schrieb Hensel rückblickend über seine Zürich-Pläne ausgerechnet an den gegen ihn agierenden Hurwitz:

> Es tut mir recht leid, dass ich mit Ihnen und Minkowski so aus der Ferne über die Dinge sprechen muß, die mich interessieren, besonders jetzt, wo ich andere wissenschaftliche Pläne habe, welche ich gar zu gern mit Ihnen beiden durchgesprochen hätte. Das war auch wesentlich, was mich an dem Plane an die Züricher Universität zu gehen lockte, denn sonst habe ich es hier so gut, dass ich mich nicht so sehr fortwünsche....
> Kommen Sie nicht vielleicht dieses Mal nach Braunschweig? Ich gehe jedenfalls hin und will auch dort einen Vortrag halten, nachdem Dedekind mich in liebenswürdigster Weise dazu aufgefordert hat.[63]

[58] Brief Hensels an Hurwitz vom 13.5.1897.
[59] Brief von Frobenius an Dedekind vom 22.3.1896.
[60] Brief Hilberts an Klein vom 1.9.1896, zitiert nach [Frei, 1985, 123], die Stelle bekam Otto Hölder.
[61] Brief Minkowskis an Hilbert vom 17.11.1896, zitiert nach [Minkowski, 1973, 87].
[62] Zitiert nach [Frei/Stammbach, 1994, 15f].
[63] Brief Hensels an Hurwitz vom 13.5.1897.

Den geplanten Vortrag auf der DMV-Tagung in Braunschweig sprach Hensel einen Tag später auch in einem Brief an Hilbert an. Anlaß dieses Briefes war der Empfang von Hilberts Zahlbericht:

> Ich habe mich auf eine sehr liebenswürdige Einladung von Professor Dedekind auch entschlossen, auf der Naturforscherversammlung einen Vortrag zu halten; ich freue mich ganz besonders darüber und darauf, dass Sie auch da sein werden. Bis dahin werde ich wohl auch Ihr Buch [Zahlbericht] ganz durchgelesen haben, und werde dann hoffentlich über manche Punkte desselben ausführlicher mit Ihnen reden können.[64]

In dem angesprochenen Vortrag stellte Hensel den Grundgedanken seiner neuen Theorie vor, der hier als *Vision einer diskreten Riemannschen Fläche* bezeichnet werden soll. Dabei sind einer algebraischen Zahl $n$-ten Grades $n$ Konjugierte zugeordnet, die über der Menge aller Primzahlen ausgebreitet liegen.[65] Zu einer bestimmten Primzahl $p$ gehören dabei $n$ sogenannte *Entwicklungen*, die in Gruppen zusammenhängen. Jeder Gruppe entspricht ein Primdivisor von $p$ und man kann anhand der Entwicklungen ablesen, welche Potenz des Primdivisors die Zahl enthält.

**Verweigerung**

Die weitere Entwicklung läßt sich anhand der erhaltenen Briefe Hensels an Hilbert nachvollziehen. Ab dem 19.10.1897 beginnen diese meist mit der Anrede “Lieber Freund”.[66] Im Jahr 1898 hatte Hensel Hilbert gebeten, sich bei Klein für ihn einzusetzen.[67]
Insbesondere bezüglich der Nachfolge Hölder in Königsberg hoffte Hensel auf den Einfluß der Gutachten von Klein und Hilbert.[68] Er war der Überzeugung, jetzt könne “doch eigentlich kaum noch jemand vor mir dort in Betracht kommen.”[69] Falls er diese Stelle nicht bekäme, würde er überlegen, “aus der Universitätstätigkeit, die für mich dann doch gar keine Aussicht zu haben scheint, ganz auszuscheiden.”[70]
Am 12.8.1899 wandte sich Hensel unter anderem mit der Frage an Hilbert, warum er zur Einweihung des Gauß-Weber-Denkmals nicht eingeladen gewesen sei.[71] Am 28.3.1900 schrieb er von “Gründen, die ich Ihnen lieber mündlich auseinandersetze” für eine schnellstmögliche Veröffentlichung der Arbeit [39, 1901].[72]
Bereits auf der Rückfahrt von der DMV-Versammlung 1899 in München hatte Hensel gegenüber Hilbert angekündigt, er werde 1900 weder zur DMV-Versammlung nach Aachen noch zum Internationalen Mathematikerkongress nach Paris kommen, wenn sich bis dahin an seiner universitären Stellung nichts ändere.[73] Im Dezember 1900 begründete er sein erfolgtes Fernbleiben damit, es ginge ihm gegen sein Gefühl, diesen Versammlungen beizuwohnen. Er habe sich auch beurlauben lassen, denn wenn seine ausgezeichnete Tätigkeit nicht honoriert würde, könne er sie auch frei ausrichten und ordentlich für sich

[64] Brief Hensels an Hilbert vom 14.5.1897.
[65] Diese geometrische Vorstellung wird in einem Abschnitt in 4.2.4 genauer beschrieben, der nach FN 105 beginnt.
[66] Es erscheint möglich, daß Hilbert nach dem neuerlichen Treffen eine bessere Meinung von Hensel hatte. Hensel selbst wird als sehr vorsichtig in seinen Äußerungen beschrieben. Seine Enkel erinnern sich, die höchste Kritik sei “Den kenne ich noch nicht so genau” gewesen. Zitiert nach dem Familientreffen der Familie Günther-Schenk am 6.9.1998.
[67] “Über das Resultat Ihrer Besprechung mit Klein bin ich ebenfalls sehr froh. Möchte doch jetzt endlich etwas daraus werden, dass ich von Berlin fortkomme... Bitte liefern Sie mir doch auch weiterhin darin Ihre Hilfe.” Brief Hensels an Hilbert vom 21.7.1898.
[68] “Vielleicht können Sie noch einmal mit Klein darüber sprechen; ich hoffe, dass jetzt durch sein und Ihr Gutachten endlich etwas daraus werden könnte,” Brief Hensels an Hilbert vom 26.8.1898.
[69] Brief Hensels an Hilbert vom 26.8.1898, die Stelle bekam Schoenflies.
[70] Brief Hensels an Hilbert vom 26.8.1898.
[71] Brief Hensels an Hilbert vom 12.8.1899.
[72] Brief Hensels an Hilbert vom 28.3.1900.
[73] Brief Hensels an Hilbert vom 16.12.1900. Hensel war zu diesem Zeitpunkt im Vorstand der DMV!

arbeiten. Weiter hoffe er, "dass man vielleicht doch bald einmal einsieht, dass es gerecht wäre, wenn ich auch einen Schritt vorwärts käme."[74]

### Fruchtbare Jahre und die Zeit des Nazisozialismus

Als Schottky im Herbst 1902 nach Berlin berufen wurde, erhielt Hensel dessen ordentliche Professur in Marburg.

In Marburg entwickelte Hensel eine erfolgreiche Forschungs- und Lehrtätigkeit. So stieg innerhalb von fünf Jahren die Zahl der Mathematikstudenten von 30 auf 175.[75] Hensels Leistungen wurden jetzt auch honoriert: Er erhielt einen Ruf nach Leipzig, dessen Ablehnung ihm (am 3.8.1908) den Titel "Geheimrat" einbrachte.[76] Am 26.2.1908 wurde er in die Leopoldina zu Halle, die Deutsche Akademie der Naturforscher, aufgenommen.[77]

Zwischen 1903 und 1932 begutachtete er insgesamt 21 Promotionen, die achte davon war 1915 die von Abraham A. Fraenkel.[78]

Seit Fuchs' Tod im April 1902 gab Hensel auch das Crelle-Journal (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*) heraus, was ihm eine besondere Herzensangelegenheit war.[79]

Unter Hensels Schülern sei Helmut Hasse hervorgehoben, weil dieser nicht nur ab 1920 bei Hensel studierte, promovierte und habilitierte, sondern auch anschließend eng mit ihm zusammenarbeitete, z.B. bei der Herausgabe des Crelle-Journals.[80]

Insbesondere schrieb Hensel über dessen mathematische Tätigkeit, er habe "so manche Wünsche und Hoffnungen , die ich in meinem langen Leben hegte, so schön erfüllt."[81]

Obwohl Hensel bereits 1929 emeritiert worden war, hatte er noch unter den Schikanen des NS-Regimes gegen "jüdische" Mathematiker zu leiden.[82] So wurde er im Juli 1935 vom Rektor der Marburger Universität gebeten, im Wintersemester 1935/36 keine Vorlesungen zu halten.[83] Am 19. Dezember 1935 wurde ihm angedroht, er werde mit Wirkung zum 31.12.1935 in den Ruhestand versetzt.[84]

1936 entschied Hensel durchaus schmerzvoll, es sei wohl "das Richtigste und Anständigste",[85] wenn er selbst seine Tätigkeit für das Crelle-Journal abschließe. 1939 trat er dann auf dringenden Rat Hasses aus der DMV aus, um einem Ausschluß zuvorzukommen.[86]

[74] Brief Hensels an Hilbert vom 16.12.1900.

[75] [Hayman, 1998, 109].

[76] Vgl. [Hasse, 1950, 4] und Blatt 1 der Marburger Personalakte.

[77] Vgl. deren Matrikel-Mappe Nr. 3256.

[78] Vgl. die Marburger Universitätsakten.

[79] Vgl. [Hasse, 1950, 4]. Nur gelegentlich war er mit den eingegangenen Manuskripten so unzufrieden, daß seine Frau vorschlug, er könne es ja immer noch *Journal für kleine und ungewandte Mathematik* nennen, [Hayman, 1998, 109].

[80] Hasse steht erstmals 1926 als Mitarbeiter auf dem Deckblatt, ab 1929 kommt er wie Schlesinger als Editor hinzu, ab 1934 sind Hensel und Hasse zu zweit Editoren, ab Band 176 (1937) ist Hasse alleiniger Editor, s.u.

[81] Brief Hensels an Hasse vom 11.6.1936. Hasse konnte insbesondere in verschiedenen mathematischen Situationen die Bedeutung der $p$-adischen Sichtweise etablieren.

[82] Vgl. die *Hintergründe* am Beginn dieser biographischen Skizze.

[83] [Personalakte Hensel, Blatt 12].

[84] [Personalakte Hensel, Blatt 14]. Diese Versetzung in den Ruhestand hätte eine Kürzung der Dienstbezüge auf 35% bedeutet, wurde aber zurückgenommen, da emeritierte Hochschullehrer nachträglich von der Anwendung des Paragraphen: "Ein Jude kann nicht Reichsbürger sein. Ihm steht ein Stimmrecht in politischen Angelegenheiten nicht zu, er kann ein öffentliches Amt nicht bekleiden." ausgenommen wurden.

[85] Brief Hensels an Hasse vom 11.6.1936.

[86] Belegt durch eine Postkarte Hensels an Hasse vom 16.6.1939. Die Durchschrift des Briefes vom 13.6.1939, in dem Hasse dies anriet, ist ebenfalls erhalten.

Hensel war deutschnational eingestellt,[87] woran sich auch nach der Machtübernahme der Nationalsozialisten nichts änderte. Über den Internationalen Mathematikerkongress in Oslo 1936 schrieb er: "Dass Deutschland so schön abgeschnitten hat, freut mein deutsches und mein mathematisches Herz."[88]
Er starb am 1. Juni 1941 zumindest körperlich von den Nazis unbehelligt an einem Herzinfarkt. Der Hasse-Schüler Hans Reichardt legt in seinen Erinnerungen nahe, dies habe mit "riskanten Bemühungen" Hasses zugunsten Hensels zusammengehangen.[89]

## 1.2 Hintergründe der Mathematik Hensels

In diesem Abschnitt werden zunächst die wichtigsten Problemstellungen, die Hensel bearbeitete, dargestellt. Anschließend wird skizziert, wie diese Problemstellungen mit den Problemlösungen anderer Akteure in der Theorie der algebraischen Zahlen zusammenhängen.

### Primdivisoren

Um Mißverständnissen vorzubeugen, wird hier der Gebrauch des Wortes *Primdivisor* erläutert. Zunächst ist *Divisor* in diesem Zusammenhang nur das lateinische Wort für Teiler,[90] es soll also keine Assoziation zu späteren Begriffsbildungen der algebraischen Zahlentheorie bzw. der algebraischen Geometrie hergestellt werden.
Jeder im Folgenden auftretende Primdivisor $P$ hat die folgenden abstrakten Eigenschaften:
1) für jede ganze algebraische Zahl/Funktion $X$ ist definiert (und kann bestimmt werden), welche Potenz von $P$ das $X$ genau teilt (Divisor),
2) ein Produkt ist genau dann durch $P$ teilbar, wenn mindestens ein Faktor es ist (prim).

In Kroneckers Theorie der *Grundzüge* [Kronecker, 1882] werden Unbestimmte $u_i$ eingeführt und mit ihrer Hilfe *Formen* $F = a_1u_1 + \cdots + a_ku_k$ gebildet. Im hier betrachteten Fall eines Zahlkörpers sind die $a_i$ dabei ganze algebraische Zahlen des untersuchten Zahlkörpers. Eine solche Form repräsentiert verschiedene ganze algebraische Zahlen, die man erhält, wenn man statt der $u_i$ gewöhnliche ganze Zahlen einsetzt. Kroneckers wichtigstes Ziel war es, den größten gemeinsamen Teiler der $a_i$ zu konstruieren. Dazu wird die Form $F$ noch modifiziert. Das entstehende Modulsystem $M$ entspricht dann den heute geläufigeren Dedekindschen Idealen.[91] Für Kronecker war es dabei methodisch wichtig, daß er die Objekte mit Formeln *konstruieren* und nicht nur als Mengen beschreiben konnte.
Dedekind hingegen definierte *Ideale* als Mengen ganzer algebraischer Zahlen mit bestimmten Eigenschaf-

[87] Der folgende Ausschnitt aus einem Brief Hensels an seine Schwester Cecile Leo vom 12.9.1914 soll nur der Illustration dienen. Seine Interpretation würde eine stärkere Kontextualisierung erfordern. "[T]rotz allem muss ich sagen, ich bin stark und glücklich, dass ich diese größte Zeit erleben durfte; wie es auch kommen mag, ob wir siegen oder untergehen, niemand kann mir diese wundervollen Eindrücke der letzten 6 Wochen rauben."
[88] Brief Hensels an Hasse vom 31.7.1936.
[89] [Reichardt, 1984, 201]. Allerdings ist Reichardts Formulierung nicht konkret genug, um daraus abzuleiten, Hasse habe Hensel vor dem KZ bewahrt, wie es in der Internetpublikation [Sponsel, www] und auf der Wikipedia-Seite zu Hasse (6.10. 2010, FN 1) geschieht.
[90] Damit soll eine Verwechlsung zwischen den ganzen rationalen Primteilern einer Zahl $z \in \mathbb{Z}$ und ihren Primdivisoren in einem Zahlkörper vermieden werden.
[91] Mit Hilfe dieser nur angesprochenen Konstruktion ordnete Kronecker also dem Ring der ganzen algebraischen Zahlen durch Hinzunahme von Unbestimmten einen Bezout-Ring zu, in dem jedes endlich erzeugte Ideal ein Hauptideal ist, vgl. [Neumann, 2001, 142 & 150].

ten. Er betrachtete diese Mengendefinition entscheidend. Weniger grundlegend waren für ihn die aus dieser Definition abgeleiteten Aussagen, daß alle von ihm untersuchten Ideale endlich erzeugt sind und also als größte gemeinsame Teiler betrachtet werden können. Insbesondere gibt es in seiner Theorie nur Ideale und keine ihnen entsprechenden Divisoren als Objekte.
Sowohl Kronecker als auch Dedekind definierten eine Multiplikation für ihre jeweiligen Objekte, so daß jedes Modulsystem eindeutig in ein Produkt von Primmodulsystemen bzw. jedes Ideal eindeutig in ein Produkt von Primidealen zerlegt werden kann.[92] Auf technische Einzelheiten der Definition von Primidealen bzw. Primdivisoren und verschiedene Beweise der eindeutigen Zerlegung bei diesen Autoren muß hier nicht eingegangen werden.[93]

Hensel arbeitete im Verlauf seiner Karriere mit verschiedenen Konzepten von Primdivisoren, Ideale benutzte er nur gelegentlich als Hilfsmittel. Er begann im Kroneckerschen Theorierahmen der *Grundzüge*. Nach Kroneckers Tod (spätestens ab 1893) suchte er jedoch nach eigenen Konzeptionen. So ging er in der Theorie der algebraischen Funktionen dazu über, die benötigten ggTs nicht als Kroneckersche Divisoren, sondern als Wurzelfunktionen einzuführen. Die von ihm im zahlentheoretischen Fall eingeführten Primdivisoren bleiben sehr abstrakt, da sie den Reihenentwicklungen, in denen die Teilbarkeitsinformationen kodiert sind, nur zugeordnet werden.
Hensels Ziel ab 1893 war es insbesondere, die bekannten Primdivisoren (oder je nach Bezeichnung Primideale) in der Theorie der algebraischen Zahlen durch eine neue Konstruktion einfacher zu bestimmen bzw. zu beschreiben.

### 1.2.1 Die zahlentheoretischen Problemstellungen Hensels

Die drei wichtigsten zahlentheoretischen Problemstellungen Hensels hängen alle eng mit dem Begriff der *Diskriminante* zusammen. Dieser wird daher zuerst in modernisierter Begrifflichkeit, aber aus Hensels Perspektive, vorgestellt.

#### Die Diskriminante

Ausgangspunkt ist eine algebraische Körpererweiterung $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ $n$-ten Grades, die durch Adjunktion einer Wurzel einer irreduziblen Gleichung $n$-ten Grades (1) $\quad x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ mit ganzen Koeffizienten gegeben ist. Der "richtige" Begriff der ganzen algebraischen Zahl umfaßt dann nicht mehr nur die ganzrationalen Funktionen von $\alpha$ mit ganzen Koeffizienten, sondern alle diejenigen Zahlen des Körpers, die einer Gleichung mit ganzen (rationalen) Koeffizienten und Leitkoeffizient 1 genügen.[94]
Man kann eine Ganzheitsbasis $g_1, \ldots, g_n$ konstruieren, die die Darstellung aller und nur der ganzen algebraischen Zahlen als Linearkombination mit ganzen (rationalen) Koeffizienten ermöglicht.[95] Der Körperer-

[92] Ringe, die Integritätsbereiche sind und in denen eine solche Zerlegung eindeutig möglich ist, heißen heute Dedekindringe. Die definierten Multiplikationen stimmen im Fall eines Zahlkörpers überein, in allgemeineren Fällen entspricht Kroneckers Multiplikation aber nicht mehr der Idealmultiplikation, vgl. [Neumann, 2001].
[93] Als Lektüre hierzu sei noch einmal [Edwards, 1980] empfohlen.
[94] Also der Form (1). Dieser Ganzheitsbegriff wurde unabhängig voneinander von Kronecker und Dedekind eingeführt. Es erscheint naheliegend, daß bereits bei dieser Begriffsbildung die Analogie zur Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen eine wesentliche Rolle spielte.
[95] D.h. in der Form $g = a_1g_1 + a_2g_2 + \cdots + a_ng_n$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$.

weiterung wird dann eine ganze Zahl, die *Diskriminante $D$* zugeordnet, die man aus der Ganzheitsbasis berechnen kann, die von der konkreten Ganzheitsbasis jedoch unabhängig ist:
Man schreibt die Elemente $g_i = g_{i,1}$ der Ganzheitsbasis in die erste Zeile einer Matrix. In jeder Spalte stehen darunter die insgesamt $n$ konjugierten Körperelemente $g_{i,j}$.[96] Die Diskriminante ist das Quadrat der Determinante der so entstandenen $n \times n$-Matrix $H$:

$$H = \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{2,1} & \cdots & g_{n,1} \\ g_{1,2} & g_{2,2} & \cdots & g_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{1,n} & g_{2,n} & \cdots & g_{n,n} \end{pmatrix}$$

Die Diskriminante $D = \det H$ ist eine rationale ganze Zahl. Daher kann man für jede Primzahl einzeln untersuchen, ob und in welcher Potenz sie in der Diskriminante vorkommt.

### Das Problem der gemeinsamen außerwesentlichen Diskriminantenteiler

Die erläuterte Berechnungsmethode führt ebenfalls auf eine (rationale) ganze Zahl, wenn man sie für eine beliebige Körperbasis aus ganzen algebraischen Zahlen durchführt, also insbesondere auch für die $\mathbb{Q}$-Basis $1, x, \ldots, x^{n-1}$ für ganzes $x$. Das Ergebnis heißt dann Elementdiskriminante und werde mit $d_x$ bezeichnet. Dann stellt sich für ein gegebenes $x$ die Frage, für welche Primzahlen $p$ die in $d_x$ enthaltene Potenz von $p$ mit der in $D$ enthaltenen übereinstimmt.[97]
Umgekehrt kann man aber auch für eine beliebig gegebene Primzahl $p$ fragen, ob es ein Element $y$ gibt, so daß der $p$-Anteil von $D$ und $d_y$ übereinstimmt.[98]
Falls kein solches $y$ existiert, d.h. die Potenz von $p$ in $D$ kleiner ist als im größten gemeinsamen Teiler aller $d_x$, so heißt die Primzahl $p$ *gemeinsamer außerwesentlicher Diskriminantenteiler* (gaDT). Hensels Ziel war es, eine *Theorie* dieses bekannten Phänomens aufzustellen - er wollte also die Gründe für das Vorkommen der gaDT verstehen, ihr Vorkommen in bestimmten Körpertypen nachweisen usw.

### Die Probleme der "wilden Verzweigung" und der Komposition

Es ist bekannt, was es bedeutet, wenn eine Primzahl in der Diskriminante einer algebraischen Körpererweiterung vorkommt: Im Ring der ganzen Zahlen dieser Erweiterung wird $p$ im Allgemeinen nicht prim bleiben und $p$ teilt genau dann die Diskriminante, wenn in der Primdivisorzerlegung der Zahl $p$ Faktoren mehrfach vorkommen.[99] (Hensel nannte die Diskriminantenteiler aus diesem Grund 1897 als erster Verzweigungszahlen.[100])
Geht man umgekehrt von der Primdivisorzerlegung von $p$ aus, so kann man versuchen, aus dieser die genaue Potenz von $p$ zu bestimmen, die in der Diskriminante enthalten ist. Ist $p = P_1^{e_1} P_2^{e_2} \ldots P_h^{e_h}$ die

[96] In jeder Zeile stehen dabei die zusammengehörigen Konjugierten.
[97] Es ist klar, daß $D$ ein Teiler von $d_x$ ist.
[98] Vgl. hierzu den Abschnitt "Die Nachfolge Kummers - Kronecker, Dedekind, Selling" in 1.2.2.
[99] Dieser Satz stammt von Dedekind, der ihn am 20.9. 1871 ohne Beweis in den *Göttingischen gelehrten Anzeigen* veröffentlichte [Dedekind, 1871a, 1489] und in [Dedekind, 1882] bewies.
[100] Dies geschah in einem Vortrag, in dem er zugunsten seiner neuen Theorie stark mit der Analogie zur Theorie der algebraischen Funktionen argumentierte, in welcher der Begriff geläufig ist. Vgl. 4.2.3 und den Abdruck des Vortrags [34, 1899].

Zerlegung und ist keiner der Exponenten durch $p$ teilbar, so ist hierfür eine Formel bekannt.[101]
Ist andererseits eines der $e_i$ durch $p$ teilbar, so spricht man von *wilder Verzweigung*.[102] In diesem Fall liefert die Formel einen echt zu kleinen Wert.
Das Problem der wilden Verzweigung besteht darin, den (betroffenen) Primdivisoren $P_i$ genauere Bestimmungsstücke zuzuordnen, um wiederum zu einer Formel für den Exponenten von $p$ in der Diskriminante zu kommen.[103]

Schließlich ging es Hensel noch um das Verhalten der Diskriminante bei Komposition: Es sind zwei Körpererweiterungen gegeben und man möchte aus den beiden Diskriminanten die Diskriminante des Kompositums berechnen. (Konkrete Ansätze für dieses Problem fand Hensel jedoch nur in Spezialfällen.)

### Das zentrale mathematische Objekt

Zu einem beliebigen linear unabhängigen System von $n$ (ggf. nur lokal) ganzen Elementen betrachtete Hensel die bei der Berechnung der Diskriminante bereits eingeführte Matrix $H$, die aus den Elementen und ihren Konjugierten aufgebaut ist.
Diese Matrix ist der Motor für das Neue, an ihr entzündete sich Hensels Phantasie. Er führte Begriffe für die Situationen ein, in denen er die zugehörige Determinante schon verstand, ersetzte die Elemente durch ihre Reihenentwicklungen, suchte nach speziellen Blockdiagonalgestalten und fand Algorithmen, die auf diese führten.[104]

### Analogien

Zwei Analogien spielten in Hensels Arbeiten eine wesentliche Rolle. Einmal war dies die bekannte Analogie zwischen algebraischen Zahlen und algebraischen Funktionen einer Variablen. Die zugehörigen Theorien waren z.B. beide Spezialfälle von Kroneckers Theorie der *Grundzüge* gewesen.[105] Hensel nutzte diese Analogie zum einen als rhetorisches Argument für seine arithmetischen Potenzreihen,[106] zum anderen inspirierte sie ihn aber auch dazu, seine Ideen für die algebraischen Zahlen auf den Fall der algebraischen Funktionen einer Variablen zu übertragen.[107]
Eine weitere zentrale Analogie ist diejenige zwischen den neuen $p$-adischen Zahlen und den reellen Zahlen. Hensel hatte bemerkt, daß die eindeutige Zerlegung eines irreduziblen Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten für den Bereich von $p$ analog zur eindeutigen Zerlegung dieses Polynoms mit reellen Koeffizienten

[101] In der Formel kommen noch die Grade $f_i$ der Primdivisoren vor. Dann gilt $\sum_i e_i f_i = n$ und der Exponent von $p$ in der Diskriminante ist $\sum_i (e_i - 1.) f_i$. Diese Formel war unvollständig in [Kronecker, 1882] bewiesen worden; ein Beweis, den Hensel wahrscheinlich in einer seiner unveröffentlichten Habilitationsarbeiten, in jedem Fall aber in [13, 1894], vervollständigte. Dedekind hätte diese Formel leicht ableiten können, wenn er an ihr Interesse gehabt hätte, vgl. [Dedekind, 1882, 393].
[102] Dieser heute aktuelle Ausdruck wird hier zur Abkürzung benutzt, obwohl er weder von Hensel noch von seinen Zeitgenossen benutzt wurde.
[103] Hensel sprach von der "Bestimmung der Körperdiskriminante", Brief Hensels an Weber vom 23.11.1897.
[104] Entsprechend häufig taucht dieses Objekt in Hensels Untersuchungen auf. Eine wichtige Rolle spielt es in den Abschnitten 2.5.2, 3.2.2, 3.4.1, 4.2.4, 4.3.2, 4.4.3 und 5.3.1. Vgl. auch die Erläuterungen in 4.1.1.
[105] [Kronecker, 1882].
[106] Vgl. 4.2.3 und 4.2.4.
[107] Vgl. die veröffentlichte Umsetzung im Fall der algebraischen Funktionen in 4.3.2 und anschließend für algebraische Zahlen in 4.4.3.

ist.[108] Daher orientierte er sich bei der formalen Definition der $p$-adischen Zahlen in den anschließenden Veröffentlichungen an der in Berlin üblichen Definitionsweise für die reellen Zahlen.[109]

### 1.2.2 Akteure im Umfeld von Theorien algebraischer Zahlen

Gemeint sind hierbei Theorien ggf. spezieller Zahlkörper, in denen modern gesprochen Primideale im Ring der ganzen Zahlen, zeitgenössisch also auch "ideale complexe Zahlen" oder "ideale Primdivisoren" betrachtet bzw. zuvor definiert werden.

Eine erste solche Theorie hatte Ernst Eduard Kummer im Jahr 1847 für den Körper der $p$-ten Einheitswurzeln vorgestellt. Anschließend verallgemeinerte er sie für Körper, die durch Adjunktion einer $k$-ten Wurzel aus einem Körper $p$-ter Einheitswurzeln entstehen.[110]

#### Die Nachfolger Kummers - Kronecker, Dedekind, Selling

Kummer hatte bereits 1859 in einer Abhandlung darauf hingewiesen, daß sein etwas jüngerer Freund Leopold Kronecker eine Verallgemeinerung seiner Theorie der idealen Zahlen auf beliebige Zahlkörper besitze.[111] Zwar kam es nicht zu der angekündigten Veröffentlichung Kroneckers, aber 1865 plante er sie noch, denn mit Bezug auf diese lehnte er ein Manuskript Eduard Sellings für das Berliner Crelle-Journal ab.[112]

Eduard Selling veröffentlichte seine Theorie (für galoissche Zahlkörper), deren Grundideen in 4.2.2 dargestellt werden, daraufhin in einer Wiener Zeitschrift.[113] Obwohl Selling durch eine Vorlesung Dedekinds und Gespräche mit ihm zu seinen Untersuchungen motiviert worden war, erkennt man die bewußten Parallelen zu Kummer, aber nur wenig gedankliche Nähe zu Dedekinds eigener Theorie.

Richard Dedekind arbeitete bereits seit Ende der 1856 an einer Verallgemeinerung von Kummers Theorie auf allgemeine Zahlkörper.[114] Allerdings veröffentlichte er erst seine zweite Theorie [Dedekind, 1871], weil er in der ersten die gaDT extra behandeln mußte.[115] Wie er diesen Ausnahmefall behandeln wollte, ist weder veröffentlicht noch im Nachlaß enthalten,[116] aber in der Rezension eines Lehrbuchs zur Theorie der Kreisteilung merkte er an, man könne (in diesem konreten Fall) auch die Zerlegung der definierenden Gleichung "in bezug auf beliebig hohe Potenzen von $q$" benutzen.[117]

Die gaDT, die Hensels Dissertationsthema wurden, sind für die Entstehung von Dedekinds bzw. Kroneckers Theorie der algebraischen Zahlen verschieden wichtig gewesen. Glaubt man Kronecker, so hatte er bereits 1858 einen Periodenunterkörper des Körpers der 13. Einheitswurzeln betrachtet, in dem ein gemeinsamer außerwesentlicher Diskrimininantenteiler auftritt.[118] Dieses Phänomen beeinflußte seinen Zugang zur

[108] Vgl. 5.2.1. Die Zerlegung in reelle Faktoren ersten und zweiten Grades ist eine Formulierung des Fundamentalsatzes der Algebra.
[109] Vgl. 5.4 und das Ende von 1.2.2.
[110] [Kummer, 1847] und [Kummer, 1859].
[111] [Kummer, 1859, 737].
[112] Daß Selling eine solche Veröffentlichung wünschte, weiß man, weil Selling die Ablehnung Kroneckers an Dedekind schickte. Dieser bewahrte eine Abschrift auf, die sich in seinem Nachlaß befindet.
[113] [Selling, 1865].
[114] [Haubrich, 1992, 128].
[115] [Dedekind, 1878, 202].
[116] Vgl. [Haubrich, 1992, 174].
[117] Es handelt sich um [Bachmann, 1872] bzw. [Dedekind, 1873, 418].
[118] Vgl. [Kronecker, 1882, 384]. Im Fall der dreigliedrigen Perioden ist jede Elementdiskriminante durch drei teilbar, während drei offenbar kein Teiler der Diskriminante des Körpers ist.

arithmetischen Theorie der algebraischen Zahlen jedoch anscheinend nicht wesentlich.

Anders ist es mit Dedekind, der "viele Beweisversuche" für die Aussage unternahm, daß es keine gaDT gibt.[119] Nachdem er ihnen eine Sonderstellung in seiner (nicht überlieferten) ersten Theorie geben mußte, hielt er anschließend seine Theorie der Ideale gerade aufgrund des Vorkommens der gaDT für notwendig.[120]

Dedekind schrieb an Heinrich Weber, Kronecker sei noch 1880 "ganz im Unklaren über das *Wesen* dieser Erscheinung" gewesen, was man in den Grundzügen jedoch nicht mehr bemerken würde.[121]

Unstrittig sollte jedoch sein, daß Kronecker das Phänomen bemerkt hatte, denn in seiner von 1862 stammenden Arbeit *Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln* bewies er, daß es in diesem Fall keine gaDT gibt.[122]

**Die Situation in den 1880er Jahren: Dedekind versus Kronecker**

Ab 1882 gab es zwei konkurrierende Theoriemodelle für die gemeinsame Behandlung der algebraischen Zahlen und der algebraischen Funktionen einer Variablen:

Einerseits war dies die auf dem sehr allgemeinen, mengentheoretischen Idealbegriff beruhende Idealtheorie Dedekinds. Für die algebraischen Zahlen maßgeblich ist dabei die erste Darstellung der Theorie im Anhang von Dirichlets Zahlentheorie [Dedekind, 1871], sowie die Abhandlung *Ueber die Discriminante endlicher Körper*.[123] Den Fall der algebraischen Funktionen behandelte Dedekind gemeinsam mit Heinrich Weber in der Abhandlung *Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen*, die bereits 1880 abgeschlossen war, aber erst 1882 publiziert wurde.[124]

Andererseits führte Kronecker einen ebenfalls sehr allgemeinen, aber mehr kalkülorientierten Formenbegriff (nebst Operationen) ein, mit dessen Hilfe er in den aus Anlaß von Kummers fünfzigjährigem Doktorjubiläum entstandenen *Grundzüge[n] einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen* eine allgemeine Theorie entwarf, die die Theorie der algebraischen Zahlen ebenso wie die Theorie der Funktionen einer Variablen als Spezialfäll umfaßte.

Die Unterschiede in den methodischen Ansichten Dedekinds und Kroneckers haben Edwards, Neumann und Purkert auf die griffige Formel gebracht:

> Was für Dedekind "formal" war, war "konkret" für Kronecker, namentlich das Rechnen mit Formen; was für Dedekind "konkret" war, war "abstrakt" für Kronecker, besonders Dedekinds Ideale.[125]

[119] Brief Dedekinds an Marie Henle vom 9.4.1859, zitiert nach [Haubrich, 1992, 173].

[120] Gäbe es keine gemeinsamen außerwesentlichen Diskriminantenteiler, so könnte man die Primidealzerlegung jeder rationalen Primzahl aus der Minimalgleichung eines geeignet gewählten Erzeugers der Körpererweiterung gewinnen bzw. auch so definieren.

[121] Brief Dedekinds an Weber vom 20.02.1887, zitiert nach [Edwards/Neumann/Purkert, 1982, 79], Hervorhebung B.P.

[122] Die Arbeit wurde am 16.1.1862 vor der Berliner Akademie vorgetragen, erschien aber erst 1881, vgl. [Kronecker, 1881].

[123] [Dedekind, 1882].

[124] [Dedekind/Weber, 1882]. Kronecker war Herausgeber des Crelle-Journals. Es war mit Dedekind und Weber abgesprochen, daß die alte Abhandlung [Kronecker, 1881] zur Theorie der algebraischen Funktionen zuvor gedruckt werden würde. Ob sich diese Absprache auch auf die deutlich umfangreicheren *Grundzügen* [Kronecker, 1882] bezog, ist ungeklärt. Vgl. [Ullrich, 1998, 167f] und die dort zitierten Brief- und Textstellen Dedekinds.

[125] [Edwards/Neumann/Purkert, 1982, 53], wo diese Ansicht z.T. erläutert, z.T belegt wird.

### Nach Kroneckers Tod: Hurwitz und Hilbert

Etwa ab 1893 arbeiteten sich Hilbert und Hurwitz in Königsberg gemeinsam in die Ansätze zur arithmetischen Theorie der algebraischen Zahlen ein. Wie Otto Blumenthal sich erinnerte, erzählte Hilbert über die betreffenden Spaziergänge mit Hurwitz:

> Einer nahm den Kroneckerschen Beweis für die eindeutige Zerlegung in Primideale vor, der andere den Dedekindschen, und beide fanden wir scheußlich.[126]

Hilberts erstes Resultat zur Theorie der algebraischen Zahlen war dann auch ein vereinfachter Beweis für die eindeutige Zerlegung in Primideale, worüber er 1893 auf der DMV-Tagung in München vortrug.[127] Dort wurde er auch gemeinsam mit Minkowski um einen Bericht über den Stand der Zahlentheorie gebeten.[128]

Anschließend entwickelte Hilbert *Grundzüge einer Theorie des Galois'schen Zahlkörpers*,[129] die Hilbertsche Verzweigungstheorie. Mit dieser Veröffentlichung geriet er in Konflikt zu Dedekind, da ihn dessen vorsichtiger Hinweis, er habe schon weitere Resultate über die Diskriminante bewiesen, nicht von seiner Veröffentlichung abhielt.[130] Dedekind bezog sich in seinem Unwilllen darauf, er habe Hilbert am 30.6.1892 seine Arbeit [Dedekind, 1882] geschickt und extra mit den Worten "Die erwähnte Untersuchung war schon damals mit allen Beweisen aufgeschrieben" auf den Schlußsatz hingewiesen. Dieser Brief befindet sich im Nachlaß Hilbert.

Hurwitz veröffentlichte 1894 eine Arbeit *Über die Theorie der Ideale*,[131] die sogar zum Auslöser einer öffentlichen Polemik mit Dedekind wurde, da Hurwitz (damit näher zu Kroneckers Ansichten neigend) eine Beschränkung auf endlich erzeugte Ideale vorschlug.[132]

1897 erschien Hilberts *Zahlbericht* [Hilbert, 1897], der nicht nur den Stand der Theorie der algebraischen Zahlen referierte, sondern die Resultate in eine einheitliche, architektonisch strukturierte Form goß. Der Bericht bediente sich sowohl bei Dedekind als auch bei Kronecker und wurde zur überragenden Referenzquelle.[133]

### Ein Weggenosse - Georg Landsberg

Georg Landsberg arbeitete spätestens ab 1895 ähnlich wie Hensel an der Übertragung von Konzepten aus der Theorie der algebraischen Funktionen in die Zahlentheorie.[134]

Landsberg hatte 1890 in Breslau promoviert, seine Arbeit führte einen Aspekt von Dedekinds Idealtheorie genauer aus. Am Ende ihrer Einleitung bedauerte er, den inneren Zusammenhang der Dedekindschen

[126] [Blumenthal, 1935, 397]. Da bekannt war, daß Kronecker zahlreiche seiner Resultate mit großer zeitlicher Verzögerung oder gar nicht veröffentlichte, könnte die Beschäftigung mit der Theorie der algebraischen Zahlen durch Kroneckers Tod Ende 1891 motiviert worden sein.

[127] Vgl. [Hilbert, 1894].

[128] Es scheint naheliegend, daß diese Beauftragung von Klein ausging, der damit der Berliner Schule die Deutungshoheit über die Theorie der algebraischen Zahlen nehmen wollte. Es gibt dafür meines Wissens jedoch keine Quellen. Klein und Hilbert kannten sich seit einem Studienbesuch Hilberts bei Klein in Leipzig im Wintersemester 1885/86, [Blumenthal, 1935, 392]. Sie blieben danach in relativ vertrautem Briefwechsel (vgl. [Frei, 1985]), bis Klein ihn 1895 nach Göttingen berief.

[129] [Hilbert, 1894a]

[130] Frobenius kritisierte zusätzlich, die Arbeit sei schlecht geschrieben, vgl. Brief Frobenius an Dedekind vom 24.1.1895.

[131] [Hurwitz, 1894].

[132] Vgl. [Dedekind, 1895] und [Hurwitz, 1895].

[133] Hilbert und Minkowski hatten den Stoff aufgeteilt, der Teil Minkowskis wurde aber nicht beendet. Zur Bedeutung des Zahlberichts vgl. [Lemmermeyer/Schappacher, 1998] und [Schappacher, 2005].

[134] Ein genauerer Vergleich der Herangehensweisen Hensels und Landsbergs wäre lohnend. Hier sei nur auf die Arbeit [Landsberg, 1898] verwiesen.

Theorie mit derjenigen Kroneckers noch nicht verstanden zu haben.[135] Auch um diesem Mißstand abzuhelfen, verbrachte er die nächsten drei Jahre mit "Eigenstudien" in Berlin.[136] 1893 habilitierte er sich mit einer Arbeit über Thetafunktionen in Heidelberg, wo er 1897 Extraordinarius wurde und bis 1904 blieb. Er hielt sich jedoch weiterhin viel in Berlin auf und verfaßte die zweite Hälfte des bekannten Lehrbuchs [Hensel/Landsberg, 1902] über die Theorie der algebraischen Funktionen, in dessen erster Hälfte Hensel die Ergebnisse seiner zahlreichen Veröffentlichungen zu diesem Thema zusammenfaßte.

**Der Nachfolger Kroneckers - Georg Frobenius und Elementarteiler**

Hensel war mit Kroneckers Nachfolger, Georg Frobenius, befreundet.[137] Frobenius hatte in Berlin studiert und promoviert. 1874 wurde er aus dem Schuldienst an der städtischen höheren Bürgerschule Berlins auf Betreiben Weierstraß' ohne vorherige Habilitation auf ein Extraordinariat in Berlin berufen.[138] 1875 wechselte er auf ein Ordinariat am Polytechnikum in Zürich, wo er blieb, bis er 1892 nach Berlin zurückkehrte.

Elementarteiler waren von Weierstraß in den 1860er Jahren im Kontext der Äquivalenz von bilinearen Formen eingeführt worden und Kronecker unterstützte diese Herangehensweise 1874 in einer Kontroverse gegenüber Jordan.[139] Zu dieser Zeit weilte Frobenius noch in Berlin, während er bereits in Zürich war, als er 1879 das technische Konzept der Elementarteiler auf lineare Formen mit ganzen Koeffizienten anwendete.[140]

Kronecker nutzte in den *Grundzügen* das Konzept der Determinantenteiler für seine Definition der Diskriminante einer Ganzheitsbasis mit mehr als $n$ Elementen.[141] Er hielt diese Determinantenteiler für die wesentlichen Invarianten einer Matrix. Die Elementarteiler, die Quotienten der Determinantenteiler sind, waren für ihn nur nachgeordnete Invarianten.[142]

Hensel, der sich in seinen ersten Arbeiten strikt an den *Grundzügen* orientierte, benutzte Elementarteiler in seiner Forschung erst nach dem Kontakt zu Frobenius. 1894 veröffentlichten Hensel und Frobenius beide Erweiterungen von Frobenius Arbeit [Frobenius, 1879].[143] Hensel erweiterte insbesondere Frobenius' Resultat auf allgemeinere Matrixeinträge.

Das von Hensel erhaltene Resultat bildete eine wesentliche Grundlage für Hensels Theorie der algebraischen Funktionen von 1895.[144] Die Elementarteiler verschwanden erst wieder aus Hensels Behandlung der algebraischen Funktionen, nachdem Hensel die Verzweigung, die man aus ihnen bestimmen kann, in Form der Potenzreihenentwicklungen implizit voraussetzte.[145]

[135] [Landsberg, 1890, 4].
[136] Wie es in seinem Heidelberger Lebenslauf heißt, zitiert nach [Drüll, 1986, 155].
[137] Frobenius war 1895 Taufpate für Hensels einzigen Sohn.
[138] Vgl. [Biermann, 1988, 131].
[139] Vgl. dazu [Hawkins, 1977] und die Arbeiten Frédéric Brechenmachers, z.B. [Brechenmacher, 2008].
[140] Es handelt sich um [Frobenius, 1879].
[141] Dabei ist $n$ der Grad der Erweiterung. Eine Ganzheitsbasis mit mehr als $n$ Elementen tritt in den beiden gut verstandenen Spezialfällen der algebraischen Zahlen über $\mathbb{Q}$ und der algebraischen Funktonen einer Variablen über $\mathbb{C}[x]$ nicht auf. Der $k$-te Determinantenteiler ist der ggT aller $k \times k$-Unterdeterminanten einer i.A. rechteckigen Matrix. Im konkreten Fall handelt es sich um die Konjugiertenmatrix.
[142] Vgl. 3.5.2 den Text zu FN 213 und für die Definition den Abschnitt 3.2.2.
[143] Es handelt sich um [Frobenius, 1894] und [17, 1894].
[144] Vgl. 3.2 - 3.4.
[145] Für den zahlentheoretischen Fall sind die Elementarteiler weniger geeignet, da hierbei wilde Verzweigung auftreten kann.

**Der Berliner Konstruktivismus - Karl Weierstraß und Leopold Kronecker**

Es ist bekannt, daß Kronecker gegen Ende der 1880er Jahre an einer radikalen Grundlegung der Mathematik arbeitete, die alle auf dem Zahlbegriff beruhenden Teile der Mathematik nur auf natürliche Zahlen und das Rechnen mit Formen zurückführen wollte. Im Zuge dessen kam es auch zu einem Bruch zwischen Weierstraß und Kronecker.[146]
Demgegenüber wird oft vergessen, daß die etwa 1860 beginnende Zusammenarbeit zwischen Weierstraß und Kronecker ebenfalls auf einer methodischen Grundlage beruhte, die hier als Berliner Konstruktivismus bezeichnet werden soll. (Allgegenwärtig ist der dem entsprechende $\varepsilon - \delta$-Kalkül der Analysis.)

Hier sollen die folgenden beiden Prinzipien als Berliner Konstruktivismus bezeichnet werden:
1. Ein Objekt mit unendlich vielen Bestandteilen (z.B. eine reelle Zahl) ist nur dann wohldefiniert, wenn die Bestandteile einer Vorschrift genügen.[147]
2. Eine Operation, die unendlich viele Schritte erfordert, ist nur dann zulässig, wenn sie mit einer beliebig vorgegebenen Genauigkeit in endlich vielen Schritten durchgeführt werden kann.

Während Hensel eine Orientierung am radikalen Standpunkt Kroneckers zum Teil explizit einforderte, vertrat er den hier *Berliner Konstruktivismus* genannten Standpunkt ganz selbstverständlich und unauffällig.[148]

---

[146] Es ist sehr schwer abschätzbar, inwiefern Kroneckers Äußerungen so absolut und insbesondere abwertend gemeint waren, wie sie z.T. (auch von Cantor) aufgefaßt wurden. Vgl. [Bölling, 1993] und [Cantor, 1991].

[147] Ein gern und auch von Hensel gewähltes Beispiel ist die Zahl $\pi$. Gelegentlich heißt es auch "Gesetz" bzw. "gesetzmäßige Vorschrift".

[148] Zum Beispiel wird oft übersehen, daß die von Hensel definierten $p$-adischen Zahlen streng genommen aus diesem Grund nicht mit den heute üblichen übereinstimmen. Insbesondere zeigen Überlegungen, die ungefähr zu Zeiten Hensels erstmals angestellt wurden, daß es nach den meisten Präzisierungen von *Vorschrift* nur abzählbar viele $p$-adische Zahlen gibt.

# Kapitel 2

# Hensels Einstieg in die Mathematik

Hensel beschäftigte sich ab 1882, angeregt durch einen Hinweis Kroneckers, mit dem Problem der gaDT. Aus dem Jahr 1883 sind Ausarbeitungen von Seminarvorträgen Hensels zu diesem Thema erhalten. Seine Untersuchungen waren spätestens zum Zeitpunkt seiner Habilitation 1886 abgeschlossen. Die Entwicklung seiner Gedanken läßt sich relativ leicht nachvollziehen, auch wenn die technischen Details seiner Untersuchungen nicht überliefert sind: Seine Dissertation wurde nicht veröffentlicht (und ist auch nicht erhalten). Der veröffentlichte Text enthält nur eine Zusammenfassung seiner Ergebnisse und konkrete Rechnungen in einem Spezialfall. Auch die meisten der acht zusammenhängenden Habilitationsarbeiten wurden nicht veröffentlicht: 1887 erschien eine bereits 1884 abgeschlossene Arbeit, weil Kronecker die darin entwickelte Methode begrüßte, auch über ganze algebraische Zahlen modulo eines Primdivisors in Termen von Gattungen und Gattungsbereichen nachzudenken. Zwei weitere dieser Arbeiten veröffentlichte Hensel (vermutlich im Wesentlichen unverändert) 1894, nachdem er im Nachlaß Kroneckers keine entsprechenden Untersuchungen gefunden hatte.
Eine weitere Arbeit, die vermutlich auf die Habilitationsarbeiten aufbaut, wurde 1889 veröffentlicht und wird ebenfalls in diesem Kapitel analysiert. Sie behandelt nicht die zahlentheoretische, sondern die allgemeine Situation und entwirft für diese ganz im Sinne Kroneckers ein Forschungsprogramm. Als ersten Schritt hierfür versuchte Hensel, das Verhalten der Diskriminante bei der Komposition zweier Gattungen zu verstehen. Neben einigen Ideen, die Hensel später noch explizierte bzw. ausbaute, kann man an dieser Arbeit vor allem die spezifischen Schwierigkeiten der allgemeinen Situation erkennen: Hensel erkannte an einigen Stellen nicht, wie sich die allgemeine Situation von der speziellen der Zahlentheorie unterscheidet.

## 2.1 Der Gedankenbogen zu den gaDT

In diesem Abschnitt wird knapp skizziert, wie sich Hensels Herangehensweise an das Problem der gaDT veränderte und wie beim Übergang von einem konkreten zu einem abstrakteren Untersuchungsgegenstand die benötigten begrifflichen Hilfsmittel zunahmen.

Hensels erstes Untersuchungsobjekt sind Periodenunterkörper im Körper der $p$-ten Einheitswurzeln. Da hierbei bekannt ist, daß alle Primzahlen $q \neq p$ nicht in der Diskriminante vorkommen, muß man nur überprüfen, ob alle Elementdiskriminanten die Primzahl $q$ enthalten, um zu entscheiden, ob $q$ gaDT ist. Die ersten Rechnungen stellte Hensel für den Fall $p = 13$ an, da Kronecker sich noch erinnerte, daß hier gaDT auftreten. An die Bestätigung von Kroneckers Erinnerung anschließend, untersuchte Hensel allgemein die Periodenunterkörper 3. und 4. Grades. Hier kann man jeweils explizit (und mit Hilfe Hensel bekannter Techniken bzw. Formeln) die Form der Elementdiskriminante berechnen und anschließend auf ihre Teilbarkeit durch 2 bzw. 3 (die Kandidaten für gaDT in diesem Fall) untersuchen. Wie Hensel selbst anmerkte, ist damit gezeigt, daß das Vorkommen gaDT keine Ausnahme darstellt, allerdings gibt das Ergebnis keinen Hinweis darauf, *warum* die gaDT auftreten.

Hensel richtete seine Aufmerksamkeit nun auf die Determinante, deren Quadrat die Elementdiskriminante ist und konnte damit eine hinreichende Bedingung für gaDT in beliebigen Periodenunterkörpern ableiten. Für jedes ganze Element $x$ eines Periodenunterkörpers ist nämlich eine Potenz $x^{q^k} \equiv x \mod q$ und wenn hierbei $q^k < n - 1$ ist, so sind zwei Spalten der Determinante kongruent modulo $q$ und damit teilt $q$ die Determinante. Ein erster Grund für das Auftreten von gaDT ist also, daß die ersten $n - 1$ Potenzen einer Zahl des gegebenen Periodenunterkörpers nicht inkongruent modulo $q$ sein können.

Um zu einer notwendigen Bedingung für das Auftreten gaDT zu kommen, wechselte Hensel zur anderen Darstellungsform der Elementdiskriminante: $D = \prod(x_i - x_j)$.[1] Dieses Produkt kann durch $q$ teilbar sein, ohne daß einer der Faktoren durch $q$ teilbar ist. Daher ist es an dieser Stelle naheliegend, auch (ideale) Primteiler $q(\xi)$ von $q$ zu berücksichtigen, denn durch $q(\xi)$ kann $D$ nur teilbar sein, wenn einer der Faktoren es ist. Man muß dabei nur einen solchen Primteiler betrachten, denn ist $D$ durch $q(\xi)$ teilbar ist, so muß es als ganze Zahl auch durch $q$ teilbar sein. Sind also zwei der Konjugierten kongruent modulo $q(\xi)$, so ist die Elementdiskriminante durch $q$ teilbar. Dieser Fall muß eintreten, wenn es weniger inkongruente Zahlen modulo $q(\xi)$ gibt, als Konjugierte benötigt werden. Damit hatte Hensel einen weiteren Grund für das Auftreten gaDT isoliert: Es gibt zu wenig inkongruente Zahlen modulo $q(\xi)$.

Hensel hoffte zunächst, wenn es genug verschiedene Reste modulo $q(\xi)$ gibt, könne er auch ein Element konstruieren, dessen Konjugierte paarweise verschiedene Reste modulo $q(\xi)$ haben. In seinem Tagebuch gibt es zwei Beweisversuche zu dieser Aussage.[2]
Anschließend bemerkte er jedoch, daß jeweils Gruppen von Resten modulo $q(\xi)$ durch einen von ihnen mitbestimmt waren. In eine solche Gruppe gehörten diejenigen Konjugierten, die auch noch über dem Periodenunterkörper konjugiert waren, aus dessen Perioden der Primdivisor zusammengesetzt war. Damit gliederte sich die Frage der außerwesentlichen Diskriminantenteiler in zwei Teilfragen auf: *Sind die Reste einer Gruppe untereinander inkongruent?* und *Sind die Reste verschiedener Gruppen untereinander inkongruent?* Es kann nun weniger Möglichkeiten geben, die erste Bedingung zu erfüllen, als benötigt werden, damit auch die zweite Bedingung erfüllt ist und damit ist $q$ gaDT. Die erste Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn die Zahl wirklich in der betrachteten Gattung, also in keinem der Unterkörper des betrachteten Periodenunterkörpers liegt.

[1] Dabei bezeichnen die $x_i$ die verschiedenen Konjugierten des Elements $x$.
[2] Aus dem zweiten kann man die richtige Aussage schon beinahe ablesen.

Die so entstandene Theorie der gaDT in Periodenunterkörpern versuchte Hensel zunächst auf den Fall einer galoisschen Erweiterung $K|\mathbb{Q}$, deren Diskriminante $q$ nicht enthält, zu übertragen. Dazu führte er (modern ausgedrückt) den Zerlegungskörper $Z$ des Divisors $q(\xi)$ ein. Mit diesem verband er zwei Aussagen: Zum einen bestimmt der Grad $k = [K : Z]$ die Kardinalität $q^k$ eines vollständigen Restsystems modulo $q(\xi)$, zum anderen hängen die Reste von jeweils den $k$ Konjugierten zusammen, die auch über $Z$ konjugiert sind.

Hensel entwickelte im Anschluß eine Klassifikation modulo $q(\xi)$, um zu entscheiden, wann die zusammenhängenden Konjugierten inkongruent sind. (Diese Klassifikation ist analog zur entsprechenden Klassifikation in der "Theorie der höheren Kongruenzen", also der endlichen Körper.[3]) Die von ihm eingeführte Ordnung eines Elements modulo $q(\xi)$ gibt an, welchen Grad eine irreduzible Kongruenz (mit ganzzahligen Koeffizienten) hat, die es modulo $q(\xi)$ erfüllt. Die maximale Ordnung eines Elements ist $k$, die Ordnung jedes Elements ist ein Teiler $k_1$ von $k$ und die Anzahl der Elemente der Ordnung $k_1$ hängt nur von $k_1$ ab und ist insbesondere größer als Null.
Die $k$ zusammengehörigen Konjugierten sind genau dann paarweise inkongruent modulo $q(\xi)$, wenn sie die Ordnung $k$ haben. Insbesondere wird $q$ stets dann gaDT sein, wenn die Anzahl aller Reste modulo $q(\xi)$, die die Ordnung $k$ haben, geringer ist als die Anzahl $n$ der benötigten Konjugierten.

Anschließend versuchte Hensel, seine Ergebnisse auch auf den Fall einer nicht-galoisschen Erweiterung $K_1|\mathbb{Q}$ zu übertragen, deren Diskriminante $q$ nicht enthält. Dazu betrachtete er einen Primdivisor $q(\xi)$ von $q$ in der galoisschen Hülle $K$ und dessen Zerlegungskörper $Z$. Der Zerlegungskörper soll jetzt für jeden der konjugierten Körper $K_i$ dasselbe leisten, wie im galoisschen Fall: Der Grad $k_i = [K_iZ : Z]$ bestimmt die Anzahl $q^{k_i}$ der inkongruenten ganzen Zahlen modulo $q(\xi)$ in $K_i$ und es hängen jeweils die $k_i$ Konjugierten zusammen, die auch über $Z$ konjugiert sind.[4] Damit ist die Ordnung eines Elements aus $K_i$ ein Teiler von $k_i$ und die zusammenhängenden $k_i$ Konjugierten sind genau dann paarweise inkongruent, wenn diese Ordnung genau $k_i$ ist.
Auch hieraus erhielt Hensel eine hinreichende Bedingung dafür, daß $q$ gaDT ist, nämlich, daß es für einen Wert von $k_i$ nicht so viele Elemente der Ordung $k_i$ gibt, wie insgesamt Konjugierte in Gruppen mit $k_i$ Elementen vorkommen.

Hensel suchte weiterhin nach einer Darstellung seines Ergebnisses, in der kein spezieller Primdivisor mehr vorkommt. Dazu leitete er aus jeder Gruppe von Konjugierten, deren Reste modulo $q(\xi)$ zusammenhängen, einen Faktor in der Zerlegung des Minimalpolynoms von $x$ modulo $q$ ab. Sind die Konjugierten einer Gruppe nicht paarweise inkongruent, so ist der Faktor nicht irreduzibel; sind die Konjugierten verschiedener Gruppen nicht inkongruent, so sind zwei der Faktoren kongruent modulo $q$. Ist also $q$ ein Teiler der Diskriminante, so erfüllt $x$ eine Kongruenz niedrigeren als $n$-ten Grades modulo $q$.

[3] Vgl. z.B. [Dedekind, 1857], [Serret, 1866] etc.
[4] Es wird sich zeigen, daß dies im Allgemeinen falsch ist.

Kroneckers Theorie der Fundamentalgleichung[5] lieferte Hensel eine Aussage über die benötigten Faktoren, so daß gar keine Arbeit mit den Primdivisoren mehr erforderlich war. Hensel zeigte zunächst,[6] daß die Fundamentalgleichung (modulo $q$ gelesen) die Kongruenz minimalen Grades ist, der die Fundamentalform für den Modul $q$ genügt. Aus Hensels Beweis folgt unmittelbar eine Entsprechung zwischen den Faktoren der Zerlegung der Fundamentalgleichung modulo $q$ und den Primdivisoren von $q$, bei deren Beweis Kronecker noch einige Ausnahmefälle hatte ausschließen müssen. Einem Primdivisor, dessen vollständiges Restsystem $q^k$ Elemente enthält, entspricht dabei ein Faktor $k$-ten Grades, so daß diese Theorie auch mit Hensels obiger Theorie kompatibel ist.
Aus der Zerlegung der Fundamentalgleichung modulo $q$ ergibt sich eine Zerlegung des Minimalpolynoms eines Elements $x$ und sind diese Faktoren irreduzibel und paarweise verschieden, so ist $q$ nicht in der Diskriminante enthalten. Umgekehrt können diese Faktoren aber nicht irreduzibel und verschieden sein, wenn die Anzahl der modulo $q$ irreduziblen Funktionen eines der auftretenden Grade geringer ist als die benötigte, die man aus der Zerlegung der Fundamentalgleichung ablesen kann. In diesem Fall ist also $q$ stets gaDT.
In dieser letzteren Form gilt das Resultat aber auch im allgemeinen Fall, in dem $p$ in der Diskriminante des Zahlkörpers vorkommen darf. Auch hier ist nämlich $p$ außerwesentlicher Diskriminantenteiler, wenn $x$ eine Kongruenz niederigeren als $n$-ten Grades modulo $p$ erfüllt.

Daraus, daß die Fundamentalgleichung die Kongruenz niedrigsten Grades ist, die die Fundamentalform modulo $p$ erfüllt, läßt sich direkt folgern, daß der Zahlteiler der Diskriminantenform der Fundamentalgleichung und die Diskriminante des Zahlkörpers die gleiche Potenz von $p$ enthalten und daraus ergibt sich ein weiterer von Hensel formulierter Grund für das Auftreten gaDT: Die primitive Form, die entsteht, wenn man die Diskriminantenform durch ihren Zahlteiler teilt, kann für alle Belegungen mit ganzen Zahlen durch $p$ teilbar sein.
An dieses Faktum schloß Hensel eine weitere schon von Kronecker angeregte Untersuchung an, nämlich die der Frage, welche algebraischen Zahlen man in diese Form einsetzen kann, damit nicht alle sich ergebenden Zahlen durch einen Primdivisor von $p$ teilbar sind.

## 2.2 Die Dissertation

### 2.2.1 Quellen und Einschätzungen

Hensels Dissertation trägt den Titel *Arithmetische Untersuchungen über Discriminanten und ihre ausserwesentlichen Theiler.* Der Separatdruck enthält (neben disputierten Thesen und einem lateinischen Lebenslauf) eine zwölfseitige Einleitung und 18 Seiten Rechnungen. Die Einleitung zeichnet den Weg von einer sehr speziellen Fragestellung innerhalb der Theorie der 13. Einheitswurzeln zur allgemeinen Theorie nach und nennt die jeweiligen Ergebnisse. Hensel äußerte sich zum Verhältnis zwischen diesem

[5] Vgl. [Kronecker, 1882, §§ 24 u. 25], insbesondere die Anwendung auf den zahlentheoretischen Teil ab S.382. Die Fundamentalgleichung ist die Minimalgleichung der Form, die genau alle ganzen algebraischen Zahlen darstellt.
[6] Diese Untersuchungen sind unabhängig davon, ob $q$ in der Diskriminante vorkommt oder nicht.

Separatdruck und der eigentlichen Arbeit folgendermaßen:

> Ich schließe hiermit diese vorläufige Veröffentlichung ab, in welcher nur eine Übersicht des Inhalts meiner der Facultät eingereichten Dissertation, sowie die nähere Entwicklung der auf die Theorie der Kreistheilungsgleichungen bezüglichen Resultate gegeben werden sollte. Die vollständige Veröffentlichung soll baldmöglichst erfolgen.[7]

Es kam nicht zu der angekündigten Veröffentlichung. Ein Grund mag gewesen sein, daß die Ergebnisse Spezialfälle von späteren Ergebnissen Hensels sind.[8]

Eine Vorstellung von der eingereichten Arbeit vermittelt Kroneckers Gutachten:

> Ich habe die außerordentlich umfangreiche Arbeit, [die] - ihrem bei weitem größten Theile nach - schrittweise dem Herrn Dekan eingereicht worden ist, mehrere Monate lang zur Vorprüfung bei mir gehabt und Zeit und Sorgfalt auf eine genaue, ins Einzelne gehende Durchsicht verwendet. Dabei habe ich mancherlei zu bemerken gefunden und an den betreffenden Stellen mit Bleistift Notizen gemacht, welche vor dem Abdruck zu berücksichtigen sein werden. Aber durch diese einzelnen Ausstellungen wird das günstige Urteil, welches ich mir über die Arbeit in ihrer Gesamtheit gebildet habe, in keiner Weise alterirt.[9]

Da diese handschriftliche Arbeit Hensels nicht erhalten ist, wird die Aufgabe im folgenden sein, anhand der veröffentlichten Ergebnisse Rückschlüsse auf die Arbeit zu ziehen. Wichtige Anhaltspunkte für die Ausgangspunkte seiner Verallgemeinerungen liefern dabei sowohl sein mathematisches Tagebuch, als auch Ausarbeitungen von Seminarvorträgen, die Hensel im Sommersemester 1883 in Berlin gehalten hat. Dabei gibt es eine Ausarbeitung, die auf den 23.5. 1883 datiert ist, sowie eine weitere, die auf einem Umschlag von fremder Hand die Daten 6.6. und 1.8. 1883 trägt, der Hensel jedoch den Untertitel *Auszug aus 3 Seminarvorträgen* gegeben hat. Es ist also davon auszugehen, daß Hensel an den drei genannten Daten über seine Untersuchungen vorgetragen hat und die umfangreichere Ausarbeitung erst nachträglich angefertigt wurde.

Kroneckers Urteil über die Arbeit ist im Wesentlichen positiv:

> Als eine Doctordissertation ist die Abhandlung des Hrn. Hensel, nach meinem Urtheil, eine *hervorragende* Arbeit, ein Zeugniß von Forschergeist und Forscherkraft, von mathematischem Talent und mathematischer Bildung.[10]

Die nachträgliche Einschätzung Hasses erscheint mir hingegen übertrieben:

> Hensel gehört zu denjenigen großen Mathematikern, die gleich durch ihre Erstlingsarbeit, die Dissertation, Aufsehen erregt und sich einen Namen verschafft haben.[11]

Hensels Arbeit schließt direkt an die Begriffsbildungen von Kroneckers Grundzügen an, wie er selbst folgendermaßen formulierte:

> Da für die in dieser Arbeit angestellten Untersuchungen diejenige Behandlung der Theorie der algebraischen Zahlen als Ausgangspunkt gewählt ist, welche Herr Professor Kronecker in seiner Festschrift gegeben hat, so ist es erklärlich, dass diese Schrift in sehr ausgedehntem Maasse benutzt worden ist. Jeder Einsichtige wird mit Leichtigkeit erkennen, wie eng alle hier abgeleiteten Resultate mit jenem Werke zusammenhängen.[12]

[7] [1, 1884, 30].
[8] Allerdings wurden auch die (späteren) Habilitationsergebnisse nicht 1886 veröffentlicht.
[9] Zitiert nach [Biermann, 1988, 295f].
[10] Zitiert nach [Biermann, 1988, 295f]
[11] [Hasse, 1950, 6], es ist nicht klar, wer außer Kronecker und Netto (der die Besprechung für das *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* geschrieben hat), diese Arbeit bemerkt haben soll.
[12] [1, 1884, 12]. Gemeint ist [Kronecker, 1882].

Hensel wußte von der Arbeit Dedekinds, die sich mit dem Phänomen der gaDT beschäftigt, es scheint aber, als habe er dies ebenfalls Kroneckers Grundzügen verdankt, während er die Arbeit selbst nicht gut kannte.[13] Er schrieb nämlich, daß "das vereinzelte Vorhandensein dieser Theiler nach der bisherigen Auffassung als eine Anomalie erschien", wohingegen er "das Auftreten dieser ausserwesentlichen Factoren als an eine äusserst einfache und sehr häufig erfüllte Bedingung geknüpft erwiesen habe."[14] Dedekind hatte hingegen schon in der erwähnten Arbeit behauptet:

> Durch dieses Beispiel, welchem man **viele andere** an die Seite stellen könnte, ist außer Zweifel gesetzt, daß es Körper $\Omega$ gibt, in welchen die Indizes aller ganzen Zahlen durch eine und dieselbe Primzahl $p$ teilbar sind.[15]

Hensels Rechnungen beruhen auf Formeln, die auf Kummer zurückgehen und die er aus Bachmanns Lehrbuch *Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie* kannte.[16]
Es erscheint wahrscheinlich, daß die folgende Forderung an eine mathematische Theorie

> [E]s ist somit für eine wirklich erschöpfende Behandlung des Problemes durchaus nothwendig, den Resultaten den Charakter des Ueberraschenden, Unvorhergesehenen zu nehmen, und sie als einfache, leicht erkennbare Folgerungen, aus klaren und allgemeinen Sätzen erscheinen zu lassen.[17]

an der konkreten Stelle aus dem nachträglichen Gefühl Hensels resultiert, er habe zum entsprechenden Zeitpunkt noch nicht genug verstanden gehabt: Im ausführlichen Teil der Dissertation kommen gar keine Primdivisoren von $p$ vor, man würde aber den Grund für das Vorkommen eines gemeinsamen außerwesentlichen Diskriminantenteilers mit Hilfe eines solchen Primdivisors formulieren.[18]

### 2.2.2 Theorie der Periodenunterkörper - nach Tagebuch und Vorträgen

Der Beginn der Einleitung der Dissertation schildert, wie sich Hensels Problemstellung verallgemeinerte und die Herangehensweise komplizierte. Sein mathematisches Tagebuch ermöglicht es, die verschiedenen Phasen, die im Text der Dissertation nur noch genannt werden, zu präzisieren und insbesondere zu datieren. Besonders für Hensels Versuche, seine Theorie auf den Fall galoisscher Gattungen zu verallgemeinern, geben die erhaltenen Ausarbeitungen seiner Seminarvorträge wichtige Hinweise.
Die von Gauss 1801 eingeführten Perioden bilden eine Unterstruktur im Körper der $\nu$-ten Einheitswurzeln.[19] Die genaue Situation ist folgende: Es ist $\nu$ prim, $\nu = \lambda\mu + 1$, $\omega$ eine $\nu$-te Einheitswurzel und $g$ eine primitive Kongruenzwurzel von $\nu$.[20] Dann sind die $\mu$-gliedrigen Perioden definiert als

$$\varepsilon_{a+1} = \sum_{\delta=1}^{\mu} \omega^{g^{\delta\lambda+a}} \qquad (a = 0, 1, \ldots, \lambda - 1).$$

[13] [Dedekind, 1878]. Hensel zitierte nämlich ihren Titel mit den Worten "Ich muss mich darauf beschränken, an dieser Stelle auf diese interessanten Abhandlungen des Herrn Dedekind zu verweisen, indem ich mir vorbehalte, an einer anderen Stelle näher auf ihren Inhalt einzugehen." [1, 1884, 1].
[14] [1, 1884, 3].
[15] [Dedekind, 1878, 230], Hervorhebung B.P.
[16] [Bachmann, 1872]. Dieser Bezug ist in der veröffentlichten Dissertation nicht mehr erkennbar. Auf dieses Buch bezügliche Zitate finden sich jedoch in Hensels mathematischem Tagebuch, in dem einige der Rechnungen zu finden sind.
[17] [1, 1884, 25].
[18] Hensel gibt keine explizite Formulierung. Ich habe in der Einleitung formuliert: Es gibt zu wenig inkongruente Zahlen modulo $q(\xi)$, wobei $q(\xi)$ ein (idealer) Primdivisor von $q$ ist.
[19] Er betrachtete sie erstmals in der Sektion VII seiner *Disquisitiones Arithmeticae* und führte dort auch die Bezeichnung "Perioden" ein, [Gauss, 1801].
[20] D.h., daß die ersten $p - 1$ Potenzen von $g$ alle mod $\nu$ inkongruent sind und alle Reste erzeugen.

Der Periodenunterkörper besteht aus den linearen Funktionen dieser Perioden (mit rationalen Koeffizienten).

**Der elementare Teil**

Als elementar wird hier der Teil der Arbeit angesprochen, der nicht auf die Theorie der (idealen) Primdivisoren zurückgreift. Hensels Schilderung beginnt mit den Worten:

> Auf diese Stelle seiner Schrift[21] machte mich mein verehrter Lehrer, Herr Kronecker, aufmerksam, und veranlasste mich, die in der Theorie der dreizehnten Einheitswurzeln auftretenden Gattungen algebraischer Zahlen auf das Vorkommen solcher ausserwesentlicher Theiler zu untersuchen, da die von ihm zu demselben Zwecke früher angestellten Rechnungen sich nicht mehr auffinden liessen.[22]

Die entsprechende Rechnung in Hensels Tagebuch ist nicht datiert, sie ist jedenfalls nach dem 6.2.1882. Für die "viergliedrigen Perioden der dreizehnten Wurzeln" fand er keine gaDT, jedoch ist die Discriminante für eine aus den dreigliedrigen Perioden gebildete Zahl stets durch drei teilbar. Die nächste Frage, die Hensel sich stellte, lautet:

> Wie muß die Primzahl $\nu$ von der Form $3\mu + 1$ oder $4\mu + 1$beschaffen sein, damit die Discriminanten aller derjenigen Gleichungen, welchen eine aus den $\mu$-gliedrigen Perioden der $\nu$ten Einheitswurzeln gebildete ganze algebraische Zahl genügt, stets durch eine der Zahlen 2,3 oder 4 theilbar ist.[23]

In seinem Tagebuch begann Hensel mit dem Fall $\nu = 4\mu + 1$ und zitierte hierfür [Bachmann, 1872]. Anschließend an die Diskussion des Falls $\nu = 3\mu + 1$ stellte er die Aufgabe, die Periodengleichung für die $\mu$-gliedrigen Perioden zu bestimmen. Er benutzte hierfür ein Lehrbuch von Serret[24] und erhielt eine Gleichung, welche "auch von Kummer so hergeleitet wurde."[25]
Für eine weitere Verallgemeinerung "lag es [laut Hensels Dissertation] nahe, nun diejenigen Gattungen ganzer algebraischer Zahlen zu untersuchen, welche durch die $\mu$-gliedrigen Perioden der $\nu$ten Wurzeln der Einheit definirt sind, wenn $\nu$ eine beliebige Primzahl und $\mu$ irgend einen Divisor von $\nu - 1$ bedeutet." Es gelang "mit Hülfe eines sehr einfachen Kunstgriffes einen Satz zu beweisen, der die erwähnte Frage zum Theil entschied, indem er ein sehr allgemeines und im einzelnen Falle leicht festzustellendes Merkmal solcher ausserwesentlichen Theiler sämmtlicher Discriminanten einer Gattung hervortreten liess."[26].
Dazu schrieb Hensel am 27.11.1882 in sein Tagebuch: "Das bis jetzt nur für specielle Fälle gelöste Problem kann ich jetzt ganz allgemein lösen."[27] Er hatte die Determinante, deren Quadrat die Diskriminante ist, betrachtet und er konnte zeigen, daß in einigen Fällen eine der auftretenden Potenzen $w_0^k$ der Zahl $w_0$ modulo $q$ kongruent zu $w_0$ ist. Das Ergebnis formulierte er folgendermaßen:

> Es sei $\nu = \lambda\mu + 1$ eine beliebige Primzahl. Ist dann $q^k$ die niedrigste Potenz einer Primzahl $q$, welche modulo $\nu$ zum Exponenten $\mu$ gehört, so wird $q^k$ in allen Gleichungsdiskriminanten der durch die $\mu$-gliedrigen Perioden der $\nu$-ten Einheitswurzeln constituierten Gattung enthalten sein, wenn die Ungleichung $q^k < \lambda$ erfüllt ist.[28]

[21] [Kronecker, 1882, 384] der Grundzüge, wo Kronecker sich erinnert, 1858 dieses Beispiel gerechnet zu haben.
[22] [1, 1884, 1f].
[23] [1, 1884, 2].
[24] Es könnte sich um die Ausgabe [Serret, 1868] handeln.
[25] [TB, 47].
[26] Beide Zitate [1, 1884, 2f].
[27] [TB, 48].
[28] [1, 1884, 3]. Ich habe hier diese Formulierung gewählt, die leicht aus der im Tagebuch folgt, weil ich auf diese Bezug nehmen werde. Es gehört $q^k$ dann modulo $\nu$ zum Exponenten $\mu$, wenn $\mu$ die minimale ganze Zahl ist, für die $q^{k^\mu} \equiv 1 \bmod \nu$ gilt.

Die von Hensel (im Tagebuch) benutzten Formulierungen suggerieren, daß er zunächst annahm, die so gefundene Bedingung für gaDT sei auch notwendig, auch wenn er dies nicht explizit formulierte. Aber er demonstriert die Rechnung für $\nu = 227 = 2 \cdot 113 + 1$ und resumiert "Also die Discr. hat keinen Theiler."[29]

### Berücksichtigung der Primdivisoren

Die bisher benutzten elementaren Methoden ermöglichten es jedoch nicht, diese Notwendigkeit zu zeigen bzw. zu entscheiden und hier war es Kronecker, der den entscheidenden Tip gab:

> Erst dann, als ich mich, einer Aufforderung meines verehrten Lehrers folgend, entschloss, diesselbe Frage für einen der betreffenden Gattung angehörigen Primtheiler von $q$ zu untersuchen, gelang es die gestellte Frage vollständig und allgemein zu lösen; und merkwürdiger Weise ergab sich aus dem erlangten Resultate, dass die oben angegebenen Bedingungen für das Auftreten solcher ausserwesentlichen Factoren nicht die nothwendigen und hinreichenden sind, sondern dass $q$ in gewissen Fällen auch dann als beständiger ausserwesentlicher Theiler auftritt, wenn $q^k \geq \lambda$ ist.[30]

In seiner Dissertation kam Hensel unmittelbar im Anschluß auf die Verallgemeinerungen im Fall beliebiger ganzzahliger Gleichungen zu sprechen, die Eintragungen in seinem Tagebuch ermöglichen es aber, das "merkwürdiger Weise" noch etwas zu präzisieren.
Hensel führte nämlich die (idealen) Primdivisoren ein, um die Notwendigkeit der obigen Bedingung zu zeigen. Am 14.4.1883 begann er eine Tagebuchnotiz mit dem Titel *Allgemeine Untersuchung über die außerwesentlichen Theiler der Discriminante Galoisscher Gleichungen.* Im Anschluß an eine nochmalige Herleitung seiner hinreichenden Bedingung schrieb Hensel darin:

> Um nun auch nachzuweisen, daß dieselben Bedingungen nothwendig sind, ist ein tieferes Eingehen in die Theorie der idealen Zahlen, oder auch besser der Divisorensysteme nothwendig. Mit Hilfe der dann sich ergebenden Resultate wird es aber dann möglich, ganz allgemein die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen aufzustellen, damit die Discriminante aller aus den Wurzeln einer vorgelegten Galoisschen Gleichung gebildeten algebraischen Zahlen durch eine Primzahl $q$ theilbar sei. Zuerst soll jedoch das angedeutete Verfahren an dem Beispiel der Kreistheilungsgleichungen durchgeführt werden, und dann der ganz allgemeine Fall kurz ausgeführt werden.[31]

Sei also wieder $\nu = \lambda\mu + 1$ und werde die Periodengattung der $\lambda$ $\mu$-gliedrigen Perioden $\xi_0, \dots, \xi_{\lambda-1}$ betrachtet. Ist $k$ minimal mit $q^{k^\mu} \equiv 1 \mod \nu$, so hat $q$ gerade $\frac{\lambda}{k}$ Primdivisoren. Hensel wählte einen solchen Primdivisor $q(\xi_0)$, für den es $q^k$ inkongruente Elemente gibt.[32] Ist $w_0 = u_0\xi_0 + \cdots + u_{\lambda-1}\xi_{\lambda-1}$ mit $u_i \in \mathbb{Z}$ ein ganzes Element dieser Periodengattung, so betrachtete er jetzt wieder $D = \prod(w_i - w_j)$ mod $q(\xi_0)$, wobei die $w_i$ die Konjugierten von $w_0$ sind. Da $D$ eine ganze Zahl ist, ist sie durch $q$ teilbar, wenn sie durch $q(\xi)$ teilbar ist. Dieses Argument formulierte Hensel in der Einleitung der Dissertation (für den allgemeineren Fall) folgendermaßen:

> Diese Veränderung des Moduls war offenbar für das nachher abzuleitende Resultat aus dem Grunde ganz unwesentlich, weil dort nur reelle ganze Zahlen modulo $q$ zu untersuchen waren.[33]

[29] [TB, 51].
[30] [1, 1884, 3].
[31] [TB, 53].
[32] Aus seiner Formulierung geht nicht hervor, daß ihm bewußt ist, daß dieser Primfaktor ideal sein kann.
[33] [1, 1884, 3].

$D$ ist damit genau dann nicht durch $q$ teilbar, wenn keiner der Faktoren $w_i - w_j$ durch $q(\xi)$ teilbar ist, also nicht zwei der Konjugierten kongruent modulo $q(\xi)$ sind. Das ist sicher unmöglich, wenn $q^k < \lambda$ ist, womit Hensel einen Grund für seinen obigen Satz gefunden hatte. Eine Beweisstrategie formulierte Hensel folgendermaßen:

> Um die Nothwendigkeit zu erweisen, müßte man jetzt zeigen, daß wenn $q^k > \lambda$ ist, die ganzen Zahlen $u_0, u_1 \dots u_{\lambda-1}$ stets so gewählt werden können, daß alle conjugirten Zahlen $w_0 w_1 \dots w_{\lambda-1}$ einander nach dem Modul $q(\xi_0)$ incongruent sind.[34]

Hensel nutzte nun "einen von Prof. K. im Wintersemester 1881/82 gegebenen Beweis"[35], um die Existenz eines Fundamentalsystems für die durch $q(\xi_0)$ teilbaren Zahlen zu zeigen, d.h. von Zahlen $z_0, \dots, z_{\lambda-1}$, so daß jede durch $q(\xi_0)$ teilbare Zahl in der Form $b_0 z_0 + \cdots + b_{\lambda-1} z_{\lambda-1}$ mit $b_i \in \mathbb{Z}$ dargestellt werden kann. Man kann die $z_i$ (da sie ganz sind) als Linearkombination der Perioden mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ darstellen. Da der Effekt der Konjugationen genau bekannt ist ($\xi_0 \mapsto \xi_i$ bewirkt eine zyklische Vertauschung der Koeffizienten von $w_0$), so kann man jetzt die Bedingung, daß keine Differenz der Konjugierten von $w_0$ durch $q(\xi_0)$ teilbar ist, als eine (ziemlich komplizierte) Bedingung an die $u_i$ formulieren, in der nur ganze Zahlen vorkommen. Hensels Ansatz für dieses Problem besteht darin, durch eine Kombination aus Zeilen- und Spaltenoperationen die Matrix zu diagonalisieren, die die Darstellung der $z_i$ beschreibt ($z = C\xi$), wobei die $z_i$ auch transformiert werden, jedoch weiterhin ein Fundamentalsystem für die durch $q(\xi_0)$ teilbaren Zahlen bilden.

### Die Theorie, die Hensel verallgemeinerte

Mit dem so erhaltenen Ergebnis war Hensel jedoch nicht zufrieden, denn am 25.4.1883 schrieb er

> Der Beweis der Nothwendigkeit ist auf keinen Fall befriedigend, wahrscheinlich sogar auch nicht richtig. Folgender scheint mir gut zu sein.[36]

Bei diesem Neuansatz begann Hensel mit der Konstruktion eines vollständigen Restsystems modulo $q(\xi_0)$. Zunächst behandelte er den Spezialfall $q^\mu \equiv 1 \mod \nu$. Dann ist die Periode $\xi_0$ durch mindestens einen der Primdivisoren von $q$ nicht teilbar, sei dieser $q(\xi_0)$. Jetzt ist $0, \xi_0, 2\xi_0, \dots, (q-1)\xi_0$ ein vollständiges Restsystem modulo $q(\xi_0)$ und man kann (falls $q > \lambda$) die Koeffizienten $u_i$ wie gewünscht bestimmen. Anschließend ging er wieder zum allgemeinen Fall über, in dem erst $q^{k^\mu} \equiv 1 \mod \nu$ ist. Sei dann $\lambda_1 = \frac{\lambda}{k}, \mu_1 = k\mu$ und seien $\xi_i$ die $\lambda_1$ $\mu_1$-gliedrigen Perioden und $\varepsilon_i$ die $\lambda$ $\mu$-gliedrigen Perioden. Der Primdivisor von $q$ ist dann wieder $q(\xi_0)$. Hensel zeigte, daß eine der $k \times k$-Determinanten

$$F_a = \begin{vmatrix} \varepsilon_a & \varepsilon_{\lambda_1+a} & \cdots & \varepsilon_{(k-1)\lambda_1+a} \\ \varepsilon_{\lambda_1+a} & \varepsilon_{2\lambda_1+a} & \cdots & \varepsilon_a \\ \vdots & & & \\ \varepsilon_{(k-1)\lambda_1+a} & \varepsilon_a & \cdots & \varepsilon_{(k-2)\lambda_1+a} \end{vmatrix} \qquad (a = 0, \dots \lambda_1 - 1)$$

[34] [TB, 54].
[35] [TB, 54f].
[36] [TB, 64].

nicht durch $q(\xi_0)$ teilbar ist.[37] Sei dies ohne Einschränkung $F_0$. Dann folgt, “daß man in der folgenden Form

$$a_0\varepsilon_0 + a_1\varepsilon_{\lambda_1} + \cdots + a_{k-1}\varepsilon_{(k-1)\lambda_1} \qquad (a_\alpha = 0, 1, \ldots, q-1)$$

ein vollständiges System incongruenter Moduln für den Primzahltheiler $q(\xi_0)$ haben wird.”[38] Betrachtet man nun wieder die Konjugationen und ein beliebiges Element $w_0$ der Periodengattung, so ist offensichtlich, daß durch den Rest von $w_0$ modulo $q(\xi)$ diejenigen von $w_{\lambda_1}, w_{2\lambda_1}, \ldots, w_{(k-1)\lambda_1}$ mitbestimmt sind, jener aber so gewählt werden kann, daß diese $k$ Reste paarweise verschieden sind.

Hensel versuchte anschließend zu zeigen, daß ein gewisses System von Koeffizienten

$$\begin{array}{cccc} b_0 & b_1 & \ldots & b_{k-1} \\ b_k & b_{k+1} & \ldots & b_{2k-1} \\ \vdots & & & \\ b_{(\lambda-1)k} & b_{(\lambda-1)k+1} & \ldots & b_{\lambda k-1} \end{array} \qquad (b_i = 0, \ldots, q-1)$$

mit paarweise verschiedenen Zeilen als Koeffizientensystem der Reste der Konjugierten auftreten kann,[39] d.h. daß der Rest von $w_r$ gerade $b_{rk}\xi_0 + b_{rk+1}\xi_{\lambda_1} + \cdots + b_{(r+1)k-1}\xi_{(k-1)\lambda_1}$ ist.

Dazu zeigte er, daß man eine beliebig gewählte erste Spalte (die also für die Koeffizienten von $\xi_0$ in den Resten steht) erreichen kann. Dadurch ist aber (durch die Konjugationsvorschrift) die zweite Spalte bereits bestimmt, aus dieser folgt die dritte usw. Allerdings ging er über den entscheidenden Punkt hinweg, er fragte nämlich nicht, ob es möglich ist, daß dann alle Zeilen verschieden sind, sondern hielt seine Behauptung für bewiesen.[40]

**Hensels Vortrag vom 23. Mai 1883** In einem Teil $A$ enthält Hensels Vortrag drei verschiedene Möglichkeiten zu beweisen, daß $q$ sicher gaDT ist, wenn $q^k < \lambda$. Zunächst sind dann die Potenzen von $w$ nicht inkongruent modulo $q$. Weiter argumentierte Hensel, daß die Kongruenz $x^{q^k} - x \equiv 0 \mod q(\xi)$ genau $q^k$ inkongruente Kongruenzwurzeln hat, jede ganze Zahl der Gattung aber diese Kongruenz erfüllt, also zu einer dieser Kongruenzwurzeln kongruent sein muß. In seiner dritten Methode berechnete er die Anzahl der inkongruenten Zahlen modulo $q(\xi_0)$ direkt als die Norm dieses Divisors, also $q^k$. Jeweils folgt im Fall $q^k < \lambda$, daß $\lambda$ Konjugierte nicht inkongruent modulo $q(\xi_0)$ sein können. Hensel bemerkte nun: “Diese Bedingung wäre auch nothwendig, wenn die Anzahl aller incongruenten conjugirten algebraischen Zahlen auch $= q^k$ wäre. Dies ist aber nicht der Fall, wie jetzt gezeigt werden soll.”[41]

Der Teil $B$ von Hensels Vortrag gliedert sich in zwei Methoden, um eine notwendige Bedingung zu zeigen. Die erste besteht darin, für die Konjugierten verschiedene Reste vorzugeben und das entsprechende lineare Kongruenzensystem zu lösen. Dies führte Hensel im Fall $k = 1$ vor und bemerkte:

> Die Ausdehnung dieser Methode auf den Fall $q^{k^\mu} \equiv 1 \mod \nu$ die ich auch durchgeführt habe, möchte ich, da sie einige Rechnung voraussetzt nicht vortragen.[42]

Die Darstellung der zweiten Methode beginnt mit der Beobachtung, daß

[37] [TB, 67].
[38] [TB, 69].
[39] Dies zeigt en passant nochmals, dass $q^k < \lambda$ hinreichend für das Auftreten der gaDT ist.
[40] [TB, 73].
[41] [V1, 1].
[42] [V1, 2].

die conjugirten Zahlen $w_0\, w_1 \dots w_{\lambda-1}$ stets durch die folgenden Congruenzen mit einander verbunden [sind]:

$$w_\alpha^q \equiv w_{\alpha+\lambda_1}, \quad w_\alpha^{q^2} \equiv w_{\alpha+2\lambda_1}, \dots w_\alpha^{q^\delta} \equiv w_{\alpha+\delta\lambda_1} \dots\dots \quad \bmod q(\xi_0).$$

> [A]lso kann man die $\lambda$ conjugirten algebraischen ganzen Zahlen $w_0 \dots w_{\lambda-1}$ nicht beliebigen algebraischen Zahlen $b_0 b_1 \dots b_{\lambda-1}$ congruent setzen, sondern nur die $\lambda_1$ ersten $b_0 \dots b_{\lambda_1-1}$ sind beliebig, die folgenden sind bestimmt durch $b_{\alpha\lambda_1+\beta} \equiv b_\beta^{q^\alpha}$.[43]

Hat man alle $b$-s entsprechend gewählt, kann man die Koeffizienten $u_i$ so bestimmen, daß die Konjugierten diesen Resten kongruent werden. Das dazu zu lösende Kongruenzensystem ist:[44]

$$\begin{array}{lcllr} w_0 & = & u_0\varepsilon_0 + u_1\varepsilon_1 + \dots + u_{\lambda-1}\varepsilon_{\lambda-1} & \equiv b_0 & \bmod q(\xi_0) \\ \vdots & & & & \\ w_{\lambda_1-1} & = & u_0\varepsilon_{\lambda_1-1} + u_1\varepsilon_{\lambda_1} + \dots + u_{\lambda-1}\varepsilon_{\lambda+\lambda_1-1} & \equiv b_{\lambda_1-1} & \bmod q(\xi_0) \\ \vdots & & & & \\ w_{\alpha\lambda_1+\beta} & = & u_0\varepsilon_{\alpha\lambda_1+\beta} + u_1\varepsilon_{\alpha\lambda_1+\beta+1} + \dots + u_{\lambda-1}\varepsilon_{\alpha\lambda_1+\beta+\lambda-1} & \equiv b_\beta^{q^\alpha} & \bmod q(\xi_0) \end{array}$$

Dieses Kongruenzensystem hat eine Lösung, da seine Determinante nicht durch $q(\xi_0)$ teilbar ist, man kann diese auch ganzzahlig bestimmen, denn zunächst gilt: "Die aus I. sich ergebenden $u_0 \dots u_{\lambda-1}$ ändern sich nicht, wenn man $\varepsilon_0$ mit $\varepsilon_{\lambda_1}$ vertauscht."[45] Daraus folgt, daß die Zahlen $u_i$ "im Gebiete der $\xi_0\xi_1 \dots \xi_{\lambda_1-1}$"[46] liegen. Da die Zahlen $0, 1, \dots, q-1$ in diesem Gebiet ein vollständiges Restsystem bilden, sind die $u_i$ daher auch ganzen Zahlen kongruent.

Hensel zeigte weiter, daß die $b$ so gewählt werden müssen, "daß nur dann die Congruenz $b^a - b \equiv 0 \bmod q(\xi_0)$ besteht, wenn $a$ ein Vielfaches von $q^k$ ist."[47] Zahlen mit dieser Eigenschaft nannte er primitive Kongruenzwurzeln der Kongruenz $w^{q^k} - w \equiv 0$. Er bezeichnete ihre Anzahl mit $\psi(d)$, leitete die Beziehung $q^k = \sum_{d|k} \psi(d)$ ab und erhielt als Resultat:

> Hieraus folgt nach dem Dirichletschen Satze: für $\psi(k) = \sum q^{d_1} - \sum q^{d_2}$ wo sich $d_1$ auf alle Theiler von $k$ bezieht, die durch eine gerade, $d_2$ auf alle Primfactoren [Theiler], die durch eine ungerade Anzahl von Primfactoren von $k$ geschieden sind.[48]

Ist also $0 < \lambda \leq \psi(k)$, so ist $q$ kein gaDT.

Ungefähr auf diesen Zeitpunkt bezog sich Hensel vermutlich, als er in seiner Dissertation schrieb, daß es gelang

> die gestellte Frage vollständig und allgemein zu lösen; und merkwürdiger Weise ergab sich aus dem erlangten Resultate, dass die oben angegebenen Bedingungen für das Auftreten solcher ausserwesentlichen Factoren nicht die nothwendigen und hinreichenden sind, sondern dass $q$ in gewissen Fällen auch dann als beständiger ausserwesentlicher Theiler auftritt, wenn $q^k \geq \lambda$ ist. Ausserdem hatte das jetzt erlangte Resultat den Vorzug, dass durch dasselbe der ganzen Frage der Schein des Wunderbaren genommen wurde, der ihr vorher noch angehaftet hatte.[49]

[43] [V1, 2].
[44] [V1, 2]. In der untersten Zeile hatte Hensel ein $\lambda$ vergessen, das hier eingefügt wurde.
[45] [V1, 3].
[46] [V1, 3].
[47] [V1, 3].
[48] [V1, 4].
[49] [1, 1884, 3].

**Der Auszug aus den Vorträgen vom 23.5., 6.6. und 1.8. 1883** Hensel behauptete die Verallgemeinerbarkeit seiner Ergebnisse dieser Ausarbeitung mit den Worten, seine Sätze ließen "sich aber unmittelbar auf Galoissche Gleichungen erweitern."[50] Die Ausarbeitung gliedert sich in zwei Paragraphen, von denen der erste Vorbereitungen enthält. Hensel begann mit der Herleitung eines vollständigen Restsystems modulo $q(\xi_0)$, die mit der oben vorgestellten aus dem Tagebucheintrag vom 25.4.1883 übereinstimmt. Dann gibt es $q^k$ modulo $q(\xi_0)$ inkongruente ganze Zahlen. Anschließend führte Hensel ein neues Konzept ein:

> Welches ist die niedrigste Gattung, zu der eine algebraische Zahl $w$ für den Modul $q(\xi_0)$ gehört?[51]

Diese Gattung ist durch eine Zahl gekennzeichnet und Hensel erläuterte, wann $w$ zum Gattungsbereich algebraischer Zahlen von der Ordnung $k_1$ gehört:

> Dies ist so zu verstehen, daß dann die Zahl $w \bmod q(\xi_0)$ einer Zahl congruent ist, welche aus den $\lambda_1 k_1$ $\frac{\mu_1}{k_1}$-gliedrigen Perioden gebildet ist.[52]

Zu was für einem Gattungsbereich eine algebraische Zahl gehört, läßt sich aber auch folgendermaßen charakterisieren:

> Jede algebraische ganze Zahl, welche $\bmod q(\xi_0)$ der Congruenz : $w^{q^{k_1}} - w \equiv 0$ genügt, wo $k_1$ als Theiler von $k = k_1 k_2$ angenommen ist, gehört für den $\bmod q(\xi_0)$ zum Gattungsbereiche algebraischer Zahlen von der Ordnung $k_1$ [und umgekehrt].[53]

Die von Hensel bestimmte Anzahl $g(k)$ der algebraischen Zahlen, "welche zur Gattung $k$ selbst gehören und mod $q(\xi)$ inkongruent sind,"[54] stimmt mit dem oben definierten $\psi(k)$ überein. Jede dieser Zahlen erfüllt dann modulo $q(\xi_0)$ eine irreduzible Kongruenz $k$-ten Grades und ihre Potenzen $1, w_0, \ldots, w_0^{k-1}$ bilden für den Modul $q(\xi_0)$ ein Fundamentalsystem. Diesen Begriff benutzte Hensel an dieser Stelle so, daß eine Zahl $u_0 w_0^{k-1} + u_1 w_0^{k-2} + \cdots + u_{k-1}$ "nur dann $\equiv 0 \mod q(\xi_0)$ sein [kann], wenn alle Coefficienten $\equiv 0 \mod q(\xi)$ sind."[55] Anschließend kombinierte Hensel diese Frage nach der Gattung mit der Frage nach dem Exponenten, zu dem eine Zahl gehört.[56]

Der zweite Teil kommt zum Thema der gaDT zurück. Es werden wieder die verschiedenen Möglichkeiten vorgestellt, um zu zeigen, daß $q^k < \lambda$ hinreichend dafür ist, daß $q$ gadT ist. Bei den notwendigen Bedingungen machte Hensel hier explizit, daß er seine erste Methode nur im Fall $k = 1$ streng bewiesen hat, während sie allgemein einen "Weierstrassschen Satz" voraussetzt, den dieser "bei Gelegenheit eines Seminarvortrages über allgemeine Einheiten erwähnte, den er aber damals noch nicht bewiesen hatte."[57] Bei der zweiten Methode wies Hensel wieder darauf hin, daß die Konjugierten $w_i$ von $w_0$ durch die Kongruenzen $w_\alpha^{q^\delta} \equiv w_{\alpha+\delta\lambda_i}$ verbunden sind, woraus er folgerte, daß für Zahlen, die einer Kongruenz $w^{q^{k_1}} \equiv 0$

[50] [V2, 1].
[51] [V2, 3].
[52] [V2, 3]. Es ist unklar, ob Hensel hier behaupten wollte, eine analoge Konstruktion ließe sich im galoisschen Fall durchführen. Ab der Dissertation benutzt er die hier noch nachgeordneten Eigenschaften als Definition.
[53] [V2, 3f]. Der Satz, der 'und umgekehrt' formuliert, findet sich bei Hensel im Anschluß.
[54] [V2, 4].
[55] [V2, 4]. Vermutlich sollen die $u_i$ hier trotzdem ganz sein, auch wenn man dann als Modul $q$ hätte schreiben können.
[56] Der Exponent ist das minimale $n$, so daß $w^n \equiv 1 \bmod q(\xi_0)$. Er zeigte dazu, daß von den Zahlen der Gattung $k$ genau $\varphi(n)$ zum Exponenten $n$ gehören, wenn $n$ ein Teiler von $q^k - 1$ ist.
[57] [V2, 5 bzw. 10]. Leider läßt sich nicht rekonstruieren, was dieser Satz aussagte. Laut Hensel hing er (vermutlich recht indirekt) mit der Frage zusammen, ob die Wurzeln einer irreduziblen Kongruenz modulo $q(\xi_0)$ linear unabhängig sind, [V2, 5]. Weierstrass' Satz könnte durchaus falsch gewesen sein, ebenso wie Hensels (nicht präzise bekannte) Schlußfolgerung daraus.

mod $q(\xi_0)$ mit $k_1 < k$ genügen, zwingend Konjugierte kongruent modulo $q(\xi_0)$ sind. Der Nachweis, daß $g(k) < \lambda$ auch notwendig für das Auftreten gaDT ist, im Falle $g \geq \lambda$ also eine Zahl gefunden werden kann, deren Diskriminante nicht durch $q$ teilbar ist, verläuft wie im ersten Vortrag mit Hilfe des dort angeführten Kongruenzensystems.

Der nächste Eintrag in Hensels Tagebuch vom 13.8. 1883 beginnt mit der Ankündigung

> Aehnlich wie die algebraischen Galoisschen Zahlen kann man auch die reellen ganzen Zahlen für einen Modul behandeln, der die Potenz einer reellen Primzahl ist.[58]

Es ist nicht klar, ob dies bedeutet, daß Hensel bereits zu diesem Zeitpunkt algebraische Zahlen für eine (reelle) Primzahlpotenz als Modul untersucht hatte.[59] Hensel zeigte zunächst, daß jeder Rest modulo $q^k$ eindeutig in der Form $u_0 + u_1 q + u_2 q^2 + \cdots + u_{k-1} q^{k-1}$ mit $0 \leq u_i < q$ darstellbar ist. Anschließend beantwortete er die Frage, wieviele der $s := q^k - q^{k-1}$ zu $q$ teilerfremden Reste (mit $u_0 \neq 0$) primitiv sind, d.h. für wieviele von ihnen erst $x^s \equiv 1 \mod q^k$ ist. Um zur Antwort $\varphi(\varphi(q^k))$ zu gelangen, betrachtete er die gleiche Frage auch für alle Teiler $s_1 | s$.[60]

Da Hensels Tagebuch keinen weiteren Aufsachluß gewährt, wird hier zum Text der Dissertation zurückgekehrt.

### 2.2.3 Zum Inhalt der Arbeit

**Der ausführliche Hauptteil der Dissertation**

Auffällig ist, daß Hensel in diesem Textteil nur elementar formulierte, also keine Sätze bildete, in denen Primdivisoren vorkommen.

**Die Rechnungen in Periodenunterkörpern 3. und 4. Grades** Sei jetzt wieder $\nu$ prim, $\nu = \lambda\mu + 1$, $\omega$ eine $\nu$-te Einheitswurzel und $g$ eine primitive Kongruenzwurzel von $\nu$. Dann sind die $\mu$-gliedrigen Perioden definiert als

$$\varepsilon_{a+1} = \sum_{\delta=1}^{\mu} \omega^{g^{\delta\lambda + a}} \qquad (a = 0, 1, \ldots, \lambda - 1).$$

Hensel begann mit einer Zusammenstellung bekannter Ergebnisse:

> Von den so bestimmten Perioden gelten dann einige bekannte Sätze, welche sich unter Benutzung der in der Festschrift gegebenen Definitionen und Bezeichnungen so aussprechen lassen:
> Durch die $\mu$-gliedrigen Perioden der $\nu$-ten Wurzeln der Einheit wird eine Galois'sche Gattung der $\lambda$-ten Ordnung constituiert, welche durch $\mathcal{G}_\lambda(\varepsilon)$ bezeichnet werden soll. Die $\lambda$ conjugierten Zahlen
>
> $$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\lambda$$
>
> bilden ein Fundamentalsystem für diese Gattung. Die Discriminante der Gattung $\mathcal{G}_\lambda(\varepsilon)$ enthält ausser der Primzahl $\nu$ keinen Theiler.
> Jede ganze algebraische Zahl des Gattungsbereiches $\mathcal{G}_\lambda(\varepsilon)$ wird also durch die Linearform
>
> $$\omega_1 = u_1\varepsilon_1 + u_2\varepsilon_2 + \cdots + u_\lambda\varepsilon_\lambda$$
>
> dargestellt, wenn den Coefficienten $u$ gewisse ganzzahlige Werthe beigelegt werden.[61]

[58] [TB, 74].
[59] Wahrscheinlich bezieht sich das "Aehnlich" auf die benutzten Methoden, nicht auf den Modul.
[60] [TB, 74 - 80].
[61] [1, 1884, 13]. Hier findet man eine bei Hensel häufige Formulierungsungenauigkeit: Gattung und Gattungsbereich werden durch das gleiche Symbol bezeichnet.

Hensel führte also (wie Kronecker) eine Linearform, die die ganzen Zahlen darstellt, als Objekt ein. Weiterhin definierte er die Diskriminante als die Form, die aus den Konjugierten $\omega_i$ dieser Linearform gebildet wird: $D(u) = \prod_{(a \neq b)} (\omega_a - \omega_b)$. Die Frage der gemeinsamen außerwesentlichen Diskriminantenteiler lautet nunmehr, ob $D(u)$ durch $q \neq \nu$ teilbar ist, wenn man für die $u_i$ beliebige Tupel $a = (a_1, \ldots, a_\lambda) \in Z^n$ einsetzt.

Konkrete Rechnungen führte Hensel in denjenigen Fällen durch, wo die von den Perioden erfüllte Gleichung Grad drei oder vier hat, also $\nu = 3\mu+1$ bzw. $\nu = 4\mu+1$ ist. Sie beruhen, wie Hensel selbst anmerkte, vor allem darauf, daß in diesen Fällen die symmetrischen Funktionen der $\mu$-gliedrigen Perioden der $\nu$-ten Einheitswurzeln von Kummer berechnet worden sind.[62] Genauer nutzt er die "bekannten Gleichungen..., denen die Resolventen der cubischen und biquadratischen Periodengleichungen genügen."[63]
Sind $\nu = (\alpha+3\beta\varrho)(\alpha+3\beta\varrho^2)$ bzw. $\nu = (\alpha+2\beta i)(\alpha a-2\beta i)$ die Zerlegungen von $\nu$ "im Gebiete der dritten [bzw. vierten] Wurzel der Einheit,"[64] wobei $\varrho$ eine primitive dritte Einheitswurzel ist, so erhielt Hensel für die Wurzel $\Delta(u)$ aus $D(u)$ im Fall $\nu = 3\mu+1$ einen Ausdruck $\Delta(u_1, u_2, u_3) = -\nu(\alpha\Delta_1 + \beta\Delta_2)$, wobei in $\Delta_i$ nur ganze Zahlen und die $u_i$ vorkommen.
Im Fall $\nu = 4\mu + 1$ erhielt er für die Wurzel $\Delta(u)$ aus $D(u)$ eine Gleichung $4\Delta(u) = \nu^{\frac{3}{2}} A(A^2 - \nu B^2)$, wobei in $A$ und $B$ nur $\alpha$, $\beta$, die $u_i$ und die Größen $\varepsilon = (-1)^\mu, \delta = \frac{1-\varepsilon}{2}$ vorkommen.
Kandidaten für gaDT sind nur $q = 2, 3$ bzw. $q = 2, 3, 4$ und Hensel diskutierte die Formen $D(u) \mod q$ nach allen Regeln der Fallunterscheidungskunst.
Im Fall $\lambda = 3$ gelangt man leicht zu der Aussage, daß 2 genau dann gemeinsamer außerwesentlicher Diskriminantenteiler ist, falls $\beta$ gerade ist. Drei ist kein gemeinsamer außerwesentlicher Diskriminantenteiler, aber Hensel zeigte (was zunächst überraschend scheint) noch, daß genau im Fall $\beta \equiv 0 \mod 3$ alle Elementdiskriminanten von Elementen $u_1\varepsilon_1 + u_2\varepsilon_2 + u_3\varepsilon_3$ mit $u_1 + u_2 + u_3 \equiv e \neq 0 \mod 3$ durch drei teilbar sind.
Im Fall $\lambda = 4$ erhält man zunächst (nach längerer Diskussion), daß $2^k$ genau dann gemeinsamer außerwesentlicher Diskriminantenteiler ist, wenn $\beta$ durch $2^k$ teilbar ist ($k = 1, 2$). Drei ist genau dann gemeinsamer außerwesentlicher Diskriminantenteiler, wenn $\nu \equiv 1 \mod 12$ und $\beta \equiv 0, \pm 1 \mod 6$.

**Eine hinreichende Bedingung in beliebigen Periodenunterkörpern** Als nächstes untersuchte Hensel den allgemeinen Fall $\mathcal{G}_\lambda(\varepsilon)$ (es ist weiterhin $\nu = \lambda\mu+1$ prim) und gelangte zu einem hinreichenden Kriterium dafür, daß $q$ gemeinsamer außerwesentlicher Determinantenteiler ist. Dazu benutzte er $D(u) = |w_i^j|^2 \quad (i = 1, \ldots, n, j = 0, \ldots, n-1)$ und daß $q$ Teiler dieser Determinante ist, wenn zwei Zeilen kongruent modulo $q$ sind. Ist erst $q^{k^\mu} \equiv 1 \pmod{\nu}$, so ist $\varepsilon_i^{q^k} \equiv \varepsilon_i \mod (q)$ und damit auch $\omega_i^{q^k} \equiv \omega_i \mod (q)$, falls man für die $u_i$ beliebige ganzzahlige Werte einsetzt. Ist $q^k < \lambda$, so sind also in obiger Determinante zwei Zeilen kongruent modulo $q$, $q$ ist also gemeinsamer außerwesentlicher Diskriminantenteiler.
Das so erhaltene Resultat erlaubte immerhin Zusammenspiele mit anderen mathematischen Aussagen. Zunächst kann man es unter Anwendung einer Aussage von Kronecker elegant aussprechen:

[62] [1, 1884, 25].
[63] [1, 1884, 2].
[64] [1, 1884, 15].

> Alsdann ist jede Gleichungsdiscriminante der Gattung $\mathcal{G}_\lambda(\varepsilon)$ durch diejenigen in der Reihe $2, 3, \ldots, \lambda - 1$ enthaltenen Primzahlpotenzen theilbar, welche $\lambda$-te Potenzreste von $\nu$ sind.[65]

Weiter ermöglicht es das Zusammenspiel von Hensels speziellen Rechnungen und den allgemeinen Resultaten der neuen Theorie, Ergänzungssätze zu Reziprozitätsgesetzen abzuleiten. So ergibt sich u.a. der von Eisenstein gefundene Ergänzungssatz zum kubischen Reziprozitätsgesetz:

> Die Zahl 3 ist dann und nur dann cubischer Rest einer Primzahl $\nu$ von der Form $3\mu + 1$, wenn in der Darstellung von $4\nu$ durch die Form $A^2 + 27B^2$ die Zahl $B$ durch 27 teilbar ist.[66]

**Die neuen theoretischen Konzepte der Einleitung**

Kronecker schrieb in seinem Gutachten zu Hensels Dissertation:

> [Es] bedurfte demgemäß einer genaueren und tieferen Durcharbeitung der nur in ihren Grundzügen aufgestellten allgemeinen Theorie der algebraischen Zahlen. Hr. Hensel hat diese Aufgabe mit anerkennenswerthem Eifer, Fleiß und Geschick durchgeführt; die große Mühe, die er darauf gewendet hat, ist aber auch durch den Erfolg belohnt worden.[67]

Dieser Abschnitt versucht die Resultate dieser tieferen Durcharbeitung zu rekonstruieren und nachzuvollziehen.
Hensel wollte nun die "für die Kreistheilungsgleichungen durchgeführte Untersuchung auch auf beliebige ganzzahlige Gleichungen"[68] ausdehnen, wobei er die Voraussetzung beibehielt, daß $q$ kein Teiler der Diskriminante der Gattung ist. Es wird wieder "an die Stelle der Primzahl $q$ ein Primdivisor derselben als Modul gesetzt."[69] Hensel begründete zunächst, daß er mit einem Primdivisor von $q$ in der Galoisschen Hülle der Gattung $\mathcal{G}_1$ arbeitete:

> Da es ferner die Natur der zu lösenden Frage mit sich brachte, dass nicht nur die Zahlen einer Gattung $\mathcal{G}_1$, sondern auch die allen conjugierten Gattungen angehörigen ganzen algebraischen Zahlen für denselben Primdivisor von $q$ zu untersuchen waren, so musste der den Betrachtungen zu Grunde gelegte Modul für alle diese Gattungen unzerlegbar sein, also $q$ innerhalb der niedrigsten die Gattung $\mathcal{G}_1$ nebst ihren Conjugirten enthaltenden Galois'schen Gattung $\mathcal{G}$ in seine Primdivisoren zerlegt vorausgesetzt, und für eine von ihnen als Modul die Zahlen des Gattungsbereiches $(\mathcal{G}_1)$ untersucht werden.[70]

Die Frage ist wieder, ob eine der Differenzen $(w_i - w_j)$ durch den (neuen) Primdivisor $q(\xi)$ teilbar ist.

**Das Ziel: Ein Fundamentalsystem für den Modul $q(\xi)$** Hensel begann seine Untersuchung im galoisschen Fall. Ist $q(\xi)$ der Primteiler von $q$, so war sein Ziel, "alle ganzen algebraischen Zahlen $\omega$ des Gattungsbereiches $(\mathcal{G})$ modulo $q(\xi)$ auf... eine ganz bestimmte reducierte Form" zu bringen, "welche hier zunächst abzuleiten war."[71] In der Tat gibt es in Kroneckers Grundzügen (nur) einen Hinweis darauf, wie diese Form aussieht:

> Mittels eben jenes Verfahrens, welches zur Aufstellung eines Fundamentalsystems einer Art und Gattung führt, läßt sich nämlich das Restsystem für einen Primdivisor $h^{\text{ter}}$ Ordnung, dessen Norm $p^h$ ist, so aufstellen,

[65] [1, 1884, 28].
[66] [1, 1884, 29]. Dazu braucht man die obige Aussage über den Fall $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ nicht durch drei teilbar.
[67] [Biermann, 1988, 295].
[68] [1, 1884, 3f].
[69] [1, 1884, 4].
[70] [1, 1884, 4].
[71] [1, 1884, 4].

> dass alle Zahlen nur lineare Functionen von $h$ Elementen des Fundamentalsystems sind, und hieraus folgt dann, dass die Anzahl dieser in Bezug auf den Primdivisor incongruenten Zahlen genau $p^h$ ist.[72]

Hensel hatte ein solches Restsystem im Fall der Periodengattung abgeleitet und arbeitete auch in diesem allgemeineren Fall mit der entsprechenden Form:

> dass alle Zahlen des Bereiches $(\mathcal{G})$ modulo $q(\xi)$ betrachtet auf eine und nur auf eine Weise auf die Form:
>
> $$(a) \qquad u_1\xi_{11} + \cdots + u_k\xi_{k,1} \qquad \begin{pmatrix} u_\delta = 0, 1, \ldots, q-1 \\ \delta = 1, 2, \ldots, k \end{pmatrix}$$
>
> gebracht werden können. Hieraus ergibt sich unmittelbar, dass die Anzahl aller modulo $q(\xi)$ incongruenten Zahlen des Gattungsbereiches $(\mathcal{G})$ gleich $q^k$ ist.[73]

Ein solches System $\xi_{11}, \ldots, \xi_{k,1}$ nannte Hensel ein *Fundamentalsystem für den Modul* $q(\xi)$.

**Das Hilfsmittel: Die Gattung des Divisors $q(\xi)$** Hensel begann mit der Konstruktion einer Hilfsgattung:

> Es lässt sich nun zeigen, dass stets eine unter $\mathcal{G}$ enthaltene Gattung $\Gamma$ gefunden werden kann, innerhalb deren der Divisor $q(\xi)$ von der Ordnung Eins ist; ferner kann man für $q(\xi)$ einen äquivalenten Divisor finden, dessen sämmtliche Elemente dem Gattungsbereiche $(\Gamma)$ angehören. Aus diesen Gründen soll $\Gamma$ als die Gattung des Divisors $q(\xi)$ bezeichnet werden.[74]

Zwei Teile dieser Aussage sind interpretationsbedürftig. Einmal soll der Divisor $q(\xi)$ innerhalb $\Gamma$ von der Ordnung Eins sein. Dies ist so zu verstehen, daß es in $(\Gamma)$ genau $q$ mod $q(\xi)$ inkongruente ganze Zahlen gibt. Zum anderen müssen die *Elemente* des Divisors nicht im Gattungsbereich $(\Gamma)$ liegen, es soll jedoch einen zu $q(\xi)$ äquivalenten Divisor geben, dessen *Elemente* $(\Gamma)$ angehören.
Diese Angabe ist deshalb verwirrend, weil Kronecker Primdivisoren oft in der Form $u_1x_1 + \ldots u_nx_n$ schrieb, wobei für die $u_i$ ganze Zahlen in $\mathbb{Z}$ zu setzen sind. (Die $x_i$ bilden also eine $\mathbb{Z}$-Basis für das dem Primdivisor korrespondierende Primideal.) Das macht hier aber keinen Sinn, denn bezüglich dieser Darstellung hat entweder jede oder keine äquivalente Form des Divisors *Elemente* in $(\Gamma)$. Vielmehr dachte Hensel hier an einen Primdivisor der Form $u_1x_1 + \cdots + u_mx_m (m \leq n)$ , wobei für die $u_i$ hier ganze Zahlen des Gattungsbereiches $(\mathcal{G})$ gesetzt werden können.
Ist $\lambda$ die Ordnung von $\Gamma$, so setzte Hensel $k = \frac{n}{\lambda}$ und behauptete, daß $k$ die Anzahl der Elemente eines Fundamentalsystems für den Modul $q(\xi)$ ist.
An welche Konstruktion Hensel dachte, als er schrieb, daß eine solche Gattung $\Gamma$ gefunden werden kann, läßt sich anhand der verfügbaren Quellen nicht bestimmen. Jedoch kann man $\Gamma$ als Objekt in heutiger Terminologie im Zerlegungskörper des zu $q(\xi)$ gehörigen Primideals wiedererkennen. (Diese sogenannte Hilbertsche Verzweigungstheorie führte 1894 zu einem Prioritätsstreit bzw. Streit um Veröffentlichungspraxen zwischen Hilbert, der darüber veröffentlicht hatte, und Dedekind, der sich darauf berief, Hilbert doch extra auf die Stelle hingewiesen zu haben, an der er 1882 geschrieben hatte, über weitere Ergebnisse zu verfügen.[75] Insbesondere war darüber also 1884 noch nichts veröffentlicht worden.)

[72] [Kronecker, 1882, 319].
[73] [1, 1884, 5]. Hensels Darstellung enthält auch hier keinen Beweis, aber es ist sehr wahrscheinlich, daß er das von Kronecker angedeutete Verfahren durchgeführt hatte.
[74] [1, 1884, 4].
[75] Vgl. dazu [Haubrich, 1992], [Hilbert, 1894a], [Dedekind, 1882], sowie die entsprechenden Briefe Hilberts und Dedekinds in Göttingen. Dedekinds Ankündigung ist zumindest nicht eindeutig bezüglich der Frage, was für weitere Ergebnisse er hatte.

Im folgenden gebe ich die relevanten Aussagen über den Zerlegungskörper in diesem Spezialfall jeweils mit einer Übertragung in Hensels Terminologie an:[76]

Es sei $K|\mathbb{Q}$ endlich vom Grad $n$, galoissch, $\mathcal{O}_K$ der Ring der ganzen Zahlen in $K$, $q$ in $K$ unverzweigt. Jedes Ideal in $\mathcal{O}_K$ ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang $n$.

1. Die über $q$ liegenden Primideale sind zueinander konjugiert.

1.' Ist $q(\xi) = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n$ mit $x_i \in \mathcal{O}_K$ ein Primdivisor von $q$, so sind die übrigen Primdivisoren von $q$ gerade $q_j(\xi) := \sum_i x_i^{(j)}u_j, \quad (j = 1, \ldots, n)$, wobei $x_i^{(j)}$ die Konjugierten von $x_i$ bezeichne.

2. Ist $\wp$ ein Primideal in $\mathcal{O}_K$, so besteht die Zerlegungsgruppe $G_\wp$ aus denjenigen Elementen $\sigma \in G = \mathrm{Gal}(K|Q)$, für die gilt $\sigma\wp = \wp$. Der Zerlegungskörper $K_1$ besteht aus den Elementen in $K$, die unter $G_\wp$ invariant sind.

2.' Betrachtet man alle diejenigen Konjugationen $^{(j)}$, für die die Divisoren $q_1(\xi)$ und $q_j(\xi)$ äquivalent sind, so besteht der Gattungsbereich $(\Gamma)$ aus denjenigen Zahlen in $(\mathcal{G})$, die unter diesen Konjugationen invariant sind.

3. Ist $\lambda$ die Anzahl der Primideale über $q$ und $f$ deren Trägheitsindex, so ist $n = \lambda f$ und es gilt $[K : K_1] = f$, $[K_1 : Q] = \lambda = |G_\wp|$. $\mathcal{P} = \wp \cap K_1$ hat über $Q$ den Trägheitsgrad Eins, $\wp$ hat über $K_1$ den Trägheitsgrad $f$.

3.' Ist $\lambda$ die Anzahl der Primdivisoren von $q$ und $f$ deren Ordnung, so ist $n = \lambda f$ und $\Gamma$ von der Ordnung $\lambda$. Die Anzahl der modulo $q(\xi)$ inkongruenten ganzen Zahlen ist in $(\Gamma)$ gleich $p$.

Offenbar hat der Zerlegungskörper $\Gamma$ die von Hensel gewünschten Eigenschaften.
Dem sei zum Vergleich Hensels Behandlung der Periodengattungen in seinem mathematischen Tagebuch zur Seite gestellt. Zu einer Kreisteilungsgattung hatte er zunächst die Zerlegung von $q$ bestimmt. Diejenigen Perioden (sagen wir die $\mu_1$-gliedrigen), die dann in $q(\xi)$ vorkommen, bestimmen die Gattung des Divisors $\Gamma$, in der $q(\xi)$ die Ordnung eins hat. Anschließend untersuchte er die Gattungen $\mathcal{G}$ der $\mu$-gliedrigen Perioden, wobei $\mu = \frac{\mu_1}{k}$ ist. Diese ist dann von der Ordnung $k$ über $\Gamma$ und die Bahn einer geeignet gewählten $\mu$-gliedrigen Periode unter den Konjugationen von $\mathcal{G}$, die $\Gamma$ fest lassen, bildete in $\mathcal{G}$ ein Fundamentalsystem für den Modul $q(\xi)$.
Betrachtet man diese Situation nun von der Gattung $\mathcal{G}$ ausgehend, so sind die Aussagen 1.'-3.' möglich, um die Situation zu beschreiben. Die Perioden sind gerade so konstruiert, daß sie unter gewissen Konjugationen invariant sind und die zugehörigen Periodengattungen bestehen dann aus allen Elementen, die unter diesen Konjugationen invariant sind. Eine Argumentation mit bestimmten der Konjugationen liegt also nahe.
Hensels Vorgehen läßt sich im Einzelnen aus den vorhandenen Dokumenten nicht rekonstruieren. Insbesondere läßt sich auch nicht abschätzen, ob Kronecker die Theorie im galoisschen Fall bekannt war.

[76] Die moderne Formulierung wird hier nach [Neukirch, 1992, 56ff] zitiert.

**Die Kardinalität des Fundamentalsystems im nicht-galoisschen Fall** Hensel versuchte anschließend auch im nicht-galoisschen Fall, die Kardinalität eines Fundamentalsystems für den Modul $q(\xi)$ als Ordnung einer Zwischengattung wiederzufinden. Er schrieb:

> Eine Verallgemeinerung dieses Satzes ist hier hervorzuheben, welche sich folgendermaassen aussprechen läßt: Ist $q(\xi)$ ein beliebiger Primdivisor einer reellen Primzahl $q$ und $\Gamma$ die durch ihn constituierte Gattung; ist ferner $\mathcal{G}_1$ eine ganz beliebige Gattung algebraischer Zahlen, welche von der Ordnung $k_1$ ist, sobald die Gattung $\Gamma$ dem natürlichen Rationalitätsbereiche adjungirt wird; und ist endlich die Primzahl $q$ in den Discriminanten der Gattungen $\mathcal{G}_1$ und $\Gamma$ nicht enthalten, so lassen sich stets $k_1$ Zahlen $\nu_{11}, \nu_{21}, \ldots, \nu_{k_1,1}$ eines beliebigen Fundamentalsystems der Gattung $\mathcal{G}_1$ durch eine endliche Anzahl von Operationen so bestimmen, dass jede zum Bereiche $(\mathcal{G}_1)$ gehörige ganze Zahl auf eine und nur auf eine Weise modulo $q(\xi)$ auf die Form
>
> $$u_1\nu_{11} + \cdots + u_k\nu_{k_1,1} \qquad (u_\delta = 0, 1, \ldots, q-1; \delta = 1, 2, \ldots, k_1)$$
>
> gebracht werden kann. Also ist die Anzahl aller modulo $q(\xi)$ incongruenten Zahlen des Gattungsbereiches $\mathcal{G}_1$ gleich $q^{k_1}$, d.h. gleich der Norm des Divisors $q(\xi)$ für die Gattung $\mathcal{G}_1$.[77]

Versuchen wir wiederum eine Interpretation. Es fällt hier zunächst die unpräzise Ausdrucksweise auf. Primdivisor ohne Angabe eines Gattungsbereiches $\mathcal{G}$, in dem dieser prim sein soll, gibt keinen Sinn. Außerdem ist zwar die Teilbarkeit einer beliebigen algebraischen Zahl durch $q(\xi)$ erklärt, trotzdem kann aber $\mathcal{G}_1$ nicht ganz beliebig sein, sondern sollte unter $\mathcal{G}$ enthalten sein, da sonst evtl. $q(\xi)$ bezüglich $\mathcal{G}_1$ nicht prim bleibt. Diese Interpretation wird auch dadurch unterstützt, daß genau diese Situation auf der Seite zuvor vorgestellt worden war. Dies legt es weiterhin nahe, daß $\mathcal{G}$ galoissch ist und $\Gamma$ wie oben bestimmt ist, also als Zerlegungskörper des $q(\xi)$ entsprechenden Ideals in $\mathcal{G}$.

Was genau soll dann bedeuten: "welche von der Ordnung $k_1$ ist, sobald die Gattung $\Gamma$ dem natürlichen Rationalitätsbereich adjungiert wird"? Während man in heutiger Terminologie eine Körpererweiterung suchen (und das Kompositum $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_1\Gamma$ in $\mathcal{G}$über $\Gamma$ betrachten) würde, betrachtete Hensel die von einem Element der Gattung $\mathcal{G}_1$ über $\mathbb{Q}$ erfüllte irreduzible Gleichung und schaute, ob und wie diese zerfällt. Die gesuchte Ordnung ist dann der Grad des irreduziblen Faktors, der das betrachtete Element annuliert.

Ich möchte hier, als eine mögliche heuristische Stütze für Hensels Theorie (die ihm oder Kronecker möglicherweise zur Verfügung stand) zeigen, daß die von Hensel angegebene Kardinalität eines Fundamentalsystems richtig ist, wenn die Galoissche Gattung abelsch ist. Da dieser Beweis in keiner direkten Beziehung zu Hensel steht, wird er hier mit modernen Bezeichnungen gegeben. Sei dazu $K|\mathbb{Q}$ galoissch mit abelscher Galoisgruppe, $p$ in $\mathcal{O}_K$ unverzweigt und $\wp$ ein Primideal in $\mathcal{O}_K$ über $p$. Sei $K_1$ der Zerlegungskörper von $\wp$ (der nur von $p$ abhängt, da $K$ abelsch ist), $K_2$ ein Unterkörper von $K$, $K_1K_2$ ihr Kompositum in $K$ und $\wp_2 = \wp \cap \mathcal{O}_{K_2}$. Hensels Behauptung ist dann $[\mathcal{O}_{K_2}/\wp_2 : \mathbb{F}_p] = [K_1K_2 : K_1]$.

Beweis: Es gilt $[K_2 : (K_1 \cap K_2)] = [K_1K_2 : K_1]$. Zu zeigen ist daher, daß über $\wp_1 := \wp \cap \mathcal{O}_{K_1\cap K_2}$ nur ein Primideal in $\mathcal{O}_{K_2}$ liegt, denn da $p$ unverzweigt ist, ist dann

$$[\mathcal{O}_{K_2}/\wp_2 : \mathcal{O}_{K_1\cap K_2}/\wp_1] = [K_2 : (K_1 \cap K_2)],$$

und wegen $K_1 \cap K_2 \subset K_1$ ist $\mathcal{O}_{K_1\cap K_2}/\wp_1 \cong \mathbb{F}_p$.

Sei also $\wp'$ ein zu $\wp$ konjugiertes Primideal in $\mathcal{O}_K$, das ebenfalls über $\wp_1$ liegt. Dann gibt es ein $\sigma \in Gal(K|K_1 \cap K_2)$ mit $\wp' = \sigma(\wp)$. Da $Gal(K|K_1 \cap K_2)$ von $Gal(K|K_1)$ und $Gal(K|K_2)$ erzeugt wird und

[77] [1, 1884, 5].

nach Voraussetzung abelsch ist, ist also $\sigma = g\tau$ mit $g \in Gal(K|K_1)$ und $\tau \in Gal(K|K_2)$. Es ist $g(\wp) = \wp$, also $\wp' = \tau(\wp)$ und daher $\wp' \cap \mathcal{O}_{K_2} = \wp \cap \mathcal{O}_{K_2}$, wie zu zeigen war.
Bemerkungen: Der Fall $K_2 \subset K_1$ kann nicht auftreten, wenn $K$ (wie bei Hensel) die galoissche Hülle von $K_2$ ist. Gilt $K_1 \subset K_2$, so liegt über $\wp_1 = \wp \cap \mathcal{O}_{K_1}$ klarerweise nur ein Primideal in $\mathcal{O}_{K_2}$. In diesem Fall gilt die Aussage auch für eine nicht-abelsche Erweiterung. Außerdem entfällt dann auch der Umweg über die Betrachtung von $K_1 \cap K_2$, Hensels Aussage wird also offensichtlich. Falls aber die die galoissche Erweiterung nicht abelsch ist, so gibt es i.A. mehrere Primideale über $\wp_1$ in $\mathcal{O}_{K_2}$, die Aussage wird also falsch.

**Die Konstruktion eines Fundamentalsystems für den Modul $q(\xi)$** Sowohl im galoisschen, als auch im allgemeinen Fall wollte Hensel aber nicht nur die Kardinalität eines Fundamentalsystems für den Modul $q(\xi)$ mit Hilfe der Gattung dieses Primdivisors bestimmen, sondern auch dieses selbst. Er behauptete jeweils, daß sich aus einem beliebigen Fundamentalsystem dieser Gattung entsprechende Elemente auswählen lassen.[78] Diese Elemente müssen zunächst linear unabhängig über $\Gamma$ sein, was sich erreichen läßt. Die weitere Bedingung ist aber, daß unter den Möglichkeiten, $k$ bzw. $k_1$ über $\Gamma$ linear unabhängige Elemente auszuwählen, auch eine ist, bei der die Diskriminante dieser $k$ bzw. $k_1$ Elemente über $\Gamma$ nicht durch $q(\xi)$ teilbar ist.[79] Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall. Im Fall der Periodengattungen ließ sich die entsprechende Aussage noch leicht beweisen. Wären nämlich dort alle betrachteten $k \times k$-Unterdeterminanten durch $q(\xi)$ teilbar gewesen, so wären überhaupt alle $k \times k$-Unterdeterminanten der Diskriminante der Periodengattung durch $q$ teilbar gewesen, also auch diese im Widerspruch zur Voraussetzung.[80] Dieser Beweis läßt sich aber nicht auf die allgemeine Situation übertragen. Dies ist auch einsichtig, wenn man bedenkt, daß im nicht-galoisschen Fall die Kardinalität des gesuchten Systems zu groß ist und darüberhinaus auch im abelschen Fall nicht gesichert ist, daß es eine Ganzheitsbasis für die Erweiterung $K_1K_2|K_1$ gibt. Selbst wenn es eine solche gäbe, müßten ihre Elemente aber nicht in $K_2$ liegen.
Es ist nicht klar, ob Hensel seinen Fehler bemerkte, denn in den folgenden Arbeiten verzichtete er auf die Voraussetzung, daß $p$ nicht in der Diskriminante vorkommt und für diesen allgemeineren Fall mußte er sowieso eine andere Technik entwickeln, um die Kardinalität eines Fundamentalsystems zu bestimmen.
Es bleibt festzuhalten, daß die Einführung des Begriffs "Fundamentalsystem für die Gattung $\mathcal{G}$ und den Primdivisor $q(\xi)$" Hensel eine einfache Beschreibung eines vollständigen Restsystems modulo $q(\xi)$ erlaubte und Hensel glaubte, mit Hilfe der Gattung des Primdivisors ein solches Fundamentalsystem und damit auch ein Restsystem bestimmen zu können.

**Strukturierung des vollständigen Restsystems** Hensels Ziel war es, die $q^k$ modulo $q(\xi)$ inkongruenten ganzen Zahlen der galoisschen Ordnung "in geeigneter Weise zu ordnen".[81] Den Ausgangspunkt seiner Überlegungen bildete dabei die folgende Aussage:

[78] [1, 1884, 5].
[79] Diese Bedingung wird im veröffentlichten Text der Dissertation nicht genannt. Sie findet sich aber nicht nur in der ebenfalls 1884 angefertigten ersten Habilitationsschrift, sondern auch schon in Hensels Herleitung eines Fundamentalsystems für den Modul $q(\xi)$ im Fall der Periodengattungen in seinem Tagebuch [TB, 69].
[80] [TB, 67].
[81] [1, 1884, 6].

Ist $(\mathcal{G}_1)$ ein beliebiger, unter der Galois'schen Gattung $\mathcal{G}$ enthaltener Gattungsbereich, welcher unter Adjunction der Gattung $\Gamma$ des Divisors $q(\xi)$ von der Ordnung $k_1$ ist, so ist jede zu $(\mathcal{G}_1)$ gehörige ganze algebraische Zahl $\omega$ eine Wurzel der Congruenz:

$$\omega^{q^{k_1}} - \omega \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, q(\xi)).$$ [82]

An diese knüpfte er zwei Definitionen: Ist $k_1$ ein beliebiger Teiler von $k$ und $x$ eine ganze Zahl, die die obige Kongruenz erfüllt, dann "gehört [sie] modulo $q(\xi)$ zu einem Gattungsbereiche der Ordnungszahl $k_1$." Erfüllt sie diese, aber keine mit einem kleineren $k_1$ "so soll sie als zu einer Gattung der Ordnungszahl $k_1$, oder als zur Ordnungszahl für den betrachteten Modul gehörig betrachtet werden."[83] Hensel definierte damit *Gattung und Gattungsbereich der Ordnungszahl* $k_1$ *für den betrachteten Modul* als neue Objekte, wobei die Definition keinen Bezug mehr (wie noch in der zweiten Vortragsausarbeitung) zu den Untergattungen der betrachteten Gattung hat. Hensel führte die folgenden Aussagen als Erklärung der Bezeichnungen an:

Jede Zahl, welche modulo $q(\xi)$ zu einem Gattungsbereiche der Ordnung $k_1$ gehört, ist für diesen Divisor die Wurzel einer ganzzahligen Congruenz vom Grade $k_1$.
Gehört eine algebraische Zahl zur Ordnungszahl $k_1$ selbst, so ist die definirende Congruenz des Grades $k_1$ irreductibel.[84]

Durch das "definirend" kommt vermutlich die Vorstellung Hensels zum Ausdruck, daß eine Gattung für den Modul $q(\xi)$ auch durch eine Kongruenz definiert werden kann.
Hensel bezeichnete mit $g(k_1)$ die Anzahl (die wirklich nur von $k_1$ abhängt) der Zahlen, die für $q(\xi)$ zur Ordnungszahl $k_1$ gehören. Er charakterisierte sie als Wurzeln einer Kongruenz mod $q(\xi)$ des $g(k_1)$-ten Grades und gab eine Formel für ihre Anzahl. Beides soll erst bei der Darstellung der ausführlichen ersten Habilitationsveröffentlichung sowohl erläutert als auch auf seinen Ursprung befragt werden. Ebendort wird sich auch zeigen, was die "weitere Eintheilung der zu derselben Ordnungszahl $k_1$ gehörigen ganzen algebraischen Zahlen"[85] ist, auf die auch Hensel in seinem Ergebnisbericht nicht eingeht, da er sie nicht benötigt.
Entscheidend für Hensels Argument ist der Zusammenhang zwischen konjugierten Zahlen im Gattungsbereich für den Modul $q(\xi)$ und den Konjugierten über der Gattung $\Gamma$ des Primdivisors $q(\xi)$. Als *für den Modul* $q(\xi)$ *konjugiert* bezeichnete Hensel die Zahlen

$$\omega_1, \omega_1^q, \ldots, \omega_1^{q^{k_1-1}}$$

(wobei $\omega_1$ zur Ordnungszahl $k_1$ für den Modul $q(\xi)$ gehört), einmal, weil sie eine irreduzible ganzzahlige Kongruenz $k_1$-ten Grades modulo $q(\xi)$ erfüllen, zum anderen aber auch, weil sie zu $k_1$ der $k$ Konjugierten von $\omega_1$ "für den Rationalitätsbereich $\Gamma$" modulo $q(\xi)$ kongruent sind.[86] Genauer gesagt, sind alle $k$ konjugierten Zahlen den Zahlen $\omega_1, \omega_1^q, \ldots, \omega_1^{q^{k-1}}$ modulo $q(\xi)$ kongruent und ist $\omega$ von der Ordnung $k_1 < k$, so sind nur $k_1$ der Konjugierten inkongruent.

[82] [1, 1884, 6]. Die entsprechende Aussage (wobei $q^{k_1}$ die Kardinalität eines vollständigen Restsystems ist) steht bereits explizit in Dedekinds erster Darstellung der Idealtheorie [Dedekind, 1871], aber nicht in Kroneckers Grundzügen.
[83] Beide Zitate [1, 1884, 6].
[84] [1, 1884, 6].
[85] [1, 1884, 7].
[86] [1, 1884, 7].

**Die Formulierung der Ergebnisse** Im galoisschen Fall kann man jetzt ein einfaches hinreichendes Kriterium formulieren: Ist $\mathcal{G}$ galoissch von der Ordnung $n$, $\Gamma$ wieder die von $q(\xi)$ konstitutierte Gattung, $\lambda$ deren Ordnung und $n = \lambda k$, so ist $q$ gemeinsamer außerwesentlicher Diskriminantenteiler, falls $n > g(k)$, falls es also nicht genug modulo $q(\xi)$ inkongruente Zahlen gibt, die modulo $q(\xi)$ von der maximal möglichen Ordnung $k$ sind. Hensel behauptete weiter (ohne Beweis), daß diese Bedingung auch notwendig ist, daß er also ein Element konstruieren kann, dessen Diskriminante $q$ nicht enthält, wenn $n \leq q(k)$ ist.
Hensels Formulierung des hinreichenden Kriteriums im allgemeinen Fall (sei diesmal $\mathcal{G}_1$ eine beliebige Gattung $\nu$-ter Ordnung) werde wiederum zitiert:

> In diesem Falle ist die Primzahl $q$ in derjenigen Galois'schen Gattung $\mathcal{G}$ in ihre Primdivisoren zu zerlegen, unter der die zu untersuchende Gattung $\mathcal{G}_1$ nebst ihren conjugirten Gattungen enthalten ist. Ein beliebiger Primdivisor von $q$ sei dann $q(\xi)$, und $\Gamma$ die durch ihn constituierte Gattung. Dann denke man sich die Gattung $\Gamma$ dem natürlichen Rationalitätsbereiche adjungirt und untersuche, welches die Ordnung ist, auf die sich die $\nu$ einzelnen zu $\mathcal{G}_1$ conjugirten Gattungen in diesem erweiterten Bereiche $(1, \Gamma)$ reduciren. Es seien nun:
>
> $$\lambda_1 k_1, \lambda_2 k_2, \ldots, \lambda_\mu k_\mu$$
>
> die ganzen Zahlen, welche angeben, wie viele der $\nu$ Gattungen $\mathcal{G}_a$ respective von der Ordnung:
>
> $$k_1, k_2, \ldots, k_\mu$$
>
> sind. Dann läßt sich der allgemeine hier sich ergebende Satz so aussprechen:
> Ist eine der $\mu$ Bedingungen:
>
> $$k_a \lambda_a > g(k_a) = \sum_{d|k_a} \varepsilon_d q^d \qquad (a = 1, 2, \ldots, \mu)$$
>
> erfüllt, so enthalten die Discriminanten aller Gleichungen des Gattungsbereiches $(\mathcal{G}_1)$ die Primzahl $q$ als ausserwesentlichen Theiler.[87]

Versuchen wir zu verstehen, wie diese Aussage mit den vorherigen zusammenhängt. Die Tatsache, daß sich $\lambda_i k_i$ der zu $\mathcal{G}_1$ konjugierten Gattungen auf den Grad $k_i$ reduzieren, wenn man den Rationalitätsbereich $(\Gamma)$ betrachtet, bedeutet gerade, daß in der Zerlegung der über $\mathbb{Q}$ irreduziblen Gleichung $\nu$-ten Grades, der ein Element der Gattung $\mathcal{G}_1$ genügt (im folgenden definierende Minimalgleichung), über dem Rationalitätsbereich $(\Gamma)$ genau $\lambda_i$ Faktoren $k_i$-ten Grades auftreten. Damit hängen (nach Hensels Theorie) je $k_i$ der Reste modulo $q(\xi)$ zusammen und ihre Ordnung ist daher ein Teiler von $k_i$. Wenn es im gesamten galoisschen Gattungsbereich $(\mathcal{G})$ nicht genug verschiedene Zahlen der entsprechenden Ordnungen gibt (das ist die Bedingung, die formuliert ist), so können diese auch nicht in den entsprechenden konjugierten Gattungen als Konjugierte eines Elements auftreten, es müssen also zwei der Konjugierten kongruent modulo $q(\xi)$ sein und damit ist $q$ gaDT.

**Eine symmetrische Formulierung des Ergebnisses** Hensel sah nun "die Aufgabe gegeben, die Untersuchungsmethode in der Weise umzugestalten, dass die Unabhängigkeit des Resultats von der Wahl des Primdivisors ins Licht gesetzt würde."[88] Diese Aufgabe stellt sich insbesondere deshalb, weil die Anzahl der Konjugierten, die zu $w_1 \in \mathcal{G}_1$ für den Modul $q(\xi)$ konjugiert sind, wirklich von der Auswahl von $q(\xi)$ abhängt. Die von Kronecker eingeführte Fundamentalgleichung erlaubte es Hensel, eine neue Theorie zu formulieren. Die Betrachtung der Fundamentalgleichung modulo $q$ zeigt, wie die definierende

[87] [1, 1884, 9].
[88] [1, 1884, 9].

Minimalgleichung in jedem Fall zerfällt und $q$ ist genau dann in der Elementdiskriminante nicht enthalten, wenn sie nicht weiter zerfällt und die entstehenden Faktoren paarweise inkongruent sind.[89]

Als Kriterium formulierte Hensel daher:

> Um zu entscheiden, ob eine reelle Primzahl $q$ ausserwesentlicher Theiler aller Discriminanten einer Gattung $\mathcal{G}_1$ ist, denke man sich ihre Fundamentalgleichung modulo $q$ in irreductible Factoren zerlegt. – Geben alsdann die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ an, wieviele dieser Factoren beziehungsweise vom Grade $k_1, k_2, \ldots, k_\mu$ sind, so hat die Primzahl $q$ dann und nur dann die angegebene Eigenschaft, wenn eine der $\mu$ Bedingungen $\lambda_\alpha > \frac{1}{k_\alpha} g(k)$ erfüllt ist.
> Allerdings war auch jetzt für den Beweis die Existenz irreductibler Divisoren von $q$ nothwendig, jedoch wurde hier von denselben keine weitere Eigenschaft, als eben ihre Existenz vorausgesetzt.[90]

Diese letzte Anmerkung Hensels läßt es sehr wahrscheinlich erscheinen, daß er einen völlig neuen Ansatz zur Herleitung seiner Ergebnisse gemacht hatte. Die Zerlegung der Fundamentalgleichung liefert nämlich auch (bzw. wirklich) die Kardinalität der Restsysteme modulo der verschiedenen Pridivisoren von $q$. Für diese (hier vermutlich schon entwickelte) Theorie mußten einige Aussagen bewiesen werden, die Kronecker in den Grundzügen nur unvollständig hatte beweisen können.[91]

**Untersuchung der Diskriminante der Fundamentalgleichung** Hensel leitete nun zum Fall über, wo ganz allgemein $p$ auch Diskriminantenteiler sein darf, indem er berichtete, er habe am Ende seiner Arbeit ein Beispiel dargelegt, in dem ein Diskriminantenteiler auch gemeinsamer außerwesentlicher Diskriminantenteiler sei.[92] Er wies nun noch auf "eine völlig andere Behandlung derselben Frage...,welche sich auf die Theorie der Divisorensysteme gründet"[93] hin. Dazu betrachtete er die Diskriminantenform der Fundamentalgleichung, teilte sie durch die Diskriminante und ging dann der Frage nach, wann diese bzw. eine beliebige primitive Form für beliebige ganzzahlige Werte durch eine Primzahl $q$ teilbar ist:

> Denkt man sich nämlich die von ihren Zahlenfactoren befreite Discriminantenform der Fundamentalgleichung einer Gattung $\mathcal{G}$ gebildet, so wird diese primitive Form dann und nur dann für alle ganzzahligen Werthe der Unbestimmten durch eine gegebene Primzahl $q$ theilbar, wenn die Zahl $q$ ausserwesentlicher Theiler sämmtlicher Discriminanten der zu $(\mathcal{G})$ gehörigen Gleichungen ist.[94]

Die Antwort *wenn sie sich modulo p aus Ausdrücken $u^p - u$ zusammensetzen läßt* formulierte Hensel wieder nur in Termen der Fundamentalgleichung, um eine strukturelle Analogie zur Bedingung für Diskriminantenteiler zu erhalten:

> Die Primzahl $q$ ist dann und nur dann außerwesentlicher Theiler aller Gleichungsdiscriminanten einer gegebenen Gattung $\mathcal{G}_1$, wenn die Fundamentalgleichung dieser Gattung $F(\omega; u_1, \ldots, u_\nu)$ mit ihrer ersten nach der Variablen $\omega$ genommenen Ableitung für das Modulsystem
>
> $$(q, u_1^q - u_1, \ldots, u_\nu^q - u_\nu)$$

[89] Dies schrieb Hensel in der Dissertation nicht, erläuterte es aber in der erst 1894 abgedruckten Darstellung der Theorie [14, 1894].

[90] [1, 1884, 10].

[91] Zumindest eine der Vervollständigungen ist nachweislich in einer der Habilitationsarbeiten enthalten. Veröffentlicht wurde diese Theorie aber erst als [13, 1894].

[92] Dies bedeutet, daß $p$ in allen Elementdiskriminanten in höherer Potenz vorkommt, als in der Gattungsdiskriminante. Unterteilt man (wie Hensel im Anschluß an Kronecker) die Elementdiskriminanten in einen wesentlichen und einen außerwesentlichen Anteil, so kann man formulieren, $p$ sei sowohl gaDT, als auch Diskriminantenteiler.

[93] [1, 1884, 10].

[94] [1, 1884, 11]. Hier benutzte er, daß der abgetrennte Zahlenfaktor die Diskriminante der Gattung ist, ohne darauf hinzuweisen, daß bei Kronecker ein Teil dieser Aussage noch unbewiesen war.

einen gemeinsamen Theiler hat.[95]

Im Anschluß daran ging Hensel noch einer ebenfalls von Kronecker angeregten Fragestellung nach, nämlich aus was für Gattungen die $u_i$ gewählt werden können, damit der größte gemeinsame Teiler der durch die Form dargestellten Zahlen eins wird. Kronecker hatte in Bezug auf das Beispiel Dedekinds geschrieben:

> Doch darf hier nicht unerwähnt bleiben, dass merkwürdiger Weise auch bei dieser elementareren Frage der Darstellung der complexen Zahlen, ganz analog wie bei der höheren Frage der Darstellung ihrer Primtheiler, eine zweite Art der Association, nämlich die von algebraischen Zahlen höherer Ordnung, zu demselben Ziele führt. In der That sieht man leicht, daß die Unbestimmten jener primitiven Form, welche eine Wurzel der Fundamentalgleichung darstellt, stets als ganze *algebraische* Zahlen dem angegebenen Zwecke gemäss bestimmt werden können, und wenn man z.B. oben für $u$ eine dritte Wurzel der Einheit setzt, so wird die primitive Form ihrem absoluthen Werthe nach gleich Eins.[96]

Es geht also darum, daß alle ganzen Zahlen der Gattung mit Hilfe von Potenzen einer Zahl $y$, die nicht in der Gattung liegt, mit ganzen Koeffizienten (in $\mathbb{Z}$) dargestellt werden können. Für Kronecker (und offenbar auch für Hensel) ist es dabei kein Problem, daß dann klarerweise in dieser Form nicht nur ganze Zahlen des gegebenen Gattungsbereiches dargestellt werden können und das es nicht leicht zu entscheiden ist, ob eine gegebene Zahl dem Gattungsbereich angehört.
Hensels erhielt als Ergebnis, daß man dazu nur Einheitswurzeln braucht und der Grad $k$ der Primdivisoren von $p$ hoch genug sein muß.[97] Ich werde auf diese Fragestellung ebenfalls genauer eingehen, wenn ich die Arbeiten betrachte, in denen diese Ergebnisse ausführlich vorgestellt werden.

**Zusammenfassung** Man kann Hensels Dissertation als eine schrittweise Hinwendung zur Theorie der Grundzüge beschreiben. Mit elementaren Hilfsmitteln kam er bis zu einer hinreichenden Bedingung für gaDT (im unverzweigten Fall). Anschließend nutzte er die Theorie der idealen Primdivisoren, um zu einem notwendigen Kriterium zu kommen. Dazu führte er ein Konzept ein, das nicht in den Grundzügen vorkommt, die Gattung eines Divisors. Obwohl er glaubte, mit dessen Hilfe ein hinreichendes Kriterium für gaDT (im unverzweigten Fall) formulieren zu können, benutzte er für eine bessere Formulierung dann auch die weiteren Konzepte Kroneckers, die Fundamentalgleichung und ihre Diskriminantenform. Als Ergebnis war er mit Kroneckers Theorie soweit vertraut, daß er auch kleinere Lücken in ihr vervollständigen konnte.

## 2.3 Die Habilitationsarbeiten

### 2.3.1 Dokumentation und Bewertung

Als Dokumente liegen Hensels Antrag auf Erteilung der venia legendi, sowie Kroneckers Gutachten vor. Aus Kroneckers Gutachten erfahren wir, daß es sich (neben der Dissertation) um " 8 größere - auf den Umschlägen mit No. I bis VIII bezeichnete - handschriftliche Abhandlungen sowie einen kleineren mit No.

[95] [1, 1884, 11]. Die Formulierung für die Diskriminante ist (speziell für den von Hensel angesprochenen zahlentheoretischen Fall umformuliert): $p$ ist Diskriminantenteiler genau dann, wenn die Fundamentalgleichung $F(w; u)$ mit ihrer nach $w$ genommenen Ableitung, im Sinne der Congruenz modulo $p$, einen gemeinsamen Theiler hat. [Kronecker, 1882, 381].
[96] [Kronecker, 1882, 384].
[97] Die Bedingung ist $q^k < \nu(\nu - 1)$, wobei $\nu$ der Grad der Form ist. [1, 1884,11 ].

IX bezeichneten Aufsatz"[98] handelt. Hier die Liste der Titel der eingereichten Arbeiten, wie sie Hensel auf seinem Gesuch vermerkte:[99]

1. Untersuchung der ganzen algebraischen Zahlen eines gegebenen Gattungsbereiches ($\mathcal{G}$) für einen beliebigen algebraischen Primdivisor.
2. Untersuchung der ganzen algebraischen Zahlen eines gegebenen Gattungsbereiches, sowie der Gattungsdiscriminante für eine reelle Primzahl als Modul.
3. Arithmetische Untersuchung über die gemeinsamen außerwesentlichen Theiler aller Gleichungsdiscriminanten einer beliebigen Gattung algebraischer Zahlen.
4. Ueber ein rationales endliches Verfahren, welches zur Aufstellung der Fundamentalgleichung einer beliebigen Gattung für eine reelle Primzahl als Modul führt.
5. Ueber den Zusammenhang der Primdivisoren einer reellen Primzahl innerhalb einer aus zwei anderen componierten Gattung mit den Primtheilern derselben Zahl für die beiden erzeugenden Gattungen.
6. Anwendung der Theorie der Modulsysteme auf die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen.
7. Ueber den Zusammenhang zwischen den Primdivisoren einer reellen Primzahl innerhalb einer beliebigen Gattung mit denjenigen innerhalb einer jene enthaltenden Galoisschen Gattung.
8. Ueber die Zerlegung der Fundamentalgleichung einer beliebigen Gattung algebraischer Zahlen in Bezug auf eine reelle Primzahl. Beweis der absoluten Aequivalenz der Gattungsdiscriminante und der Discriminante der Fundamentalgleichung.
9. Notiz über eine in der Theorie der Elektricität auftretende unendliche Reihe

Zum Zeitpunkt von Kroneckers Gutachten (16.7.1886) war definitiv der Druck von mindestens zwei der Arbeiten geplant:

> Zwei seiner Arbeiten sind bereits vor längerer Zeit von der Redaction des hiesigen Journals für Mathematik, welche von Hrn. Weierstraß und mir geführt wird, zum Abdruck angenommen worden, aber die Fülle des sonst vorliegenden Materials gestattete bisher den Abdruck noch nicht.[100]

Tatsächlich ist aber nur die erste dieser Arbeiten zu Lebzeiten Kroneckers gedruckt worden. Hensel veröffentlichte 1894 zwei weitere Arbeiten, die mit hoher Wahrscheinlichkeit direkt aus den Habilitationsarbeiten hervorgegangen sind, vermutlich nachdem er keine entsprechenden Manuskripte in Kroneckers Nachlaß gefunden hatte. Die erste entspricht dabei hochwahrscheinlich der Arbeit 8., die zweite enthält sicher 3., eventuell aber auch Ergebnisse aus 6.[101]

Kronecker bezeichnete die eingereichten Arbeiten als inhaltlich wertvoll und hebt insbesondere die neue Begriffsbildung und die Äquivalenz der Diskriminante und der Diskriminantenform der Fundamentalgleichung hervor:

> Dagegen sind die 8 größeren von Hn. Hensel eingereichten Abhandlungen die sehr werthvolle Frucht mehrjähriger, anhaltender und eingehender, mit ebensogroßem Talent als Fleiß ausgeführter Untersuchungen aus dem Gebiete der höheren Arithmetik.
> [I]ch hebe... aus dem Inhalt zwei Punkte hervor, die mir als die wichtigsten erscheinen; einen, der sich auf eine fruchtbare neue <u>Methode</u>, einen anderen, der sich auf ein interessantes neues <u>Resultat</u> bezieht.
> Hr. Hensel hat erstens den sinnigen Gedanken gehabt, alle jene Begriffe (Gattungsbereich, Fundamentalsystem etc.), welche ich in meinen "Grundzügen einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen" entwickelt habe, bei seinen Untersuchungen in einem neuen abstracten, nur <u>relativen</u> Sinn anzuwenden und also z.B. "Fundamentalsysteme" gewisser algebraischer Zahlen einzuführen, die die Eigenschaften eines solchen

[98][GAK, 1].
[99]Vgl. [HGH].
[100][GAK, 2].
[101]Es handelt sich um die Arbeiten [13, 1894] und [14, 1894], die im Abschnitt 2.4 behandelt werden.

nur im Sinn der Congruenz für einen bestimmten Modul besitzen. Diese echt wissenschaftliche Abstraction hat - wie diejenige, welcher der Gaußesche Congruenzbegriff selbst entsprungen ist - wesentliche methodische Vortheile, und sie hat sich in den Henselschen Untersuchungen aufs Beste bewährt. Ja, man kann - die Haupterfolge derselben gerade dieser sachgemäßen Abstraction zuschreiben.
Hr. Hensel hat zweitens eine der wichtigsten Fragen, welche die Theorie der Discriminanten algebraischer Gleichungen uns darbietet, für den Fall von Zahlengleichungen vollständig aufgeklärt, indem er in der mit No. VIII bezeichneten Abhandlung den Beweis dafür erbringt, daß die absolute Aequivalenz der Discriminante einer Gattung mit derjenigen der bezüglichen Fundamentalgleichung ausnahmslos besteht....[I]ch betrachte es als einen sehr glücklichen Gedanken des Hrn. Hensel, die Aufgabe der Bestimmung dieser Discriminante ohne Rücksicht auf den ursprünglichen Grund[102] des Problems mit allen zur Verfügung stehenden Mitteln in Angriff zu nehmen. Der Erfolg, den Hr. Hensel dabei gehabt hat, vervollständigt unsere bis dahin immer noch beschränkt gebliebene Einsicht in die Natur der Fundamentalgleichungen.[103]

Ebenfalls dokumentiert ist ein rückblickendes Urteil von Weierstraß, der sich positiv über die Arbeiten, aber kritisch über Hensels mathematische Allgemeinbildung äußerte. In seiner Befürwortung des Antrags auf Ernennung Hensels zum außerordentlichen Professor vom 15.1.1891 schrieb Weierstraß zunächst zu den Habilitationsarbeiten:[104]

[D]ie eingereichten Habilitationsschriften entsprachen allen billigen Anforderungen, indem sie zeigten, daß der Verfasser in einem wichtigen und ausgedehnten mathematischen Gebiete nicht nur gündliche und umfassende Kenntnisse besitze, sondern auch, auf gegebener Grundlage weiterbauend, selbständige Untersuchungen auszuführen im Stande sei.

Anschließend führt er jedoch aus, daß Hensels Kenntnisse in anderen mathematischen Disziplinen eigentlich für einen Universitätslehrer zu dürftig gewesen seien, so daß es gerechtfertigt gewesen wäre, die Verleihung der venia legendi zu vertagen:

Indessen war nicht zu verkennen und zeigte sich auch in dem an die Probevorlesung sich anschliessenden Colloquium in auffallender Weise, dass Dr. Hensel in den letzten Jahren seine Studien in *zu* einseitiger Weise betrieben habe[105] - in die schwierigsten Fragen sich vertiefend war er nicht dazugekommen in die übrigen Disciplinen: Analysis, Geometrie, Mechanik, mathematische Physik so weit sich einzuarbeiten als es von dem Universitätslehrer verlangt werden muss. Bei diesem Stand der Dinge wäre es an sich gerechtfertigt gewesen, die Ertheilung der venia legendi an Dr. Hensel noch einige Zeit zu vertagen.

Zum eigentlichen Thema seines Textes kommend, konstatierte Weierstraß, Hensel habe daher einen Vertrauensvorschuß erhalten und diesen gerechtfertigt:

[B]ei seinem entschiedenen mathematischen Talente und ungewöhnlichem Fleisse glaubte aber die Fakultät, sich der Hoffnung hingeben zu können, er werde, sofort in die praktische Thätigkeit eintretend, die in seinem Wissen noch vorhandenen Lücken alsbald erkennen und in nicht zu langer Zeit aufzufüllen im Stande sein. Es freut mich, heute aussprechen zu können, dass diese Hoffnung nicht getäuscht worden ist.

### 2.3.2 Die veröffentlichte Habilitationsarbeit

Hensels Arbeit *Untersuchung der ganzen algebraischen Zahlen eines gegebenen Gattungsbereichs für einen beliebigen algebraischen Primdivisor* ist auf 1884 datiert, wurde jedoch erst in Band 101 des Crelle-

[102] Den ursprünglichen Grund führte Kronecker zuvor aus. Es handelt sich um Kroneckers Idee, die Primdivisoren auch begrifflich mit Hilfe der Fundamentalgleichung einzuführen.
[103] [GAK, 1f].
[104] Alle Zitate bis zum Ende des Abschnittes nach [Akte H, Blatt 8b]. Der Text ist (mit etwas anderen Auslassungen) in [Biermann, 1988, 148f] abgedruckt.
[105] Hervorhebung B.P., dieses "zu" ist bei Biermann nicht mit abgedruckt.

Journals und also 1887 veröffentlicht. Sie enthält eine dreistufige Klassifikation der Zahlen eines vollständigen Restsystems modulo eines Primdivisors, darüberhinaus aber auch ein Verfahren, um die Kardinalität eines solchen Systems zu bestimmen.

**Die Einleitung**

Hensels Einleitung dokumentiert, daß die Arbeit im Zusammenhang mit Untersuchungen über gaDT entstand. Konkret bemerkte er, daß der Teil seiner Dissertation, der die Struktur des vollständigen Restsystems modulo eines Primdivisors behandelte, nur von der vorherigen Bestimmung der Kardinalität dieses Restsystems abhängig war und daher auf den allgemeinen Fall (in dem $p$ in der Diskriminante vorkommen kann) übertragen werden kann: Es

> ergab sich das Resultat, dass die über das Verhalten der Zahlen einer Gattung in Bezug auf einen Primdivisor gefundenen Sätze zum grössten Teil von der vorhin erwähnten Voraussetzung unabhängig sind; und ein weiteres Eingehen auf diesen Gegenstand machte es auch möglich, den Uebergang zu der höheren [galoisschen] Gattung zu vermeiden.[106]

Dies ist leicht zu interpretieren: Wie wir gesehen hatten, brauchte Hensel einen Primdivisor $q(\xi)$ von $q$ in einer galoisschen Gattung, da er nur diesem die Gattung des Divisors zuordnen konnte. Mit Hilfe dieser Gattung bestimmte er die Anzahl der Elemente eines Fundamentalsystems modulo $q(\xi)$. Dies ist aber nur dann (und genaugenommen auch dann nicht) möglich, wenn $q$ kein Teiler der Diskriminante der Gattung ist. Hensel benötigte also ein neues Verfahren zur Bestimmung der Kardinalität eines vollständigen Restsystems, konnte aber dann seine Untersuchungen übernehmen.

**Hensels Motivation der neuen Begriffe** Hensels Ziel war es, einige der von Kronecker in der Festschrift geprägten Begriffe auf die Situation, in der die algebraischen Zahlen nur modulo eines Primdivisors betrachtet werden, auszudehnen:

> Ein Hauptzweck dieser Arbeit ist der, die von Herrn *Kronecker* in seiner Festschrift aufgestellten Begriffe des Gattungsbereiches, der Gattung und des Fundamentalsystems in der Weise zu fassen, dass sie ihre Bedeutung und ihre wesentlichen Merkmale auch dann noch beibehalten, wenn man die ganzen algebraischen Zahlen nicht mehr als solche, sondern nur in Bezug auf einen beliebigen algebraischen Primdivisor betrachtet.[107]

Als wesentliche Eigenschaften der Kroneckerschen Grundbegriffe, die seine Begriffe beibehalten, hob er hervor, daß sich Zahlen einer Gattung "*gegenseitig* rational durcheinander darstellen lassen."[108] Der Gattungsbereich enthält darüber hinaus noch Zahlen, die sich rational durch die Zahlen der Gattung darstellen lassen, aber durch die sich die Zahlen der Gattung nicht rational darstellen lassen, und die dann zu einer der unter der ersten enthaltenen Gattungen gehören. Ein Fundamentalsystem ermöglicht die "Darstellung aller ganzen Zahlen eines jeden unter $(\mathcal{G})$ enthaltenen Gattungsbereiches als homogene lineare ganzzahlige Functionen" seiner Elemente.[109]

Er hob anschließend die analogen Eigenschaften seiner Begriffe hervor, (auch) um seine Bezeichnungen

[106] [2, 1887, 99].
[107] [2, 1887, 100].
[108] [2, 1887, 100].
[109] [2, 1887, 100]. Hensel nannte dieses Fundamentalsystem der Gattung, fordert aber, daß alle ganzen Zahlen des Gattungsbereichs mit seiner Hilfe darstellbar sind.

zu rechtfertigen. Ein *Fundamentalsystem für die Gattung $\mathcal{G}$ und den Modul $P_1$* ermöglicht es, “alle ganzen algebraischen Zahlen des Bereiches $(\mathcal{G})$, modulo $P_1$ betrachtet, eindeutig als homogene lineare ganzzahlige Functionen derselben [d.h. der Funktionen des Fundamentalsystems] dar[zu]stellen.”[110] Die Bezeichnung “für den Modul $P_1$ zu derselben Gattung $\Gamma_h$ gehörig”[111] erläuterte Hensel dadurch, daß “alle diese Zahlen sich, modulo $P_1$ betrachtet, ganzzahlig durcheinander ausdrücken lassen.”[112] Entsprechend gehören zum Gattungsbereich $(\Gamma_h)$ die Zahlen, “die rational durch jede der zur Gattung $\Gamma_h$ gehörigen Zahlen ausdrückbar sind.”[113] Für diesen läßt sich ebenfalls ein Fundamentalsystem angeben. In beiden Fällen sind also erst die zu ordnenden Objekte gegeben. Von diesen werden die durcheinander ausdrückbaren in eine Gattung zusammengefaßt und die durch diese ausdrückbaren in den Gattungsbereich aufgenommen, für den man ein Fundamentalsystem hat. Im Hauptteil werden die hier genannten Eigenschaften allerdings nicht noch einmal angesprochen.

**Hensels Einordnung** Als “wichtigste Arbeiten, welche früher über diesen Gegenstand veröffentlicht worden sind”, nannte Hensel Gauß’ *Disquisitiones generales circa congruentias* (aus dem Nachlaß veröffentlicht 1863), weiter [Galois, 1830], [Schönemann, 1845], sowie die Darstellung von Serret, die er auf einen Vortrag vor der Pariser Akademie 1865 datierte und nach [Serret, 1866] zitierte.[114] Hensel ging von einer gegebenen Gattung algebraischer Zahlen aus und bemerkte dann, daß die genannten Arbeiten einen Spezialfall seiner Untersuchung behandeln, nämlich denjenigen, in dem die Primzahl $p$ prim bleibt:

> Alle diese Arbeiten behandeln den Fall, dass die Primzahl innerhalb der der Untersuchung zu Grunde gelegten Gattung $\mathcal{G}$ ihren Primzahlcharakter nicht verliert, d.h. unzerlegbar bleibt. In der That werden daselbst *der Sache nach* die ganzzahligen Functionen einer Variablen $x$ für ein Modulsystem $(p, F(x))$ untersucht; die Function $F(x)$ wird aber jedesmal als irreductibel für den Modul $p$ angenommen.[115]

Diesem Spezialfall stellte Hensel nun den von ihm untersuchten allgemeinen Fall gegenüber, wo “über das Verhältniss der Primzahl $p$ zu der zu untersuchenden Gattung keinerlei Voraussetzung gemacht wird.”[116] Dieser allgemeine Fall war auch Gegenstand von Dedekinds Idealtheorie. Hensel erläuterte, warum er nicht detailiert auf dessen Ergebnisse eingehen konnte:

> Einige der im Folgenden entwickelten *allgemeinen* Resultate finden sich schon in den *Dedekind*schen Publicationen. Ich würde sie im Einzelnen an den betreffenden Stellen dieser Abhandlung citiren, wenn nicht die ganz verschiedene Terminologie eine zu weitläufige Darlegung für die Vergleichung der Resultate erforderte. Aber ich werde dies in einer späteren Arbeit nachholen.[117]

Hensel bezog sich hier also allgemein auf Dedekinds Arbeiten zur Idealtheorie, höchstwahrscheinlich jedoch nicht auf dessen *Abriß* [Dedekind, 1857], da dieser eindeutig in einer Reihe mit den genannten Arbeiten von Gauß, Galois und Serret steht.[118] Zum Abschluß seiner Einleitung wies er noch darauf hin,

[110] [2, 1887, 101].
[111] [2, 1887, 101].
[112] [2, 1887, 101].
[113] [2, 1887, 101].
[114] [2, 1887, 102].
[115] [2, 1887, 102f]. Dazu muß man wissen, daß $p$ prim bleibt, wenn die definierende Gleichung der Gattung mod $p$ irreduzibel ist, was z.B. leicht aus §3 von [Dedekind, 1878] folgt, aber sicher auch Kronecker bekannt war. Gauß behandelte übrigens auch Situationen, in denen $F(x)$ nicht irreduzibel ist, vgl. [Frei, 2007].
[116] [2, 1887, 103].
[117] [2, 1887, 103]. Eine solche Arbeit existiert nicht.
[118] Vermutlich kannte er den *Abriß* also nicht, und dies ist ein weiteres Indiz dafür, daß er von Dedekinds *Über den Zusammenhang* [Dedekind, 1878] um 1884 nur den Titel und Kroneckers Bezug darauf kannte, denn der *Abriß* ist die explizite Grundlage von *Über den Zusammenhang*.

daß es Überschneidungen zwischen seiner Arbeit und den oben genannten gibt:

> [S]o kommen naturgemäss einige der im Folgenden abgeleiteten Resultate und Ausdrücke schon in jenen Abhandlungen für den Fall vor, dass $p$ innerhalb $\mathcal{G}$ als irreductibel angenommen wird. Indessen sind auch diese einzelnen Sätze, der allgemeineren Natur unseres Problems entsprechend, stets auf einem von dem früher betretenen abweichenden Wege hergeleitet worden.[119]

### Der Inhalt der Arbeit

Zur höheren Übersichtlichkeit haben Hensels Paragraphen Titel erhalten.

§1 : **Voraussetzungen** Im ersten Abschnitt motivierte Hensel seine Wahl des begrifflichen Rahmens von Kroneckers Grundzügen und stellte einen Hilfssatz bereit, der es erlaubte, Aussagen über alle ganzen Zahlen des Gattungsbereiches zu machen.
Hensel führte zunächst die Kroneckerschen Grundbegriffe Gattung, Gattungsbereich, Fundamentalsystem und Fundamentalform ein. Anschließend "sollen die ganzen algebraischen Zahlen des Bereiches $(\mathcal{G})$ für eine Primzahl $p$ untersucht werden."[120] Da letztere aber nicht irreduzibel bleiben muß und die gewöhnliche Zerlegung in Irreduzible nicht eindeutig ist, nutzte er die Kroneckersche "Theorie der algebraischen Divisoren", da

> man wieder zu einer eindeutigen Zerlegung in einfachste Elemente, und dadurch auch zu einer methodischen Arithmetik gelangen kann, wenn man die algebraischen Zahlen nicht für sich, sondern innerhalb desjenigen weiteren Bereiches behandelt, der durch die Gesammtheit aller algebraischen Formen des Gattungsbereiches $(\mathcal{G})$ mit beliebig vielen Variablen gebildet wird, und von welchem die algebraischen Zahlen offenbar einen Teilbereich bilden.[121]

Er stellte daher den Kalkül der ganzen algebraischen Formen aus §22 der Grundzüge vor, in dem primitive Formen als Einheiten fungieren. (Eine Form ist primitiv, wenn die (ganzzahligen) Koeffizienten ihrer Norm keinen gemeinsamen Teiler haben.[122]) Anschließend hob er als die wesentlichen Punkte für die eindeutige Zerlegung in unzerlegbare Formen hervor:

> 1) Es giebt ein endliches Verfahren, um zu entscheiden, ob ein Divisor durch einen anderen theilbar ist.
> 2) Es giebt ein endliches Verfahren, um den grössten gemeinsamen Theiler zweier Divisoren darzustellen.
> 3) Jede reelle Zahl ist dem Product einer endlichen Anzahl von Divisoren äquivalent.[123]

Damit schloß sich Hensel explizit Kroneckers Konstruktivitätsforderungen an. Um mit Hilfe der Fundamentalform auch Aussagen über alle ganzen Zahlen der Gattung machen zu können, formulierte er den folgenden Satz, in dem $P_1$ einen der irreduziblen Divisoren von $p$ in $(\mathcal{G})$ und $w_1 = u_1\xi_1 + \dots u_n\xi_n$ eine Fundamentalform bezeichnet:

> Bedeutet $w_1$ eine Fundamentalform der Gattung $\mathcal{G}$, so besteht eine ganzzahlige Congruenz
>
> $$F(w_1) \equiv 0 \qquad (\text{modd.} P_1, u_1^p - u_1, \dots, u_n^p - u_n)$$
>
> dann und nur dann, wenn dieselbe Congruenz für jede ganze Zahl des Bereiches $(\mathcal{G})$ und für den Modul $P_1$ erfüllt ist.[124]

---

[119] [2, 1887, 103].
[120] [2, 1887, 104].
[121] Beides [2, 1887, 104f.]. Die angesprochenen algebraischen Formen sind Polynome in Unbestimmten $u_1, \dots, u_z$, deren Koeffizienten ganze algebraische Zahlen der betrachteten Gattung sind.
[122] [2, 1887, 105] bzw. [Kronecker, 1882, 342f].
[123] [2, 1887, 107]. Für den Beweis verwies er auf die Grundzüge.
[124] [2, 1887, 108].

Dieser Hilfssatz stand bereits (etwas allgemeiner formuliert) in der Einleitung der Dissertation [1, 1884, 11]. Die Richtung *nur dann* ist klar, über den Beweis der anderen Richtung schrieb Hensel, daß er "in einer anderen Arbeit gegeben werden" soll.[125] Dies bezieht sich vermutlich auf die sechste der oben aufgeführten Habilitationsarbeiten.

§2 : **Bestimmung eines Fundamentalsystems für den Modul** $P_1$ Hensel zeigte, daß man aus einem beliebigen Fundamentalsystem $\xi_1, \ldots, \xi_n$ eines für den Modul $P_1$ auswählen kann, und zwar wieder in den drei Schritten, die bereits im Fall der Periodenuntergattungen vorkamen:

1. zeigte Hensel, daß für ein $k$-Tupel der $\xi_i$ eine geeignet konstruierte Determinante nicht durch $P_1$ teilbar ist.
2. folgerte er daraus, daß eine Linearkombination mit ganzen Koeffizienten nur dann durch $P_1$ teilbar sein kann, wenn alle Koeffizienten durch $p$ teilbar sind.
3. zeigte er, daß auch jede ganze Zahl der Gattung einer Linearkombination der Elemente $\xi_i$ mit ganzen Koeffizienten zwischen 0 und $p-1$ kongruent ist, indem er nachwies, daß die Lösungen des linearen Gleichungssystems modulo $P_1$ invariant unter $p$-Potenzierung sind und daher als ganze Zahlen gewählt werden können.

Die dabei hauptsächlich benutzte Technik ist wiederholte $p$-Potenzierung, die jetzt nicht mehr die Konjugation über einer Untergattung (des Primdivisors) ist. Sei $w_1 = u_1\xi_1 + \ldots u_n\xi_n$ eine feste Fundamentalform. Es gibt dann ein minimales $\kappa$ mit

$$w_1^{p^\kappa} - w_1 \equiv \sum_h u_h(\xi_h^{p^\kappa} - \xi_h) \equiv 0 \qquad (\text{modd.}\, P_1, u_1^p - u_1, \ldots, u_n^p - u_n).$$

Dies gilt nämlich genau dann, wenn $\xi_h^{p^\kappa} - \xi_h \equiv 0\,(\text{mod.}\, P_1)$ für alle $h$. Für jedes $\xi_h$ gibt es aber ein minimales $k_h$, für das diese Gleichung erfüllt ist, weil es nur endlich viele mod $p$ und damit auch nur endlich viele mod $P_1$ verschiedene Zahlen in $(\mathcal{G})$ gibt. Dann ist $\kappa$ das kleinste gemeinsame Vielfache der $k_h$.[126] Hensel wählte die Notation

$$w_a := \sum_{\beta=1}^{n} u_\beta \xi_\beta^{p^{a-1}} \equiv w_1^{p^{a-1}}(\text{mod.}\, P_1) \qquad\qquad (a = 1, 2, \ldots, \kappa).$$

Dann sind die $w_i$ nach Konstruktion modulo $P_1$ voneinander verschieden, also ist die Form $D(w) = \prod_{h>i}(w_h - w_i)$ nicht durch $P_1$ teilbar. Diese kann man auch als Determinante $D(w) = |w_h^g|$ mit $(h = 1, 2 \ldots, \kappa; g = 0, 1, \ldots, \kappa - 1)$ schreiben. Mit Techniken der Determinantentheorie folgerte Hensel, daß es $\kappa$ unter den $\xi_i$ (O.E. $\xi_1, \ldots, \xi_\kappa$) gibt, so daß

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_\kappa \\ \xi_1^p & \xi_2^p & \ldots & \xi_\kappa^p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{p^{\kappa-1}} & \xi_2^{p^{\kappa-1}} & \ldots & \xi_\kappa^{p^{\kappa-1}} \end{vmatrix}$$

[125] [2, 1887, 108].

[126] Erst aus späteren Aussagen folgt, daß dieses $\kappa$ unabhängig von der Wahl von $w_1$ ist. Diese Frage wurde von Hensel nicht thematisiert.

nicht durch $P_1$ teilbar ist.[127] Weiter ist $\Delta^2$ invariant unter $p$-Potenzierung und damit einer ganzen Zahl kongruent.

Hensel bewies anschließend den Satz:

> Sind $\xi_1, \ldots \xi_\kappa$ $\kappa$ Zahlen eines beliebigen Fundamentalsystems von $(\mathcal{G})$, deren Determinante
>
> $$\left|\xi_h^{p^\delta}\right| \qquad \binom{h=1,2,\ldots\kappa}{\delta=0,1,\ldots\kappa-1}$$
>
> modulo $P_1$ nicht verschwindet, so lässt sich jede ganze algebraische Zahl $\xi$ des Gattungsbereichs $(\mathcal{G})$ für den Modul $P_1$ auf eine und nur auf eine Weise in die Form $u_1\xi_1 + \cdots + u_\kappa\xi_\kappa$ setzen, wenn die Coefficienten $u$ die Werte $0, 1, \ldots, (p-1)$ annehmen dürfen.[128]

Hensel zeigte dazu zuerst, daß zwei verschiedene dieser Zahlen mod $P_1$ inkongruent sind und anschließend, daß für ein gegebenes $\xi$ eine solche Darstellung existiert. Dazu ging er jeweils von der vorliegenden Gleichung durch wiederholtes $p$-Potenzieren zu einem linearen Gleichungssystem mit $\kappa$ Gleichungen und $\kappa$ Unbekannten über, welches er mit Hilfe der Cramerschen Regel mod $P_1$ eindeutig lösen kann. Man kann die Lösungen zunächst modulo $P_1$ ganz wählen, da der Nenner $\Delta^2$ einer reellen ganzen Zahl kongruent ist und daher beseitigt werden kann. Potenziert man das ganze System mit $p$ und zieht es dann vom ursprünglichen ab, so erhält man die Gleichungen

$$(u_1^p - u_1)\xi_1^{p^a} + \cdots + (u_\kappa^p - u_\kappa)\xi_\kappa^{p^a} \equiv 0 \text{ (mod.} P_1) \qquad (a=0,1,\ldots\kappa-1);$$

die zeigen, daß die Lösungen $u_i$ auch “reellen ganzen Zahlen congruent” und modulo $P_1$ eindeutig bestimmt sind.[129]

Daraus folgt insbesondere, daß es $p^\kappa$ modulo $P_1$ inkongruente ganze Zahlen gibt. An diesen konstruktiven Existenzbeweis schloß Hensel die entsprechende Definition:

> Ein System von $\kappa$ Zahlen $\xi_1, \ldots, \xi_\kappa$, durch welches jede Zahl des Gattungsbereichs $(\mathcal{G})$ [modulo $P_1$] in der Form (26.) $\left[u_1\xi_1 + \cdots + u_\kappa\xi_\kappa \binom{u_a=0,1,\ldots(p-1)}{a=1,2,\ldots\kappa}\right]$ dargestellt werden kann, soll ein *Fundamentalsystem* für die Gattung $\mathcal{G}$ und den Modul $P_1$ genannt werden.“[130]

**§3: Die neuen Strukturen** In diesem Abschnitt definierte Hensel die (relativen) Begriffe für den Modul $P_1$. Als Ausgangspunkt schlußfolgerte er aus der Definition von $\kappa$:

> Jede ganze algebraische Zahl des Gattungsbereichs $(\mathcal{G})$ ist eine Wurzel der Congruenz (1). $w^{p^\kappa} - w \equiv 0$ (mod. $P_1$), und die Congruenz (1.) ist die niedrigste dieser Art, welche für *alle* Zahlen des Bereichs besteht.[131]

Er merkte an, daß dieser Satz sonst “immer noch eines besonderes Beweises” bedarf.[132] Dies bezieht sich sowohl auf die Theorie der höheren Kongruenzen, die Hensel ja als den Spezialfall, in dem $p$ prim bleibt, auffaßte, als auch auf Dedekinds Idealtheorie. In beiden Fällen ist der angesprochene Beweis direkt analog dem Beweis des Satzes von Fermat in der elementaren Zahlentheorie.[133]

---

[127] Sei $\xi_{hi} = \xi_h^{p^{i-1}}$ und $M = (w_h^g)$. Wegen $F(x^p) \equiv F(x)^p$ mod $p$ folgt aus $w_1^g = \sum_h U_{gh}\xi_h$ (wobei $U_{gh}$ Formen in $u_i$ sind) auch $w_a^g \equiv \sum_h U_{gh}\xi_{ha}$ mod $P_1$. Dann ist $M \equiv UX$ mod $P_1$ mit $U = (U_{gh})$ und $X = (\xi_{hi})$ $(h = 1, \ldots, n; g, i = 1, \ldots, \kappa)$. Es ist $|M| \equiv \sum U_i D_i$ mod $P_1$, wobei $U_i$ Formen in $u_i$ und $D_i$ die verschiedenen $\kappa \times \kappa$-Unterdeterminanten von $X$ sind. Da $|M|$ nicht durch $P_1$ teilbar ist, muß mindestens ein $D_i$ nicht durch $P_1$ teilbar sein. [2, 1887, 110f].

[128] [2, 1887, 112].

[129] [2, 1887, 114].

[130] [2, 1887, 114]. Der Einschub “[modulo $P_1$]” stellt ein Versehen Hensels richtig, der andere ergänzt den Rückbezug auf die unmittelbar zuvor stehende Formel.

[131] [2, 1887, 114].

[132] [2, 1887, 115].

[133] Dedekind schrieb “man findet leicht”, verwies aber auch auf einen analogen Beweis in einer etwas anderen Situation. [Dedekind, 1871, 254 bzw. 249].

Sind $w_1, \dots, w_s$ in beliebiger Reihenfolge die $p^\kappa$ Zahlen $u_1\xi_1 + \cdots + u_\kappa\xi_\kappa$ ($u_i = 0, 1, \dots, (p-1)$), so erhält man die Zerlegung

$$w^{p^\kappa} - w \equiv \prod_{h=1}^{s}(w - w_h) \qquad (\text{mod.}\, P_1).$$

Hensel ordnete jedem $w_h$ die minimale Zahl $\kappa_h$ zu, für die $w_h^{p^{\kappa_h}} - w_h \equiv 0$ mod. ($P_1$) ist. Dieses $\kappa_h$ ist ein Teiler von $\kappa$ und die Kongruenz (14.) $w^{p^{\kappa_h}} - w \equiv 0$ (mod. $P_1$) hat ebenfalls keine mehrfachen Wurzeln. Die Zusammenfassung der Wurzeln dieser Kongruenz begründete Hensel damit, daß auch Summe und Produkt dieser Wurzeln wieder dieser Kongruenz genügen:

> Alle Zahlen des Bereiches ($\mathcal{G}$), welche Wurzeln der Congruenz (14.) sind, bilden zusammengefasst einen Bereich, dessen Individuen sich durch Addition und Multiplication, modulo $P_1$ betrachtet, wieder erzeugen....Aus diesen sowie aus anderen später zu erörternden Gründen will ich die folgenden drei Definitionen aufstellen:
> I. Eine Zahl $w$, die der Congruenz $w^{p^{\kappa_h}} - w \equiv 0$ (mod. $P_1$) genügt, gehört für den Primdivisor $P_1$ zu einem Gattungsbereich ($\Gamma_h$) der Ordnungszahl $\kappa_h$.
> II. Genügt eine Zahl $w$ der Congruenz $w^{p^{\kappa_h}} - w \equiv 0$ (mod. $P_1$) und keiner anderen von derselben Form, in der der Exponent $\overline{\kappa}_h$ kleiner als $\kappa_h$ ist, so soll $w$ als zur Gattung $\Gamma_h$ der Ordnungszahl $\kappa_h$, oder als zur Ordnungszahl $\kappa_h$ für den Divisor $P_1$ gehörig bezeichnet werden.
> III. Eine Gattung der Ordnungszahl $\kappa_h$ ist unter einer anderen der Ordnungszahl $\kappa'_h$ enthalten, wenn $\kappa_h$ ein Teiler von $\kappa'_h$ ist.[134]

Es wird also für jede ganze Zahl des Gattungsbereichs ($\mathcal{G}$) definiert, zu welcher Gattung und zu welchen Gattungsbereichen sie gehören. Beide sind durch ihre Ordnungszahlen definiert. Herausgestellt wird die Abgeschlossenheit gegenüber Addition und Multiplikation.[135]

§4 : **Anzahlen im Zusammenhang mit den neuen Strukturen** Hensel bestimmte zunächst die Anzahl der inkongruenten Elemente im Gattungsbereich der Ordnungszahl $\kappa_h$ und zwar als $p^{\kappa_h}$ durch explizite Konstruktion eines Fundamentalsystems. Die Anzahl der inkongruenten Zahlen der Gattungen ergibt sich dann durch Auflösung des Gleichungssystems, das die Verteilung der Zahlen der Gattungsbereiche auf die Gattungen beschreibt. Durch Auflösung eines analogen Gleichungssystems kann man auch die Kongruenz bestimmen, die die Zahlen einer Gattung charakterisiert.

Sei jetzt $\kappa_h$ immer ein Teiler von $\kappa$ und $c\kappa_h = \kappa$. Hensel bestimmte zunächst ein Fundamentalsystem (der Kardinalität $\kappa_h$) für den Gattungsbereich ($\Gamma_h$) aus dem Fundamentalsystem $\xi_1, \dots, \xi_k$ für den Modul $P_1$. Dazu benutzte er Eigenschaften der Determinante und eine Symmetrisierungstechnik, die es erlaubte, Elemente des Gattungsbereiches ($\Gamma_h$) zu konstruieren. Er veränderte in

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_\kappa \\ \xi_1^p & \xi_2^p & \dots & \xi_\kappa^p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{p^{\kappa-1}} & \xi_2^{p^{\kappa-1}} & \dots & \xi_\kappa^{p^{\kappa-1}} \end{vmatrix}$$

die ersten $\kappa_h$ Zeilen, in dem er zur $i$-ten alle $k\kappa_h + i$-ten addiert ($i = 1, \dots, \kappa_h, k = 1, \dots, c$). Dies änderte die Determinante nicht, die Elemente dieser Zeilen sind aber nun invariant unter $p^{\kappa_h}$-Potenzierung, also

[134] [2, 1887, 117f]. In diese Begriffsbildung geht ein, daß eine zur Ordnungszahl $\kappa$ gehörige Zahl nur Kongruenzen $w^{p^k} - w \equiv 0$ (mod. $P_1$) mit $\kappa | k$ erfüllt.

[135] Wobei unklar ist, ob in dem "wieder erzeugen" eine stärkere Aussage stecken sollte.

Elemente von $(\Gamma_{\kappa_h})$. Nennt man die so erhaltenen Elemente der ersten Zeile $\zeta_1, \ldots, \zeta_\kappa$, so sind die Elemente der $i$-ten Zeile mod $P_1$ kongruent $\zeta_1^{p^{i-1}}, \ldots, \zeta_\kappa^{p^{i-1}}$ $(i = 1, \ldots, \kappa_h)$. Entwickelt man die Determinante mod. $P_1$ nach den ersten $\kappa_h$ neuen Zeilen, so kann man aus $P_1 \not| \Delta$ folgern, daß es $\kappa_h$ Elemente $\zeta_i$ (O.E. $\zeta_1, \ldots, \zeta_{\kappa_h}$) gibt, so daß

$$\Delta_{\kappa_h} = \begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \ldots & \zeta_{\kappa_h} \\ \zeta_1^p & \zeta_2^p & \ldots & \zeta_{\kappa_h}^p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \zeta_1^{p^{\kappa_h - 1}} & \zeta_2^{p^{\kappa_h - 1}} & \ldots & \zeta_{\kappa_h}^{p^{\kappa_1 - 1}} \end{vmatrix}$$

nicht durch $P_1$ teilbar ist. Die Schlußfolgerung, daß dann $\zeta_1, \ldots, \zeta_{\kappa_h}$ das gesuchte Fundamentalsystem bilden, ist für Hensel klar:

> Dann beweist man wörtlich ebenso, wie dies vorher für die Gattung von der Ordnung $\kappa$ geschehen ist, daß die $\kappa_h$ Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{\kappa_h}$ für den Gattungsbereich der Ordnung $\kappa_h$ in der Weise ein Fundamentalsystem bilden, dass jede zu ihm gehörige Zahl auf eine und nur eine auf eine Weise in die Form
>
> $$u_1\zeta_1 + u_2\zeta_2 + \cdots + u_{\kappa_h}\zeta_{\kappa_h} \qquad (u_i = 0, 1, \ldots p-1)$$
>
> gebracht werden kann. Demnach ist die Anzahl aller incongruenten zum Gattungsbereiche $(\Gamma_h)$ der Ordnungszahl $\kappa_h$ gehörenden Zahlen gleich $p^{\kappa_h}$.[136]

Die zu $(\Gamma_h)$ gehörenden $s_h := p^{\kappa_h}$ inkongruenten Zahlen bezeichnete er mit $w_{1,h}, \ldots, w_{s_h,h}$ und erhielt "für variables $w$ die Congruenz

$$(10.) \qquad w^{p^{\kappa_h}} - w \equiv \prod_{i=1}^{s_h} (w - w_{i,h}) \qquad (\text{mod.}\, P_1)."$$[137]

Nun wendete sich Hensel den Gattungen $\Gamma_h$ zu. Zunächst folgt leicht, daß die Zahlen des Gattungsbereiches $(\Gamma_h)$ alle zu einem Teiler von $\kappa_h$ für den Modul $P_1$ gehören. Daraus erhält man das folgende Gleichungssystem, wenn $g(\kappa_h)$ die "Anzahl der zu einer Gattung $\Gamma_h$ von der Ordnungszahl $\kappa_h$ gehörigen incongruenten ganzen algebraischen Zahlen"[138] bezeichnet:

$$\sum_{d|\kappa_h} g(d) = p^{\kappa_h} \qquad (\text{für } \kappa_h|\kappa). \quad \text{Dessen Auflösung} \quad g(\kappa_h) = \sum_{d|\kappa_h} \varepsilon_d p^d,$$

wird sehr übersichtlich "durch die Benutzung eines Symbols, von dem Herr *Kronecker* in seinen Universitätsvorlesungen häufigen Gebrauch zu machen pflegt".[139] Dabei ist $\varepsilon_d = 0$, falls $\frac{\kappa_h}{d}$ mehrfache Primfaktoren enthält, andernfalls $+1$ wenn die Anzahl der Primfaktoren von $\frac{\kappa_h}{d}$ gerade ist und $-1$ sonst. Für die Positivität der Zahlen $g(\kappa_h)$ zitierte Hensel [Serret, 1866], die Entdeckung der Methode schrieb er Dirichlet zu.

Faßt man nun in der obigen Congruenz (10.) die Faktoren $(w - w_{i,h})$ zu $V_d(w)$ zusammen, bei denen die $w_{i,h}$ zur Ordnungszahl $d|\kappa_h$ gehören, so erhält man das folgende Gleichungssystem (16.) für die $V_d(W)$:

$$w^{p^{\kappa_h}} - w \equiv \prod_{d|\kappa_h} V_d(w)\, (\text{mod.}\, P_1) \quad (\text{für}\, \kappa_h|\kappa). \text{ Auch dessen Lösung } V_{\kappa_h}(w) = \prod_{d|\kappa_h} (w^{p^d} - w)^{\varepsilon_d}$$

gelang nach Ansicht Hensels durch eine Standardtechnik, denn Hensel schrieb darüber:

[136] [2, 1887, 120].
[137] [2, 1887, 120].
[138] [2, 1887, 120].
[139] [2, 1887, 121].

> Nimmt man in (16.) auf beiden Seiten die Logarithmen, so erhält man eine ebensolche Congruenz wie die vorher behandelte. Löst man dieselbe in der dort angegebenen Weise auf und geht wieder von den Logarithmen zu den Functionen selbst über, so erhält man [obige Formel].[140]

§5**: Zuordnung der Exponenten** Anschließend führte Hensel eine weitere ganze Zahl ein, die einen Rest modulo $P_1$ charakterisiert, den Exponenten. Auch die Zahlen, die zum gleichen Exponenten gehören, kann man als Wurzeln einer Kongruenz charakterisieren.
Die Betrachtung des Exponenten motivierte Hensel durch dessen Betrachtung in der elementaren Zahlentheorie:

> Ich wende mich jetzt derjenigen Eintheilung der $p^\kappa$ Zahlen des Restensystems von $(\mathcal{G})$ für den Modul $P_1$ zu, welche auch in der elementaren Zahlentheorie auftritt, nämlich der Anordnung dieser Zahlen nach dem Exponenten, zu dem sie modulo $P_1$ gehören.[141]

Für jede nicht durch $P_1$ teilbare Zahl $w$ von $(\mathcal{G})$ gilt $w^{p^\kappa-1} \equiv 1$ (mod. $P_1$). Der Exponent von $w$ ist das minimale $\sigma_1$, für das $w^{\sigma_1} \equiv 1$ (mod. $P_1$) gilt, dieser ist stets ein Teiler von $\sigma := p^\kappa - 1$ und Hensel zeigte (analog zum Vorgehen in der elementaren Zahlentheorie), daß "für jeden Theiler $\sigma_1$ von $p^\kappa - 1$ die Anzahl der zu ihm als Exponenten gehörigen incongruenten Zahlen gleich $\varphi(\sigma_1)$ ist."[142] Hensel gab noch eine zweite Methode an, um dieses Resultat abzuleiten. Dazu bemerkte er, daß genau die zu einem Exponenten $d|\sigma_1 := p^{\kappa_1} - 1$ gehörenden Zahlen $w$ Elemente des Gattungsbereichs $(\Gamma_1)$ der Ordnungszahl $\kappa_1$ sind. Damit bekommt man wiederum ein Gleichungssystem, das mit Hilfe der Methode Dirichlets und der Bezeichnung Kroneckers aufgelöst werden kann:

> Nennt man daher $\chi(d)$ die Anzahl aller incongruenten, zu $d$ gehörigen Zahlen des Gattungsbereichs $(\Gamma_1)$, so besteht für jeden Theiler $\kappa_1$ von $\kappa$ die Gleichung
>
> $$\sum_{d|\sigma_1} \chi(d) = p^{\kappa_1} - 1 = \sigma_1;$$
>
> und hieraus folgt, genau wie im vorigen Paragraphen:
>
> $$\chi(\sigma_1) = \sum_{d|\sigma_1} \varepsilon_d \cdot d,$$
>
> wo das Symbol $\varepsilon_d$ wieder in Bezug auf $\sigma_1$ dieselbe Bedeutung hat wie früher in Bezug auf $\kappa_1$.[143]

Ebenso kann man nun auch die Congruenz aufstellen, der nur die Zahlen genügen, die zum Exponenten $d$ gehören. Es gilt $w^{p^{\kappa_1}-1} - 1 \equiv (w - w_1)(w - w_2)\dots(w - w_{\sigma_1})$ (mod.$P_1$), wobei $w_i$ alle nicht durch $P_1$ teilbaren inkongruenten Zahlen des Gattungsbereichs $(\Gamma_1)$ der Ordnungszahl $\kappa_1$ durchläuft. Faßt man nun jeweils die zu einem Exponenten gehörigen Faktoren zum Faktor $\Phi_d(w)$ zusammen, so erhält man wieder ein Gleichungssystem, nämlich für jedes $\sigma_1$ die Gleichung $w^{\sigma_1} - 1 = \prod_{d|\sigma_1} \Phi_d(w)$ und dessen Auflösung:

$$\Phi_{\sigma_1}(w) = \prod_{d|\sigma_1} (w^d - 1)^{\varepsilon_d} \equiv 0 \,(\text{mod.}\, P_1).$$

140 [2, 1887, 122].
141 [2, 1887, 122].
142 [2, 1887, 124].
143 [2, 1887, 125].

§6: **Ineinandergreifen beider Klassifikationen, dritte Stufe** In diesem Abschnitt zeigte Hensel zunächst, daß durch Betrachtung des Exponenten nur Zahlen der gleichen Gattung modulo $P_1$ zusammengefaßt werden. Von den Zahlen der Gattung $\Gamma_h$ mit der Ordnungszahl $\kappa_h$ faßt Hensel dann noch je $\kappa_h$ Zahlen zusammen, die zum gleichen Exponenten gehören. Die Bedeutung dieser Gruppierung wird erst im nächsten Abschnitt erläutert.

Betrachtet man nur die zu einer Gattung $\Gamma_h$ der Ordnungszahl $\kappa_h$ gehörenden Zahlen vom Exponenten $\sigma$, so gilt $w^{p^{\kappa_h}-1} \equiv 1$ (mod. $P_1$) und $w^\sigma \equiv 1$ (mod. $P_1$), also $p^{\kappa_h} \equiv 1$ (mod. $\sigma$) und $\kappa_h$ ist auch minimal mit dieser Eigenschaft, d.h. die Exponenten der Zahlen der Gattung

> sind nämlich die sämmtlichen "eigentlichen" Divisoren von $p^{\kappa_h} - 1$, wenn man unter dieser Bezeichnung diejenigen Theiler versteht, die in keiner Zahl von der Form $p^{\overline{\kappa}_h} - 1$ enthalten sind, wenn $\overline{\kappa}_h < \kappa_h$ ist.[144]

Kennt man umgekehrt den Exponenten $\sigma$ einer Zahl, so kann man daraus die Gattung ableiten, der sie angehört, denn es ist die der Ordnungszahl $\kappa$, wobei $\kappa$ minimal mit der Eigenschaft $\sigma | p^\kappa - 1$ bzw. in klassischer Sprechweise: ihre Ordnungszahl ist gleich dem Exponenten, zu dem $p$ für den Modul $\sigma$ gehört. Hensel bewies eine allgemeine Aussage, aus der auch direkt folgte, was die Berechnung der Anzahlen ergibt: $g(\kappa_h) = \sum_{\sigma_i} \varphi(\sigma_i)$, wobei $\sigma_i$ die eigentlichen Teiler von $p^{\kappa_h} - 1$ durchläuft. Anschließend zeigte er, daß mit $w_1$ auch die $w_1^{p^i}$ für $i < \kappa_h$ zur Gattung $\Gamma_h$ der Ordnungszahl $\kappa_h$ gehören, paarweise inkongruent sind und zum gleichen Exponenten gehören. Damit erhielt er folgendes Schema für die "modulo $P_1$ incongruenten Zahlen, die zu einer Gattung $\Gamma_h$ der Ordnung $\kappa_h$ gehören"[145]: Es gibt $d := \frac{g(\kappa_h)}{\kappa_h}$ Zahlen, so daß $w_i^{p^j}$ für $0 < i \leq d, 0 < j < \kappa_h$ "ein vollständiges Restensystem für den Modul $P_1$, und die Gattung $\Gamma_h$ bildet."[146] Hensels Zusammenfassung seiner Klassifikation sei hier ausführlich wiedergegeben:

> Durch diese letzten Resultate ist nun eine vollständige Eintheilung der $p^\kappa$ incongruenten Zahlen des Gattungsbereiches $(\mathcal{G})$ modulo $P_1$ gegeben. – Dieselben zerfallen nämlich zunächst in soviele Gattungen $\Gamma_h$ als $\kappa$ Theiler besitzt. Jede dieser Gattungen enthält $g(\kappa_h)$ incongruente Zahlen. Die $g(\kappa_h)$ zu derselben Gattung $\Gamma_h$ der Ordnung $\kappa_h$ gehörenden Zahlen theilen sich dann nach ihrem Exponenten $\sigma_h^{(\gamma)}$ in soviele Klassen, als $(p^{\kappa_h} - 1)$ eigentliche Divisoren enthält; jede dieser Klassen enthält $\varphi(\sigma_h^{(\gamma)})$ incongruente Zahlen. Endlich theilen sich die $\varphi(\sigma_h^{(\gamma)})$ zu demselben Exponenten $\sigma_h^{(\gamma)}$ gehörenden Zahlen in $\overline{\varphi}(\sigma_h^{(\gamma)}) = \frac{\varphi(\sigma_h^{(\gamma)})}{\kappa_h}$ Gruppen, deren jede $\kappa_h$ Glieder in sich fasst, welche den von einander modulo $P_1$ verschiedenen $(p^\delta)^{\text{ten}}$ Potenzen einer beliebigen unter ihnen congruent sind.
> Die drei hier angegebenen Klassificationen der modulo $P_1$ incongruenten Zahlen des Gattungsbereichs $(\mathcal{G})$ lassen sich demnach in durchaus naturgemässer Weise combinieren, ohne in einander zu greifen.[147]

§7: **Aus irreduziblen Kongruenzen folgende Fundamentalsysteme mod $P_1$** Hensel zeigte zunächst, daß die in der dritten Stufe der Klassifikation zusammengefaßten Zahlen einer irreduziblen Kongruenz genügen. Daran anschließend untersuchte er die Situation, in der zwei verschiedene Gattungen adjungiert werden und sich die irreduzible Kongruenz reduziert. Dies ist sehr explizit möglich, weil Schnitt und Kompositum nur von den Ordnungszahlen abhängen.

Hensels Ziel war es, die "engere Zusammengehörigkeit der zu einer Gattung $\Gamma_h$ der Ordnung $\kappa_h$ modulo $P_1$ gehörigen Zahlen $w_1, w_1^p, \ldots, w_1^{p^{\kappa_h - 1}}$ deutlich [zu] machen."[148] Dazu zeigte er den Satz, der häufige

144 [2, 1887, 127]. Die Bezeichnung "eigentliche Divisoren" übernahm Hensel von Serret.
145 [2, 1887, 131].
146 [2, 1887, 131].
147 [2, 1887, 132].
148 [2, 1887, 132].

Anwendung finde (und auch von ihm bereits benutzt wurde), daß eine unter $p$-Potenzierung mod $P_1$ invariante Zahl des Gattungsbereiches $(\mathcal{G})$ mod $P_1$ einer ganzen Zahl kongruent ist, in der Form:

> Jede Zahl des Gattungsbereiches $(\mathcal{G})$, welche modulo $P_1$ zur Gattung $\Gamma_1$ der Ordnungszahl 1 gehört, ist einer reellen positiven ganzen Zahl congruent.[149]

Daraus folgt unmittelbar, daß die von den Zahlen $w_1, w_1^p, \ldots, w_1^{p^{\kappa_h - 1}}$ erfüllte Kongruenz

$$G_{\kappa_h}(w) = \prod_{\delta=0}^{\kappa_h - 1} (w - w_1^{p^\delta})$$

ganzzahlige Koeffizienten hat. Sie muß auch irreduzibel sein, denn jede Kongruenz, die von einer dieser Zahlen erfüllt wird, wird auch von den übrigen erfüllt. Daraus folgt weiter, daß eine ganze ganzzahlige Function $H(w)$ genau dann für $w = w_1$ durch $P_1$ teilbar ist, wenn $H(w)$ das Modulsystem $(p, G_{\kappa_h}(w))$ im Sinne von Kroneckers Grundzügen enthält, d.h. wenn $H(w)$ modulo $p$ durch $G_{\kappa_h}(w))$ teilbar ist. Hensel kommentierte dieses Ergebnis folgendermaßen:

> Durch diesen Satz ist, wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, ein Weg angegeben, wie man, ohne die Theorie der Primdivisoren zu Hülfe zu nehmen, die in dieser Arbeit abgeleiteten Resultate gewinnen könnte.[150]

Es ist nicht klar, welche Stelle der Einleitung Hensel meinte. Man kann seinen Satz aber dahingehend interpretieren, daß durch dieses Ergebnis der allgemeine Fall wieder auf den speziellen Fall zurückgeführt wurde, der schon von Serret etc. behandelt worden war.
Hensel nannte weiter die Zahlen $w_1, w_1^p, \ldots, w_1^{p^{\kappa_h - 1}}$ "die modulo $P_1$ zu $w_1$ conjugirten Zahlen"[151], weil sie die "sämmtlichen incongruenten Wurzeln einer irreductiblen Congruenz"[152] sind. Diese Übertragung sei auch zweckmässig, weil sie "wie in einer späteren Arbeit gezeigt werden wird, in der That gewissen zu $w_1$ conjugirten Zahlen für einen bestimmten Primtheiler von $p$ congruent sind."[153]
Hensel schlußfolgerte weiter (aus der Irreduzibilität von $G_{\kappa_h}(w)$), daß eine ganzzahlige Kongruenz

$$u_1 w_1^{\kappa_h - 1} + u_2 w_1^{\kappa_h - 2} \cdots + u_{\kappa_h} \equiv 0 \qquad (\text{mod.}\, P_1)$$

nur dann möglich ist, wenn alle Koeffizienten durch $p$ teilbar sind, daß also die Zahlen $1, w_1, w_1^2, \ldots, w_1^{\kappa_h - 1}$ für den Gattungsbereich $(\Gamma_h)$ und den Modul $P_1$ ein Fundamentalsystem bilden.

Der nächste Abschnitt liefert allgemeinere Aussagen, wann die Potenzen einer Zahl ein Fundamentalsystem mod $P_1$ für einen anderen Rationalitätsbereich bilden. Seien dazu $(\Gamma_h)$ und $(\Gamma_i)$ Gattungsbereiche der Ordnungszahlen $\kappa_h$ und $\kappa_i$, $\kappa_{hi}$ der größte gemeinsame Teiler und $K_{hi}$ das kleinste gemeinsame Vielfache von $\kappa_h$ und $\kappa_i$. Hensel betrachtete dann den "grössten, unter $\Gamma_h$ und $\Gamma_i$ zugleich enthaltenen Gattungsbereich $(\Gamma_{hi})$ der Ordnungszahl $\kappa_{hi}$" und den "Gattungsbereich $(\overline{\Gamma}_{hi})$ der Ordnung $K_{hi}$", d.h. den niedrigsten Gattungsbereich "unter dem die beiden Gattungsbereiche $(\Gamma_h)$ und $(\Gamma_i)$ zugleich enthalten sind."[154] Weiter sei $\lambda_h := \frac{\kappa_h}{\kappa_{ih}}$ und $\lambda_i := \frac{\kappa_i}{\kappa_{ih}}$. Hensel zeigte zunächst, daß die irreduzible Gleichung

149 [2, 1887, 133].
150 [2, 1887, 135f].
151 [2, 1887, 136], analog zu den Grundzügen [Kronecker, 1882].
152 [2, 1887, 136]
153 [2, 1887, 136]. Es ist nicht klar, worauf sich diese Aussage bezieht.
154 [2, 1887, 138f].

vom Grad $\lambda_h$, die ein $w_1$ aus $\Gamma_h$ erfüllt, wenn die Koeffizienten aus $(\Gamma_i)$ stammen dürfen, die Gestalt

$$\prod_{k=0}^{\lambda_h-1}(w - w_1^{p^{k\kappa_i}})$$

hat. Weiter zeigte er aber, daß die Koeffizienten dieser Gleichung mod $P_1$ bereits in $(\Gamma_{hi})$ und für bestimmte $w_1$ in keinem darunterliegenden liegen.

Als Beleg für "die grosse Analogie zwischen den hier für einen Primdivisor charakterisierten und den in der Festschrift definierten Gattungen algebraischer Zahlen" formulierte Hensel dieses Ergebnis als die gegenseitige Reduktion zweier Gattungen:

> Es mögen $\kappa_h$ und $\kappa_i$ die Ordnungszahlen zweier beliebigen Gattungen $\Gamma_h$ und $\Gamma_i$ sein. Reduciert sich dann die Ordnungszahl von $\Gamma_h$ unter Adjunction von $\Gamma_i$ auf die Zahl $\lambda_h$ und die Ordnung von $\Gamma_i$ unter Adjunction von $\Gamma_h$ auf $\lambda_i$, so sind $\lambda_h$ und $\lambda_i$ die kleinsten ganzen Zahlen, für welche die Proportion besteht:
>
> $$\frac{\kappa_h}{\kappa_i} = \frac{\lambda_h}{\lambda_i}.$$ [155]

Aus Kardinalitäts- und Irreduzibilitätsgründen folgt, daß die $\lambda_h$ Zahlen $1, w_1, \ldots, w_1^{\lambda_h-1}$ nicht nur für den Gattungsbereich $(\overline{\Gamma}_{hi})$ und den Rationalitätsbereich $\Gamma_i$ ein Fundamentalsystem für den Modul $P_1$ bilden,[156] sondern auch für den Gattungsbereich $(\Gamma_h)$ und den Rationalitätsbereich $(\Gamma_{hi})$, sowie für alle Gattungsbereiche $(\Gamma_{\overline{\kappa}_i})$ und den Rationalitätsbereich $(\Gamma_{hi})$, wenn $\kappa_{hi}$ der größte gemeinsame Teiler von $\kappa_h$ und $\overline{\kappa}_i$ ist.[157]

Den Abschluß der Arbeit bildet die "Zerlegung der Function $(w^{p^\kappa} - w)$ für den Modul $P_1$, also auch für $p$, innerhalb des natürlichen Rationalitätsbereiches."[158] Die irreduziblen Faktoren $\kappa_h$-ten Grades sind dabei die $G_{\kappa_h}(w)$, wobei Hensel aber nicht darauf abhebt, daß dies alle irreduziblen Funktionen $\kappa_h$-ten Grades sind.

### 2.3.3 Eine unbekannte Theorie endlicher Körper?

**Rückschau** Hensel führte in dieser Arbeit durch eine neue Art der Zusammenfassung neue mathematische Objekte ein. Zunächst faßte er die modulo $P_1$ kongruenten Zahlen zusammen, anschließend aber auch inkongruente Zahlen mit gemeinsamen Eigenschaften in Bezug auf $P_1$.

Anlaß dafür war eine Verallgemeinerung bei der Behandlung des Problems der gaDT gewesen: Im Fall der Periodengattungen hatte er gefragt, in was für einer Gattung ein Element $x$ in Bezug auf $P_1$ liegt, d.h. einem Element welcher Gattung es modulo $P_1$ kongruent ist. Die Antwort ließ sich durch Angabe einer ganzen Zahl geben, nämlich der minimalen Zahl $k$, so daß $x$ die Kongruenz $x^{p^k} - x \equiv 0 \mod P_1$ erfüllt.

Davon ausgehend wählte Hensel im allgemeinen Fall diese Charakterisierung als Ausgangspunkt und nannte die so definierten Objekte *Gattungen für den Modul $P_1$*. Die daran anschließende Untersuchung wurde zum Teil durch die Betrachtung der gaDT motiviert, übernahm aber auch Fragestellungen, die der Gattungsbegriff bzw. die Theorie der höheren Kongruenzen nahelegte.

[155] [2, 1887, 138f].

[156] D.h. man hat eine eindeutige Darstellung der Zahlen aus $(\overline{\Gamma}_{hi})$ in der Form $u_1 + u_2 w_1 + \cdots + u_{\lambda_h} w_1^{\lambda_h - 1}$, wobei die $u_i$ "alle $p^{\kappa_i}$ incongruenten Zahlen des Gattungsbereichs $(\Gamma_i)$" annehmen können. [2, 1887, 139].

[157] [2, 1887, 139f]. Letzteres scheint mir eine Fehlformulierung zu sein.

[158] [2, 1887, 140].

Hensels Ordnung der Elemente des vollständigen Restsystems ist in ihren Bedingungen nicht neu: Bei [Dedekind, 1857] gibt es z.B. Entsprechungen zu allen drei Stufen von Hensels Klassifikationsschema. Charakteristisch für Hensel ist (neben der Übertragung auf die veränderte mathematische Situation) nicht nur die Kombination dieser Stufen zu einer Klassifikation, die an Gauß' Klassifikation der quadratischen Formen erinnert, sondern auch die Zusammenfassung der Objekte mit gleichem Klassifikationsmerkmal und die nochmalige Charakterisierung durch eine Kongruenz mod $P_1$.
Darüberhinaus hatte Hensel ein konstruktives Verfahren angegeben, um ein vollständiges Restsystem mod $P_1$ zu bestimmen.
Kroneckers Divisoren- und Formentheorie wird fast nur zur Motivation benötigt. Hingegen nutzte Hensel neben den elementaren Rechenregeln für das $p$-Potenzieren mod $p$ einige Rechenregeln der Determinantentheorie, elementaren Zahlentheorie, sowie Konzepte der Gleichungstheorie.[159]

**Einordnung in die Geschichte der Theorie der endlichen Körper** Es sollen hier nur drei Eckpunkte der Entwicklung der endlichen Körper angeführt werden:[160] Etwa um 1860 waren zwei Aufbaumöglichkeiten der Theorie bekannt. Einerseits kann man wie [Dedekind, 1857] in der sogenannten Theorie der höheren Kongruenzen den Ring $\mathbb{Z}[x]$ modulo $p$ und modulo eines mod $p$ irreduziblen Polynoms betrachten, also mit Hilfe von Identifikationen den betrachteten Bereich einschränken. Andererseits kann man auch, wie [Galois, 1830], von der endlichen Menge $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ausgehen und diese durch Adjunktion von Imaginären, also abstrakten Wurzeln des Polynoms, erweitern.
In der sieben Jahre nach Hensels Habilitation veröffentlichten Arbeit [Weber, 1893] wurden schließlich Körper axiomatisch eingeführt und explizit endliche Körper einbezogen.

Hensel ging (modern gesprochen) von den Elementen eines Zahlkörpers aus und betrachtet diese modulo eines Primdivisors. Dies entspricht der Betrachtungsweise der höheren Kongruenzen, allerdings wird zunächst der Ring $\mathbb{Z}[x]$ modulo eines beliebigen irreduziblen Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten betrachtet und daher als zweiter Modul ein komplizierterer Primdivisor $P_1$ statt $p$ benötigt, da $p$ im Allgemeinen nicht prim wäre.
Zum Abschluß seiner Untersuchungen führte Hensel seinen Fall auf den gewöhnlichen Fall der höheren Kongruenzen zurück, indem er ein mod $p$ irreduzibles Polynom $F$ konstruierte, so daß die Betrachtung modulo $(p, F)$ gerade auf das betrachtete Restsystem führt.

Ordnet man Hensel in das oben skizzierte Dreieck ein, so liegt er daher vom Gegenstand näher an [Dedekind, 1857] und [Galois, 1830] als an [Weber, 1893], von der Herangehensweise näher an [Dedekind, 1857] als an [Galois, 1830]. Es stellt sich daher die Frage, inwiefern sich Hensel *begrifflich* von [Dedekind, 1857] abhebt.
Hensel startete in einer konkreten mathematischen Situation. Er hatte aber das explizite Ziel, von den Kroneckerschen Begriffen der Gattung und des Gattungsbereichs Versionen modulo $P_1$ zu schaffen. Diese

[159]Es handelt sich u.a. um die "Möbiusschen Umkehrformeln" (so benannt von [Haubrich, 1992, 143], die Hensel Dirichlet zuschreibt, Irreduzibilitätsbetrachtungen und Symmetrisierungstechniken, um eine Resolvente mit unter bestimmten Operationen invarianten Koeffizienten zu erhalten.
[160]Zur Geschichte der endlichen Körper vgl. z.B. [Purkert, 1972].

Nähe der Benennung für einen Zahlkörper und den Restklassenkörper als endlichen Körper war in den früheren Theorien nicht zu beobachten gewesen.
Er isolierte sein Untersuchungsobjekt auch nicht von der konkreten Situation. Daher enthalten die von ihm betrachteten Gattungen $\Gamma_h$ und Gattungsbereiche $(\Gamma_h)$ für den Modul $P_1$ unendlich viele ganze Zahlen der ursprünglichen Gattung, wohingegen sich seine Anzahlberechnungen auf ein endliches Restsystem modulo $P_1$ beziehen.[161]
Für die Gattungsbereiche für den Modul $P_1$ thematisierte Hensel die Abgeschlossenheit bezüglich Addition und Multiplikation, nicht aber die Existenz von Inversen. Ein weiterer Unterschied zum modernen Begriff des Körpers ist seine explizite Definition der Untergattungen zu einer Gattung durch die Forderung, ihre Ordnungszahlen sollten Teiler der Ordnungszahl der gegebenen Gattung sein.[162]

Obwohl Hensels Untersuchungen also weit weniger begrifflich bzw. formal sind als diejenigen von [Weber, 1893], sollten Hensels Untersuchungen einen Platz in der Geschichte der endlichen Körper erhalten, da sie insbesondere zeigen, welche Anknüpfungen Kroneckers Terminologie der Grundzüge in diese Richtung erlaubte.

## 2.4 Rückkehr nach Kroneckers Tod: zwei Arbeiten 1894

Nach Kroneckers Tod veröffentlichte Hensel zwei weitere Arbeiten zum Themenbereich der gaDT. Diese enthalten zum größten Teil Ergebnisse aus Hensels (unveröffentlichten) Habilitationsarbeiten.[163] Die erste von ihnen stellt vorbereitend einige Aussagen bereit, die zweite enthält Kriterien in verschiedenen Formulierungen.

### 2.4.1 Zugrundeliegende Theorie

Die nächste veröffentlichte Arbeit, die zum Themenkreis der gaDT gehört, erschien 1894 mit dem Titel *Untersuchung der Fundamentalgleichung einer Gattung für eine reelle Primzahl als Modul und Bestimmung der Theiler ihrer Discriminante*. Hensel beendete die Komposition dieser Arbeit im Oktober 1893. Er stellte zu Beginn heraus, daß seine Untersuchungen unabhängig von der benutzten Theorie der idealen Primdivisoren sind. Insbesondere setzte er eine solche Theorie voraus, beschäftigte sich also nicht mit der Definition der Primdivisoren oder dem Beweis der eindeutigen Zerlegung in Primdivisoren. Wie am Ende deutlich wird, ist die Arbeit jedoch ein Plädoyer für Kroneckers Theorie, insbesondere für dessen Begrifflichkeit der Fundamentalgleichung und die damit verbundene Verwendung von Unbestimmten. Sie wurde zu einer Standardreferenz für Kroneckers Theorie, da sie einige Lücken in den Grundzügen schließt.[164]
Die Ergebnisse dieser Arbeit hatte Hensel bereits 1886 erhalten. Kronecker hob sie in seinem Gutach-

[161] Der Übergang zu den Äquivalenzklassen erfolgt so en passant, daß tatsächlich unklar ist, was Hensel auf die Frage geantwortet hätte, ob eine solche Gattung $\Gamma_h$ endlich oder unendlich viele Elemente enthält.
[162] Bei Benutzung der modernen Definition wäre diese Aussage eine Folgerung.
[163] Vgl. dazu 2.3.1.
[164] Zum Beispiel schreibt Ore in seinem Kommentar zu [Dedekind, 1882] in den gesammelten Werken: "Die Verzweigungstheorie in der Kroneckerschen Formentheorie (Journ. f. Math., Bd. 92, S. 1-122 (1882)) ist von Hensel (ebenda, Bd. 113, S. 61-83 (1894)) entwickelt worden,"[Ore, 1930, 396]. Bereits [Hilbert, 1894, 21] wies auf die Arbeit als Vervollständigung der Kroneckerschen Theorie hin und [Hurwitz, 1895, 199] sah sie als "schönen Beleg für die Kraft des 'methodischen Hilfsmittels der unbestimmten Koeffizienten' in der Theorie der algebraischen Zahlen."

ten zur Habilitation hervor und der Titel einer der Habilitationsarbeiten lautete *8. Ueber die Zerlegung der Fundamentalgleichung einer beliebigen Gattung algebraischer Zahlen in Bezug auf eine eine reelle Primzahl. Beweis der absoluten Aequivalenz der Gattungsdiscriminante und der Discriminante der Fundamentalgleichung.* Kroneckers Gutachten gibt keinen Hinweis auf den Gedankengang dieser Arbeit, er schrieb nur, daß "Hr. Hensel bei seinem Nachweise die Ergebnisse einer Theorie der algebraischen Zahlen selbst zu Hülfe nimmt."[165] Es ist hochwahrscheinlich, daß Hensel auch 1886 zuerst zeigte, daß die Fundamentalgleichung die Kongruenz minimalen Grades ist, der die Fundamentalform für den Modul $p$ genügt, denn die Umformulierung seines Ergebnisses zu den gaDT hatte als Kriterium nahegelegt, daß $p$ dann gaDT ist, wenn alle Zahlen modulo $p$ einer Kongruenz niedrigeren Grades genügen als die Fundamentalform.

Hensel begann damit zu zeigen, daß die Fundamentalform für den Primdivisor $P$ eine irreduzible Kongruenz $k$-ten Grades erfüllt, wenn es $p^k$ modulo $P$ inkongruente Zahlen gibt. Weiter zeigte er, daß für das Produkt von zwei oder mehr Primdivisoren als Modul das Produkt der entsprechenden Kongruenzen als Kongruenz für die Fundamentalform benötigt wird und sich für die Anzahl der inkongruenten Zahlen die Exponenten addieren. Da es $p^n$ modulo $p$ inkongruente Zahlen gibt, muß daher die Kongruenz minimalen Grades, die die Fundamentalform erfüllt, Grad $n$ haben und die konstruierten Faktoren ergeben daher eine Zerlegung der Fundamentalgleichung für den Modul $p$, aus der man direkt die Primdivisoren erhalten kann.

Die Äquivalenz der Gattungsdiskriminante und der Diskriminante der Fundamentalgleichung folgte anschließend daraus, daß die Determinante der Transformationsmatrix, die die Potenzen der Fundamentalform $w$ mit Hilfe eines Fundamentalsystems darstellt, nicht durch $p$ teilbar sein kann, weil sonst $1, w, \dots, w^{n-1}$ nicht modulo $p$ linear unabhängig wären, also $w$ eine Kongruenz niederigeren Grades modulo $p$ erfüllen würde. Ebenso wie Kronecker leitete Hensel anschließend die Fundamentalgleichung ab, um zu zeigen, daß die Teiler der Diskriminante die verzweigten Primzahlen (d.h. die mit mehrfachen Primdivisoren) sind.

Hensels Aussage, daß die Fundamentalform modulo $p$ keine Kongruenz niedrigeren als $n$-ten Grades erfüllt, fügte sich daher als Hilfsmittel nahtlos in Kroneckers Theoriegebäude ein, das von Hensel im Ganzen nochmals vorgestellt wurde. Damit ist verständlich, warum Hensel diese Arbeit 1893 nach Durchsicht von Kroneckers Nachlaß veröffentlichte.[166]

**Darstellung der Arbeit** In §1 stellte Hensel alle Begriffe bereit, die er benötigte, um die Frage "nach der niedrigsten Congruenz, welcher die Fundamentalform $w_0$ für eine beliebige Primzahl als Modul genügt,"[167] zu stellen. Ist $x$ eine Wurzel einer irreduziblen Gleichung $n$-ten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten, so bilden alle rationalen Funktionen $\varphi(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten den Gattungsbereich $(\mathcal{G})$ bzw. "einen Körper in Dedekindscher Bezeichnungsweise".[168] Hensel erläuterte, was die ganzen Zahlen des Bereichs sind, daß ein Fundamentalsystem $\xi_1, \dots, \xi_n$ für diese existiert und daß die Linearform

[165] [GAK, 2].
[166] Allerdings ist nicht klar, warum Kronecker sie nicht schon viel früher (z.B. 1887) veröffentlicht hatte. Vermutlich wollte er noch selbst etwas zu einem ähnlichen Thema veröffentlichen.
[167] [13, 1894, 62].
[168] [13, 1894, 61].

$w_0 = u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + \cdots + u_n\xi_n$ "alle *ganzen* algebraischen Zahlen von $(\mathcal{G})$ und keine anderen dar[stellt], wenn man für die Unbestimmten $(u_1, \ldots, u_n)$ alle voneinander verschiedenen ganzzahligen Werthsysteme setzt."[169] Sie heißt daher *Fundamentalform* und die von ihr nebst ihren Konjugierten erfüllte Gleichung $F(w) = 0$ heißt *Fundamentalgleichung.* Er zeigte, daß $w_0$ "für unbestimmte Werthe der Coefficienten $u_1, \ldots, u_n$ keiner Gleichung von niedrigerem als dem $n$-ten Grad"[170] genügt und legte daher die Frage nahe, ob sie eine Kongruenz niederigeren Grades für den Modul $p$ erfüllt.

Zu Beginn von §2 zerlegte Hensel den Modul $p$ in ideale Primfaktoren und betonte, daß seine weiteren Untersuchungen unabhängig von der gewählten Divisor- oder Idealtheorie ist:

> Wie man diese Primfactoren definiren will, ob in geschlossener Form, als Linearformen mit unbestimmten Coefficienten, wie bei *Kronecker* oder, wie bei *Dedekind*, als die Gesammtheit von unendlich vielen bestimmt charakterisirten ganzen algebraischen Zahlen, ist für die vorliegende Untersuchung völlig gleichgültig. Es kommt hier nur darauf an, dass man erkennen kann, ob eine algebraische Zahl durch einen Primtheiler $P_i$ theilbar ist, oder nicht, und diese Frage kann bei beiden Auffassungsarten leicht entschieden werden.[171]

Sei also $P$ ein Primdivisor von $p$. Hensel fragte nach Eigenschaften, die eine Kongruenz modulo $P$ haben muß, die die Fundamentalform als Wurzel hat. Dazu präzisierte er zunächst, daß dies bedeutet, "dass der Coefficient jedes Potenzproductes von $u_1, \ldots, u_n$ für sich jenen Primtheiler enthält."[172] Er zeigte (durch $p$-Potenzieren), daß mit $w_0$ stets auch $w_i = u_1\xi_1^{p^i} + u_2\xi_2^{p^i} + \cdots + u_n\xi_n^{p^i}$ Wurzel einer gegebenen Kongruenz modulo $P$ ist. Ist dann $\kappa$ minimal mit $w_\kappa \equiv w_0(\text{mod.}\, P)$, so ist $\mathcal{F}(w, u_1, \ldots, u_n) = (w - w_0)(w - w_1) \ldots (w - w_{\kappa-1})$ modulo $P$ betrachtet einer Funktion mit ganzen (reellen) Koeffizienten kongruent, da für alle Koeffizienten $a^p - a \equiv 0 \bmod P$ gilt. Ist $\mathcal{F}(w)$ diese (zusätzlich modulo $p$ reduzierte) Funktion mit ganzen Koeffizienten, dann ist sie modulo $p$ irreduzibel und die Kongruenz $\kappa$-ten Grades $\mathcal{F}(w) \equiv 0(\text{mod}\ P)$ ist die Kongruenz niedrigsten Grades, der die Fundamentalform $w_0$ modulo $P$ genügt.
Die Bestimmung von $\kappa$ ist mit der in [2, 1887] identisch. Der etwas andere Blickwinkel führte allerdings dazu, daß diesmal erst die $w_i$ benannt und die Bedingung mit dieser Bezeichnung formuliert wurden. Die entstehende Kongruenz $\kappa$-ten Grades war in der Arbeit [2, 1887] nicht betrachtet worden, sondern nur ihre Spezialisierungen.
Hensel nannte $\kappa$ die *Ordnungszahl* des Divisors $P$ und zeigte, daß es genau $p^\kappa$ modulo $P$ inkongruente ganze Zahlen in $(\mathcal{G})$ gibt. Dazu bemerkte er, daß für jede ganze Zahl $\xi$ des Bereichs
$\xi^{p^\kappa} - \xi \equiv 0 \mod P$ gilt und betrachtet die Matrix

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \\ \xi_1^p & \xi_2^p & \ldots & \xi_n^p \\ \ldots & & & \\ \xi_1^{p^\lambda} & \xi_2^{p^\lambda} & \ldots & \xi_n^{p^\lambda} \\ \ldots & & & \end{pmatrix}.$$

Alle Unterdeterminanten $\kappa + 1$-ter Ordnung sind durch $P$ teilbar, da dann zwei Zeilen modulo $P$ gleich sind. Weiterhin ist aber mindestens eine Unterdeterminante $\kappa$-ter Ordnung nicht durch $P$ teilbar. Hensel

[169] [13, 1894, 62].
[170] [13, 1894, 62].
[171] [13, 1894, 63].
[172] [13, 1894, 64].

argumentierte dafür mit der nichttrivialen Lösbarkeit eines linearen Kongruenzensystems mod $P$, wenn dessen Determinante durch $P$ teilbar ist und nutzte weiter, daß auch jede Form in $u_1, \dots, u_n$ mit (algebraisch) ganzen Koeffizienten eine eindeutige Darstellung $U_1\xi_1 + \dots + U_n\xi_n$ hat, worin die $U_i$ Formen in den $u_i$ mit ganzen (reellen) Koeffizienten sind. Wären dann alle $\kappa \times \kappa$-Unterdeterminanten durch $P$ teilbar, so müßte auch die Determinante $|w_i^j| = \prod_{i<j}(w_i - w_j)$ durch $P$ teilbar sein im Gegensatz zur Konstruktion.[173]

Sei jetzt die Bezeichnung so gewählt, daß die linke obere Unterdeterminante $\kappa$-ter Ordnung nicht durch $P$ teilbar ist, dann

> bilden die $\kappa$ Zahlen $\xi_1, \dots \xi_\kappa$ für den Divisor $P$ in der Weise ein Fundamentalsystem, dass jede Zahl $\xi$ des Bereiches modulo $P$ auf eine und nur eine Weise in der Form $u_1\xi_1 + \dots + u_\kappa\xi_\kappa$ dargestellt werden kann. Also erhält man alle modulo $P$ incongruenten Zahlen des Gattungsbereiches $(\mathcal{G})$, wenn man in der Form $u_1\xi_1 + \dots + u_\kappa\xi_\kappa$ für $u_1, \dots, u_\kappa$ alle Zahlen der Reihe $0, 1, \dots, p-1$ setzt.[174]

Das Argument hierfür umfaßt wieder die beiden Schritte, daß die Lösung des Kongruenzensystems erst eindeutig und dann wegen Invarianzeigenschaften auch reell ist.

In §3 zeigte Hensel, daß $\mathcal{F}(w_0)$ nicht $P^2$ und auch keinen anderen Primdivisor $P'$ von $p$ enthält, und schlußfolgerte $P \sim p + \mathcal{F}(w_0)$.[175] Dazu benutzte er die Existenz von ganzen Elementen $\pi_0$ bzw. $\pi$ des Bereichs $(\mathcal{G})$, die durch $P$, aber nicht durch $P^2$ bzw. nicht durch $P'$ teilbar sind. Dann konnte er mit Hilfe der Taylorentwicklung zeigen, daß $\mathcal{F}(w_0 + \pi_0)$ bzw. $\mathcal{F}(\pi)$ nicht durch $P^2$ bzw. $P'$ teilbar sind und daher kann auch $\mathcal{F}(w_0)$ für unbestimmte Koeffizienten nicht durch $P^2$ bzw. $P'$ teilbar sein.

Anschließend zeigte Hensel, daß für zwei und damit auch für ein beliebiges Produkt $\overline{P}$ von Primteilern von $p$, welches nur $p$ noch teilt, die Kongruenz niedrigsten Grades, die $w_0$ für den Modul $\overline{P}$ erfüllt, das Produkt der minimalen Kongruenzen für die Faktoren als Modul ist und die Ordnungszahl von $\overline{P}$ die Summe der Ordnungszahlen der Faktoren ist. Wendet man diese Aussage für $\overline{P} = p$ an und "beachtet man dabei, dass die Anzahl der modulo $p$ incongruenten Zahlen des Gattungsbereiches $(\mathcal{G})$ gleich $p^n$, d.h. dass die Ordnungszahl von $p$ selbst gleich $n$ ist,"[176] so folgt, daß die Kongruenz minimalen Grades, der $w_0$ modulo $p$ genügt, vom gleichen Grad ist, wie die Fundamentalgleichung $F(w)$ und damit dieser kongruent modulo $p$.

Ist konkret $p = P_1^{\delta_1} P_2^{\delta_2} \dots P_h^{\delta_h}$, sei $\kappa_i$ die Ordnungszahl von $P_i$ und $\mathcal{F}_i(w)$ die modulo $p$ irreduzible Funktion minimalen Grades, deren Kongruenzwurzel $w_0$ modulo $P_i$ ist, so gilt $\sum \delta_i \kappa_i = n$ und

$$F(w) \equiv \mathcal{F}_1^{\delta_1}(w) \dots \mathcal{F}_h^{\delta_h}(w) (\operatorname{mod} p)$$

und man kann die $\mathcal{F}_i(w)$ und damit auch die Primdivisoren von $p$ aus der Zerlegung der Fundamentalgleichung modulo $p$ gewinnen. Hensel weist an dieser Stelle auf §25 von Kroneckers Festschrift hin, wo dieser Satz nur für $p \not| (n-2)!$ gezeigt worden war.

In §4 nutzte Hensel den gewonnenen Satz, daß die Fundamentalform für jedes $p$ keiner Kongruenz niederen als $n$-ten Grades genügt, um zu zeigen, daß die Diskriminante der Fundamentalgleichung die gleichen

[173] Der Beweis stimmt inhaltlich mit dem in [2, 1887] überein, ist aber etwas übersichtlicher aufgeschrieben.
[174] [13, 1894, 69f].
[175] Dabei bedeutet $\sim$ "als Divisoren äquivalent", man erhält also eine Formel für den Primdivisor $P$.
[176] [13, 1894, 74].

Zahlteiler wie die Gattungsdiskriminante hat.

Seien dazu diesmal $w_i$ die Konjugierten von $w_0$ und $\xi_i^{(0)}, \ldots, \xi_i^{(n-1)}$ die Konjugierten der Elemente des Fundamentalsystems $\xi_i$. Dann ist $D = \left|\xi_i^{(j)}\right|^2$ $(i = 1, \ldots, n; j = 0, \ldots, n-1)$ die Diskriminante der Gattung und $\mathcal{D}(u_1, \ldots, u_n) = |w_i^j|^2$ $(i, j = 0, \ldots, n-1)$ die Diskriminante der Fundamentalgleichung. Stellt man nun die ganzen Formen $w_0^j$ durch die Elemente des Fundamentalsystems $\xi_i$ dar: $w_0^j = U_{j1}\xi_1 + \cdots + U_{jn}\xi_n$ $(j = 0, \ldots, n-1)$, wobei $U_{ji}$ wieder ganze Funktionen der $u_i$ mit ganzzahligen Koeffizienten sind, so ist $\Delta(u_1, \ldots, u_n) = |U_{ji}|$ eine primitive Form, also durch keine Primzahl $p$ teilbar. Aus diesen $n$ Gleichungen erhält man die $n^2$ Gleichungen

$$w_i^j = U_{j1}\xi_1^{(i)} + \cdots + U_{jn}\xi_n^{(i)} \quad \text{für } i = 0, \ldots, n-1,$$

als die "entsprechenden Systeme für die $n$ zu $(\mathcal{G})$ conjugirten Gattungen" und hieraus folgt "mit Hülfe des Multiplicationssatzes für Determinanten"[177] $\mathcal{D}(u_1, \ldots, u_n) = D \cdot \Delta^2(u_1, \ldots, u_n)$ und da $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ primitiv ist, folgt daß die Diskriminante der Fundamentalgleichung dieselben Zahlteiler wie die Gattungsdiskriminante enthält.[178]

In §5 bestimmte Hensel, wie oft $p$ in der Diskriminante der Fundamentalgleichung und damit auch in der Gattungsdiskriminante vorkommt. Dazu leitete er die Kongruenz $F(w) \equiv \mathcal{F}_1^{\delta_1}(w) \ldots \mathcal{F}_h^{\delta_h}(w) (\mathrm{mod}\, p)$ nach $w$ ab, erhielt $F'(w) \equiv \mathcal{F}_1^{\delta_1 - 1} \ldots \mathcal{F}_h^{\delta_h - 1}\Phi(w) \mod p$ und argumentierte, daß $\Phi(w)$ relativ prim zu $\mathcal{F}_i$ ist, wenn $p \not| \delta_i$.[179] Dann ist $F'(w_0)$ genau durch $P_1^{\delta_1 - 1} \ldots P_h^{\delta_h - 1}$ teilbar und daraus ergibt sich eine Gleichung $F'(w_0) = (w_0 - w_1) \ldots (w_0 - w_{n-1}) = P_1^{\delta_1 - 1} \ldots P_h^{\delta_h - 1}\overline{F}$, wobei $\overline{F}$ zu $p$ teilerfremd ist. Bildet man die Norm dieser Gleichung, so erhält man "die wichtige Gleichung

$$\mathcal{D}(u_1, \ldots, u_n) = p^{\kappa_1(\delta_1 - 1) + \kappa_2(\delta_2 - 1) + \cdots + \kappa_h(\delta_h - 1)} \cdot H(u_1, \ldots, u_n),$$

wo $H$ eine ganze zu $p$ teilerfremde Form bedeutet."[180] Dabei wurde benutzt, daß die Norm von $P_i$ gerade $p^{\kappa_i}$ ist. Setzt man $r = \kappa_1 + \ldots \kappa_h$ und berücksichtigt $\kappa_1\delta_1 + \cdots + \kappa_h\delta_h = n$ so ergibt sich

> Ist $p = P_1^{\delta_1} \ldots P_h^{\delta_h}$ die Zerlegung der Primzahl $p$ in ihre Primfactoren und $N(P_1 \ldots P_h) = p^r$ die Norm des Productes aller von einander verschiedenen Primfactoren, so ist die Gattungsdiscriminante genau durch $p^{n-r}$ und durch keine höhere Potenz von $p$ theilbar.
> Eine Ausnahme tritt allein in dem Falle ein, dass einer der Exponenten $\delta_1, \ldots, \delta_h$ durch die Primzahl $p$ theilbar ist.[181]

[177] Beide [13, 1894, 78].

[178] [13, 1894, 78]. Der Beweis wird durch die heute übliche Matrixschreibweise übersichtlicher: Seien $X = (x_{ij})$ mit $x_{ij} = \xi_i^{(j)}$, $U = (u_{ij})$ mit $u_{ij} = U_{ij}$ und $W = w_{ik}$ mit $w_{ik} = (w_k^i)$ $(i = 1, \ldots, n, j, k = 0, \ldots n-1)$, $n \times n$-Matrizen und $w = (w_0^i) = (w_{i0})$, $x = (\xi_i^{(0)}) = (x_{i0})$ Spaltenvektoren. Wäre $|U|$ durch $p$ teilbar, dann gäbe es ganze Formen $v = (V^{(0)}, V^{(1)}, \ldots, V^{(n-1)})$, die nichttriviale Lösungen des Kongruenzensystems $vU \equiv 0 \mod p$ sind und wegen $Ux = w$, wäre $vUx = vw \equiv 0 \mod p$ und also $V_0 + V_1 w_0 + \ldots V_{n-1}w_0^{n-1} \equiv 0 \pmod{p}$, d.h. $w_0$ würde einer Kongruenz $n-1$-ten Grades für den Modul $p$ genügen. Hensel umschrieb diesen Sachverhalt mit den Worten:
"Wäre nämlich $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ durch irgend eine Primzahl $p$ für unbestimmte $u_1, \ldots, u_n$ theilbar, so könnte man in (9.) [das System der Gleichungen] $n$ nicht sämmtlich durch $p$ theilbare ganze ganzzahlige Functionen von $u_1, \ldots, u_n$ $V^{(0)}, V^{(1)}, \ldots, V^{(n-1)}$ so finden, dass wenn man die erste Gleichung mit $V^{(0)}$, die zweite mit $V^{(1)}, \ldots$ die letzte mit $V^{(n-1)}$ multipliciert und sie alle zu einander addirt, auf der rechten Seite der so erhaltenen Congruenz alle Coefficienten durch $p$ theilbar sind" [13, 1894, 77]. Die übrigen Gleichungen ergeben mit den gewählten Bezeichnungen die Matrixgleichung $W = UX$ und daraus folgt $|W|^2 = |U|^2|X|^2$.

[179] Die Idee, die Kongruenz der Fundamentalform abzuleiten, findet sich schon bei Kronecker: "Wenn andererseits $P$ Factor der Discriminantenform ist, so muss wenigstens eine der Zahlen grösser als Eins sein, weil dann die Function $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ mit ihrer nach $\mathcal{R}$ genommenen Ableitung, im Sinne der Congruenz modulo $P$, einen gemeinsamen Theiler hat." [Kronecker, 1882, 381].

[180] [13, 1894, 80].

[181] [13, 1894, 80].

Für diesen Ausnahmefall wilder Verzweigung konnte Hensel schlußfolgern, daß $D$ durch eine höhere Potenz als $p^{n-r}$ teilbar ist, er erhielt also insbesondere den Satz, daß eine Primzahl genau dann in der Diskriminante enthalten ist, wenn sie verzweigt ist, also in $(\mathcal{G})$ mehrfache Primdivisoren besitzt.[182] Hensel benutzte im Anschluß seinen Beweis als Argument zugunsten von Kroneckers Methodik.[183] Dazu formulierte er, daß die

> Fundamentalform $w_0$, die alle ganzen Grössen gleichmässig vertritt,... mit Recht als eine Invariante

der Gattung angesehen werden kann. Dedekind hingegen habe versucht,

> an die Stelle von $u_1, \ldots, u_n$ ganze Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ zu setzen, so dass die so sich ergebenden Grösse $\xi$ modulo $p$ betrachtet einer niedrigsten Kongruenz von gleich hohem Grade wie die Fundamentalgleichung genügt.

Wegen des Auftretens gaDT kann eine solche Zahl im Allgemeinen nicht gefunden werden und daher

> kann der Beweis jener beiden Sätze nicht in der hier durchgeführten einfachen Weise gegeben werden, wenn man, wie dies in der *Dedekind*schen Theorie geschieht, principiell von der Untersuchung von ganzzahligen Formen absieht und nur die ganzen algebraischen Zahlen selbst betrachtet.

Daher benötigte Dedekind einen komplizierteren Beweis:

> Herr *Dedekind* beweist nun a.a.O.[184] diesen Satz mit den Mitteln seiner Theorie auf eine höchst scharfsinnige Weise unter Benutzung der Begriffe der Ordnungen, ihrer Führer, der sog. complementärenBasen etc. dadurch, daß er nachweist, dass die Gattungsdiscriminante die Norm eines Ideales ist und die idealen Primfactoren desselben bestimmt.

Dies benutzte Hensel als Argument dafür, daß Kroneckers Theorie vorzuziehen sei:

> So geistvoll nun auch jene Herleitung ist, so gehört sie zwar zu den schönsten, aber auch zu den schwierigsten der ganzen *Dedekind*schen Theorie, und es scheint, als ob hier die von Kronecker begründete auf die Betrachtung der algebraischen Formen basirte Theorie der algebraischen Zahlen, deren Elemente hier benutzt wurden, einfacher und naturgemässer zum Ziele führt.

insbesondere, da sie es erlaubte, den Beweis zu führen, den auch Dedekind ursprünglich im Auge hatte

> Diese Annahme wird auch dadurch bestätigt, dass der Entdecker jenes Fundamentalsatzes, Herr *Dedekind*, seinen Beweis desselben erst gesucht hat, nachdem er sich von der Unmöglichkeit überzeugt hatte, ihn auf ähnlichem Wege zu beweisen, wie dies hier geschah, wenn man sich auf die Betrachtung der algebraischen Zahlen allein beschränkt.[185]

Weiter versuchte Hensel zu argumentieren, daß die auftretenden Unbestimmten "keineswegs nur aus formalen Gründen in die Untersuchung eingeführt sind", sondern daß "bei einer jeden naturgemäss durchgeführten Untersuchung die in ihr auftretenden Unbestimmten in der allerengsten und nothwendigsten Beziehung zu dem behandelten Probleme stehen."

[182] Dieser Satz war zuerst 1871 von Dedekind angezeigt worden, vgl. [Dedekind, 1871a] bzw. [Dedekind, 1878, 230]. Den Beweis veröffentlichte er aber erst 1882, vgl. [Dedekind, 1882]. [Kronecker, 1882] bewies den Satz nur unvollständig, Hilbert entschied sich im Zahlbericht für Hensels Beweis, vgl. [Hilbert, 1897, 85ff].
[183] Alle Zitate bis Ende des Abschnitts nach [13, 1894, 81-83].
[184] [Dedekind, 1882].
[185] Dies bezieht sich vermutlich auf [Dedekind, 1878, 230] und [Dedekind, 1882, 351].

### 2.4.2 Kriterien

Die Arbeit *Arithmetische Untersuchungen über die gemeinsamen ausserwesentlichen Discriminantentheiler einer Gattung* wurde am 17.11. 1893 abgeschlossen. Auch sie enthält jedoch im Wesentlichen Ergebnisse, die Hensel bereits zur Zeit seiner Habilitation erhalten hatte. In dieser Arbeit findet sich ein expliziter Hinweis darauf, daß Hensel Teile seiner Untersuchungen veröffentlichte, nachdem er sich überzeugt hatte, daß es in Kroneckers Nachlaß keine Manuskripte zu diesem Thema gibt.[186]

Der erste Teil enthält das Ergebnis, das Hensel für den unverzweigten Spezialfall bereits in seiner Dissertation angegeben hatte. Dazu stellte er die Frage, welches die Kongruenz minimalen Grades ist, die ein ganzes Element $\xi$ für den Modul $p$ erfüllt bzw. wann dieser minimale Grad gleich dem Grad $n$ der Fundamentalgleichung ist. Ebenso wie sich die Fundamentalgleichung modulo $p$ aus einzelnen Faktoren für die Primdivisoren von $p$ zusammengesetzt hatte, muß jetzt auch die minimale Kongruenz für $\xi$ für jeden Primdivisor einen Faktor enthalten, allerdings kann es sein, daß ein Faktor für verschiedene Primdivisoren reicht.

Zunächst ergibt sich, daß es kein Element geben kann, dessen minimale Kongruenz modulo $p$ den Grad $n$ hat, wenn es für einen der auftretenden Grade der Faktoren nicht soviele inkongruente Primfunktionen modulo $p$ gibt, wie es Primdivisoren dieses Grades gibt, wie also benötigt würden. Umgekehrt konnte Hensel aber (mit Hilfe einer Konstruktion, die er von Dedekind übernimmt), wenn er zu jedem Primdivisor $P_i$ eine Primfunktion $F_i$ des entsprechenden Grades gegeben hat, zunächst ein Element $x_i$ bestimmen, daß die Kongruenz $F_i(x_i) \equiv 0 \mod P_i$ erfüllt, dann aber auch ein Element $x$, das alle diese Kongruenzen erfüllt. Wenn also die gegebenen Primfunktionen paarweise inkongruent sind, so erfüllt das konstruierte Element $x$ eine minimale Kongruenz $n$-ten Grades modulo $p$.

Auch der Beweis, daß ein Element $x$, das eine minimale Kongruenz $n$-ten Grades modulo $p$ erfüllt, $p$ nicht in der Elementdiskriminante als außerwesentlichen Teiler enthält, ergibt sich ebenso wie im Fall der Fundamentalform: $p$ wäre genau dann in der Elementdiskriminante von $x$ enthalten, wenn die Determinante der Matrix, die $1, x, \ldots, x^{n-1}$ mit Hilfe eines Fundamentalsystems $\xi_1, \ldots, \xi_n$ darstellt, den Faktor $p$ enthielte. Dann wären aber $1, x, \ldots, x^{n-1}$ modulo $p$ nicht linear unabhängig und also würde $x$ modulo $p$ eine Kongruenz niedrigeren als $n$-ten Grades enthalten - im Widerspruch zur Voraussetzung.

Für eine Umformulierung dieses Ergebnisses bemerkte Hensel, daß die Differenz $w_\nu - w_0$ genau durch die Primdivisorenvon $p$ teilbar ist, deren Ordnungszahl ein Teiler von $\nu$ ist. Das ermöglichte es, ein Produkt $P_k$ aufzustellen, das nur durch die Primdivisoren von $p$ teilbar ist, die genau Ordnungszahl $k$ haben. Nur aufgrund dieses Produkts läßt sich dann entscheiden, ob $p$ gaDT ist: Aus der Norm von $P_k$ kann man die Anzahl der Primdivisoren vom Grad $k$ bestimmen und der Grad von $P_k$ in den $\xi_i$ entspricht (da er sich aus einem analogen Gleichungssystem bestimmt) der Anzahl der inkongruenten Primfunktionen vom Grad $k$.

Hensel schloß daran noch ebenfalls durch das Problem der gaDT motivierte Untersuchungen darüber, wann eine primitive ganzzahlige Form für jede ganzzahlige Belegung ihrer Unbestimmten durch $p$ teilbar ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn sie sich modulo $p$ in Summanden der Form $c(u_i^p - u_i)$ zerlegen

[186] "... und ich habe in seinen hinterlassenen Papieren bis jetzt keine Andeutung des Beweises finden können. Ich möchte daher auf diesen Punkt kurz eingehen."[14, 1894, 149].

läßt. Hensel verallgemeinerte dieses Ergebnis wesentlich, indem er fragte, wann eine primitive ganzzahlige Form für jede Belegung mit ganzen Zahlen aus einem Gattungsbereich durch einen Primdivisor $P$ von $p$ teilbar ist. Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn die Form sich modulo $p$ als Summe von Termen $c(u_i^{p^k} - u_i)$ schreiben läßt, wenn $k$ die Ordnung von $P$ ist, also jede Zahl des Bereichs die Kongruenz $x^{p^k} - x \equiv 0 \mod P$ erfüllt.

Diese Aussage ermöglichte es zu untersuchen, aus welcher einfachsten Gattung man die einzusetzenden Zahlen wählen kann, damit das Ergebnis teilerfremd zu $p$ sein kann. Hensel gab sowohl den minimalen Grad einer solchen *Ergänzungsgattung* an, als auch den minimalen Grad, wenn man eine Kreisteilungsgattung bzw. eine Periodengattung nutzen möchte.

**Darstellung der Arbeit**

In §1 leitete Hensel das hinreichende und notwendige Kriterium für gaDT her, das er für den unverzweigten Fall bereits in der Dissertation angegeben hatte. Er ging dazu von der Zerlegung der Fundamentalgleichung der Gattung mod $p$ aus und setzte statt der Fundamentalform $w_0$ eine feste Zahl $\xi = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n$ ein. Damit erhielt er a posteriori die Kongruenz

$$\mathcal{F}_1^{\delta_1}(\xi)\dots\mathcal{F}_h^{\delta_h}(\xi) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p).$$

Damit diese Kongruenz $n$-ten Grades auch die Kongruenz niedrigsten Grades ist, die $\xi$ mod $p$ erfüllt, müssen zunächst zwei einfache Bedingungen erfüllt sein: die $\mathcal{F}_i(\xi)$ müssen mod $p$ irreduzibel und paarweise inkongruent sein. Hensel wies ausdrücklich darauf hin, daß diese Aussage von Dedekind stammt.[187] Er habe auch,

> was besonders hervorzuheben ist, weiter nachgewiesen, dass die Möglichkeit, $h$ solche Functionen $\mathcal{F}_1(\xi), \dots, \mathcal{F}_h(\xi)$ zu finden, nothwendig und hinreichend dafür ist, dass eine Zahl $\xi_0$ existirt, in deren Gleichungsdiscriminante $p$ nicht als ausserwesentlicher Theiler enthalten ist.[188]

Hensel erläuterte, daß Dedekind daraus folgerte, "daß die Theorie der Gattungen nicht auf die der höheren Congruenzen gegründet werden darf".[189] Hingegen sei dies möglich, wenn man

> die Linear*form* $w_0 = u_1\xi_1 + \cdots + u_n\xi_n$ selbst für unbstimmte $u_1, \dots, u_n$ zu Grunde legt, denn in der vorigen Arbeit wurde ja nachgewiesen, dass in *ihrer* Gleichungsdiscriminante *keine* Primzahl $p$ als ausserwesentlicher Theiler enthalten ist.[190]

Er begann damit zu untersuchen, wann es solche irreduziblen Funktionen der entsprechenden Grade überhaupt gibt. Ist $\mathcal{F}_i$ vom Grad $\kappa_i$ irreduzibel und die Kongruenz, der $\xi_0$ für den Modul $P_i$ genügt, so muß $\mathcal{F}_i$ ein Teiler von $\xi^{p^{\kappa_i}} - \xi$ sein, denn auch diese Kongruenz erfüllt $\xi_0$ für den Modul $P_i$. Sind daher $\lambda_i$ der verschiedenen Funktionen $\mathcal{F}_i$ vom Grad $\kappa_i$, so muß es $\lambda_i$ verschiedene irreduzible Teiler von $\xi^{p^{\kappa_i}} - \xi$ vom Grad $\kappa_i$ geben.[191] Für deren Anzahl zitierte Hensel seine Arbeit [2, 1887], verwendete aber Dedekinds Notation: Es "hat $(\xi^{p^\kappa} - \xi)$ genau

$$\overline{g}(\kappa) = \frac{1}{\kappa}(p^\kappa - \sum p^{\frac{\kappa}{q}} + \sum p^{\frac{\kappa}{qq'}} - \sum p^{\frac{\kappa}{qq'q''}} + \dots)$$

[187] Er bezog sich auf [Dedekind, 1878].
[188] [14, 1894, 131].
[189] [14, 1894, 131].
[190] [14, 1894, 131].
[191] Dies ist gleichbedeutend damit, daß $\lambda_i$ der Primdivisoren von $p$ die Ordnungszahl $\kappa_i$ haben, denn die Faktoren $\mathcal{F}_i(\xi)$ ergaben sich ja aus den Faktoren $\mathcal{F}_i(w)$ der Zerlegung modulo $p$ der Fundamentalgleichung. Auf diesen Zusammenhang weist Hensel im Anschluß an sein Argument auch nochmal explizit hin [14, 1894, 136].

irreductible Theiler des Grades $\kappa$, welche sämmtlich von einander verschieden sind, wenn $q, q', q'', \ldots$ die sämmtlichen von einander verschiedenen Primfactoren von $\kappa$ bedeuten."[192] Notwendig dafür, daß es ein $\xi_0$ geben kann, das mod $p$ keine irreduzible Gleichung vom Grad kleiner als $n$ erfüllt, ist damit, daß $\lambda_i \leq \overline{g}(\kappa_i)$ für alle $i$.

Hensel konstruierte im folgenden ein solches $\xi_0$, falls die Bedingungen erfüllt sind. Genauer zeigte er, daß er die irreduziblen Kongruenzen vorgeben kann, die $\xi_0$ für alle Primdivisoren $P_i$ von $p$ erfüllt, wenn diese nur die richtigen Grade haben. Sei also $p = P_1^{\delta_1} \ldots P_h^{\delta_h}$ und $P_i$ von der Ordnungszahl $\kappa_i$. Sind dann $\mathcal{F}_i(\xi)$ $h$ beliebige mod $p$ irreduzible und paarweise inkongruente Funktionen der Grade $\kappa_i$, so gibt es zu jeder von diesen ein $\xi_0^{(i)}$, daß die Kongruenz $\mathcal{F}_i(\xi_0^{(i)}) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, P_i)$ erfüllt. Da es (algebraisch) ganze Zahlen $\pi_i$ gibt, die durch $P_i$, aber nicht durch $P_i^2$ teilbar sind, kann man durch Übergang zu $\pi_i + \xi_0^{(i)}$ erreichen, daß weiterhin $\mathcal{F}_i(\xi_0^{(i)}) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, P_i)$ gilt, aber nun auch $\mathcal{F}_i(\xi_0^{(i)}) \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, P_i^2)$.[193]

Aus der Existenz von Zahlen, die durch genau einen der Divisoren von $p$ nicht teilbar sind, folgert Hensel die Existenz von $\varepsilon_i \equiv \delta_{ij} (\mathrm{mod}\, P_j^2)$. Bildet man dann $\xi_0 = \varepsilon_1 \xi_0^{(1)} + \cdots + \varepsilon_h \xi_0^{(h)}$, so ist offenbar $\xi_0 \equiv \xi_0^{(i)} (\mathrm{mod}\, P_i^2)$. Damit ist aber auch $\mathcal{F}_i(\xi_0)$ durch $P_i$, aber nicht durch $P_i^2$ teilbar und es folgt $p + u\mathcal{F}_i(\xi_0) \sim P_i$. Das so erhaltene Element $\xi_0$ hat die gewünschte Eigenschaft, denn

> man beweist genau ebenso, wie dies für die Fundamentalform $w_0$ im §3 der vorigen Arbeit geschah, dass die Congruenz des $n$-ten Grades
> $$\mathcal{F}_1^{\delta_1}(\xi) \mathcal{F}_2^{\delta_2}(\xi) \ldots \mathcal{F}_h^{\delta_h} \equiv 0 (\mathrm{mod.}\, p)$$
> die niedrigste ist, der $\xi_0$ genügt.[194]

Dieser Beweis entspricht genau dem in [Dedekind, 1878, §4]. Stellt man nun die Potenzen $\xi_0^j$ mit Hilfe eines Fundamentalsystems dar: $\xi_0^k = a_{1k}\xi_1 + \cdots + a_{nk}\xi_n \quad (k = 0, \ldots, n-1)$, so genügt $\xi_0$ genau dann mod $p$ einer Kongruenz niedrigeren als $n$-ten Grades, wenn $p$ die Determinante $|a_{ik}|$ teilt. Das Argument verläuft ebenso genau parallel zu dem in der vorigen Arbeit, wie der zweite Teil, aus dem folgt, daß $\mathcal{D}(\xi_0) = |a_{ik}|^2 D$, wenn $\mathcal{D}(\xi_0)$ die Diskriminante der Gleichung für $\xi_0$ und $D$ die Gattungsdiskriminante ist. Hensel nannte $|a_{ik}|^2$ den *ausserwesentlichen Theiler der Discriminante* $\mathcal{D}(\xi_0)$. Damit ist $p$ genau dann "ein ausserwesentlicher Theiler der Discriminante $\mathcal{D}(\xi_0)$, wenn $\xi_0$ modulo $p$ betrachtet einer Congruenz von niedrigerem als dem $n$-ten Grade genügt."[195] Damit kann man ein Kriterium für das Auftreten gaDT formulieren, in dem statt der Ordnungszahlen der Primdivisoren von $p$ die Grade der Faktoren der Zerlegung der Fundamentalgleichung modulo $p$ vorkommen, für dessen Formulierung man also gar keine Primdivisoren braucht:

> Ist
> $$F(w) \equiv \mathcal{F}_1^{\delta_1}(w) \ldots \mathcal{F}_h^{\delta_h}(w) \quad (\mathrm{mod.}\, p)$$
> die Zerlegung der Fundamentalgleichung einer Gattung $(\mathcal{G})$ in ihre modulo $p$ irreductiblen Factoren und geben die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_\gamma$ an, wie viele derselben bzw. vom Grade $\kappa_1, \ldots, \kappa_\gamma$ in $w$ sind, so ist $p$ dann und nur dann ein gemeinsamer ausserwesentlicher Theiler aller Gleichungsdiscriminanten $\mathcal{D}(\xi_0)$ von $(\mathcal{G})$, wenn von den $\gamma$ Bedingungen
> $$\lambda_1 > \overline{g}(\kappa_1), \ldots, \lambda_\gamma > \overline{g}(\kappa_\gamma)$$
> mindestens eine erfüllt ist.[196]

[192] [14, 1894, 133].
[193] Dies folgt aus der Taylor-Entwicklung, weil die $\mathcal{F}_i$ irreduzibel sind [14, 1894, 135].
[194] [14, 1894, 136].
[195] [14, 1894. 138].
[196] [14, 1894, 138].

Das Ziel des zweiten Paragraphen ist eine Umformulierung dieses Kriteriums, für die man die Fundamentalgleichung nicht mehr mod $p$ zerlegen muß. Dazu betrachtete Hensel neben der Fundamentalform $w_0 = u_1\xi_1 + \cdots + u_n\xi_n$ noch $w_h = u_1\xi_1^{p^h} + \cdots + u_n\xi_n^{p^h}$ und die Differenzen $w_h - w_0$. Hat ein Primdivisor $P$ von $p$ die Ordnungszahl $\kappa$, so ist $w_\kappa \equiv w_0 \mod P$, d.h. $w_\nu - w_0$ ist genau dann teilbar durch $P$, wenn $\kappa|\nu$. Durch eventuelle Modifikation der $\xi_i$, "wodurch der Charakter des Fundamentalsystems modulo $p$ überhaupt nicht geändert wird,"[197] kann man erreichen, daß keine dieser Differenzen durch $P^2$ teilbar ist.

Es gibt daher eine Differenz $w_\nu - w_0$, die durch das Produkt der verschiedenen Primfaktoren von $p$ teilbar ist, aber keine, die durch $p$ teilbar ist, wenn $p$ mehrfache Faktoren enthält. Hensel schlußfolgerte hieraus, daß $p$ genau dann in der Diskriminante der Gattung enthalten ist, wenn keine der Differenzen $w_\nu - w_0$ durch $p$ teilbar ist.[198]

Anschließend stellte Hensel einen Ausdruck $F_\kappa(w_0)$ auf, der genau einmal durch alle Primfaktoren von $p$ der Ordnungszahl $\kappa$ teilbar ist:

$$F_\kappa(w_0) = \prod_{d|\kappa}(w_d - w_0)^{\varepsilon_d}.$$

Zuvor hatte er auch für diesen Ausdruck die ausführliche Schreibweise angegeben.[199] $F_\kappa(w_0)$ hat in den $\xi_i$ den Grad $g(\kappa) = \sum_{d|\kappa}\varepsilon_d p^d = \kappa\overline{g}(\kappa)$. Da $F_\kappa(w_0)$ jeden Primfaktor von $p$ der Ordnung $\kappa$ genau einmal enthält, alle weiteren Primfaktoren von $p$ aber gar nicht, kann man aus dem $p$-Anteil der Norm von $F_\kappa(w_0)$ die Anzahl $\lambda_\kappa$ der Primfaktoren von $p$ der Ordnungszahl $\kappa$ ermitteln: $N(F_\kappa(w_0)) = p^{\kappa\lambda_\kappa}$. Daher kann man das obige Ergebnis unter ausschließlicher Benutzung der Formen $F_\kappa(w_0)$ formulieren:

> Die Primzahl $p$ ist dann und nur dann gemeinsamer außerwesentlicher Theiler aller Gleichungsdiscriminanten $\mathcal{D}(\xi_0)$ des Gattungsbereichs $(\mathcal{G})$, wenn unter den Formen
>
> $$F_\kappa(w_0) = \prod_{d|\kappa}(w_d - w_0)^{\varepsilon_d} \qquad {\scriptstyle(\kappa=1,\ldots,n)}$$
>
> mindestens eine vorhanden ist, deren Dimension in Bezug auf die Elemente $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ des Fundamentalsystems kleiner ist als ihre Ordnungszahl, d.h. als der Exponent $L_\kappa$ von $p$ in der Gleichung $NF_\kappa(w_0) = p^{L_\kappa}$.[200]

In §3 setzte Hensel voraus, daß man die Diskriminante der Fundamentalgleichung $\mathcal{D}(u_1,\ldots,u_n)$ kennt und führte das Problem der gaDT auf die Frage zurück, wann eine primitive Form nach Einsetzen ganzer Zahlen für die Unbestimmten stets durch $p$ teilbar ist. Nach der vorherigen Arbeit ist $\mathcal{D}(u_1,\ldots,u_n) = \Delta^2(u_1,\ldots,u_n)\,D$ und beim Einsetzen von ganzen Zahlen $a_i$ für die $u_i$ erhält man die Diskriminante der Gleichung für $\xi = \sum a_i\xi_i$, der außerwesentlicher Diskriminantenteiler von $\xi$ ist also $\Delta^2(a_1,\ldots,a_n)$. Die Frage ist also, wann die primitive Form $\Delta$ für alle ganzzahligen Wertsysteme durch $p$ teilbar ist.

Hensel bewies nun zunächst induktiv den bereits in der Habilitation angekündigten Satz:

[197] [14, 1894, 140].

[198] Er benutzte hierzu den Satz, daß $p$ in der Diskriminante der Gattung genau dann enthalten ist, wenn $p$ mehrfache Faktoren enthält. Hensel nannte seine Folgerung "für eine folgende Untersuchung von Wichtigkeit" und formulierte sie folgendermaßen: "Die Primzahl $p$ ist dann und nur dann in der Discriminante der Gattung $(\mathcal{G})$ enthalten, wenn eine der Linearformen $(w_\nu - w_0)$ durch eine gebrochene Potenz von $p$, aber nicht durch $p$ selbst theilbar ist."[14, 1894, 141].

[199] Er erläuterte, daß "$\varepsilon_d = \pm 1$ zu setzen ist, je nachdem der zugehörige Theiler $d$ von $\kappa$ eine gerade oder eine ungerade Anzahl *verschiedener* Primfactoren $q, q', q'', \ldots$ weniger enthält als $\kappa$, wo dagegen $\varepsilon_d = 0$ ist, sobald der Quotient $\frac{\kappa}{d}$ irgend welche gleichen Factoren enthält." [14, 1894, 141f]. Die genutzte Technik ist die gleiche wie in [2, 1887], die Darstellung weicht aber ab, denn Hensel argumentierte diesmal anhand des Ausdrucks, daß er wirklich die gewünschte Eigenschaft hat.

[200] [14, 1894, 143].

Eine Form $U(u_1, \ldots, u_n)$ ist für alle ganzzahligen Werthe von $u_1, \ldots, u_n$ durch eine Primzahl theilbar, wenn sie das Modulsystem $(p; u_1^p - u_1, \ldots, u_n^p - u_n)$ enthält, d.h. wenn $U$ in der Form

$$U(u_1, \ldots, u_n) = p \cdot U_0 + (u_1^p - u_1)U_1 + \cdots + (u_n^p - u_n)U_n$$

geschrieben werden kann, wo $U_0, U_1, \ldots, U_n$ ganze ganzzahlige Functionen von $u_1, \ldots, u_n$ bedeuten.[201]

Kronecker hatte bei seiner Erwähnung der gaDT bereits darauf hingewiesen, daß dieser Fall sicher eintritt, wenn die primitive Form sich als ganze homogene Form von Ausdrücken $(u_i^p - u_i)$ darstellen läßt. Hensel wies nun zurecht darauf hin, daß er gezeigt habe, daß nur dieser Fall eintreten kann, darüberhinaus aber auch noch das Vorkommen außerwesentlicher Diskriminantenteiler in der Diskriminante der Fundamentalgleichung ausgeschlossen werden mußte (was er in der vorherigen Arbeit gemacht hatte), um von diesem Ausgangspunkt zu einem vollständigen Kriterium für gaDT zu kommen.[202] Kann man also $\mathcal{D}(u_1, \ldots, u_n)$ berechnen, so ist es leicht zu entscheiden, ob $p$ gemeinsamer außerwesentlicher Diskriminantenteiler ist, denn dazu muß man nur den größten gemeinsamen Teiler der Koeffizienten beseitigen (um zu $\Delta^2$ zu gelangen) und anschließend

alle Coefficienten dieser Form auf ihre kleinsten Reste modulo $p$, alle Exponenten von $u_1, \ldots, u_n$, welche grösser sind als $p-1$, auf ihre kleinsten Reste modulo $p-1$ ... reduciren; dann ist $p$ dann und nur dann ausserwesentlicher Theiler aller Discriminanten von $(\mathcal{G})$, wenn die so erhaltene Form identisch Null ist.[203]

Dieses Verfahren demonstrierte Hensel an einem Beispiel, das er schon in der Dissertation gerechnet hatte.

In §4 untersuchte Hensel, wann eine primitive Form stets durch einen Primdivisor $P$ von $p$ teilbar ist, wenn man für die Unbestimmten ganze Zahlen eines Gattungsbereiches $\Gamma(\zeta)$ einsetzt. Er motiviert dies dadurch, daß Kronecker "auf den merkwürdigen Umstand aufmerksam" gemacht habe, daß man die gaDT

dadurch beseitigen kannn, dass man die Coeffizienten $u_1, u_2, \ldots, u_n$ der Linearform

$$w_0 = u_1\xi_1 + \cdots + u_n\xi_n$$

nicht mehr innerhalb des Bereiches der ganzen Zahlen, sondern in dem grösseren Raume der ganzen algebraischen Zahlen eines anderen Gattungsbereiches $\Gamma(\zeta)$ beliebig annimmt.[204]

Hensel wies darauf hin, daß er in Kroneckers hinterlassenen Papieren keinen Beweis dieser Behauptung habe finden können. Er formulierte zwar die Frage

Wie man die Gattung $\Gamma(\zeta)$ für die Coeffizienten $u_1, \ldots, u_n$ zu wählen hat, damit eine Primzahl $p$ aufhört, gemeinsamer Discriminantentheiler zu sein, und welches die Gattung niedrigster Ordnung ist, deren Adjunction für diesen Zweck nothwendig ist,[205]

setzte aber die Form für den außerwesentlichen Teiler einer Gleichungsdiskriminante als unveränderlich voraus und untersuchte daher eigentlich nur die am Anfang des Abschnitts formulierte Frage.
Hensels Analyse des Induktionsbeweises aus §3 ergab als wesentlich, daß $p$ prim ist und die Kongruenz $u_i^p - u_i$ so viele ganze Kongruenzwurzeln modulo $p$ hat, wie ihr Grad ist. Damit ergab sich ein analoger Satz, wenn die Koeffizienten und Wertesysteme aus dem Gattungsbereich $\Gamma(\zeta)$ stammen dürfen und $p(\zeta)$ ein Primdivisor von $p$ in $\Gamma(\zeta)$ ist:

[201] [14, 1894, 144]. Die Induktion läuft über die Anzahl der Unbestimmten und man isoliert Terme mit $u_1$, um auf die übrigen die Induktionsvoraussetzung anzuwenden.
[202] [14, 1894, 146].
[203] [14, 1894, 146f].
[204] [14, 1894, 148f].
[205] [14, 1894, 149].

> Besitzen dann allgemein die Functionen $F_i(u_i, \zeta)$ modulo $p(\zeta)$ betrachtet innerhalb des Bereiches $\Gamma(\zeta)$ genau so viele incongruente Wurzeln $\zeta_i$ als ihr Grad angiebt, so beweist man wieder ganz wie vorher, dass für eine ganze Function $F(u_1, \ldots, u_n, \zeta)$ die Congruenzen
>
> $$F(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n; \zeta) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\, p(\zeta))$$
>
> für alle Wertesysteme $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ dann und nur dann sämmtlich erfüllt sind, wenn die Function $F(u_1, \ldots, u_n, \zeta)$ durch die Elemente des Divisorensystems $(p(\zeta); F_1(u_1, \zeta), \ldots, F_n(u_n, \zeta))$ homogen und linear mit ganzen Coeffizienten dargestellt werden kann.[206]

Eine Vereinfachung ergibt sich, wenn alle Funktionen ganzzahlige Koeffizienten haben und nur die Wertesysteme aus $\Gamma(\zeta)$ stammen, denn dann kann man in dem Divisorensystem äquivalent auch $p$ statt $p(\zeta)$ fordern.

Betrachtet man nun die ganzen algebraischen Zahlen von $\Gamma(\zeta)$ als die Congruenzwurzeln modulo $p(\zeta)$ der $n$ Funktionen $u_i^{p^k} - u_i$, wobei $k$ die Ordnungszahl des Divisors $p(\zeta)$ ist, so formuliert Hensel den sich ergebenden Satz wiederum im Vokabular der gaDT

> Der Primdivisor $p(\zeta)$ ist für den Rationalitätsbereich $\Gamma(\zeta)$ dann und nur dann gemeinsamer außerwesentlicher Theiler aller Gleichungsdiscriminanten von $(\mathcal{G})$, wenn die von ihrem Zahlenfactor befreite Gattungsdiscriminante von $(\mathcal{G})$, $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ das Divisorensystem $P_k = (p; u_1^{p^k} - u_1, \ldots, u_n^{p^k} - u_n)$ im *Kronecker*schen Sinne enthält.[207]

Die nächste Frage ist, ob man andernfalls auch ein $n$-Tupel in $\Gamma(\zeta)$ finden kann, für das $\Delta(u_1, \ldots u_n)$ prim zu $p$ ist. Dies ist aber möglich, denn hat man für die verschiedenen Primteiler $p_i(\zeta)$ von $p$ Resttupel gewählt, für die jeweils $\Delta(u_1, \ldots u_n)$ nicht durch $p_i(\zeta)$ teilbar ist, so kann man $n$ Elemente finden,[208] die bezüglich $p_i(\zeta)$ den jeweiligen Rest lassen und für die also $\Delta(u_1, \ldots u_n)$ prim zu $p$ ist.

Hensel nannte die Gattung $\Gamma(\zeta)$ eine *Ergänzungsgattung*, wenn es in $\Gamma(\zeta)$ ganze Zahlen gibt, für die $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ zu $p$ relativ prim ist. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß $\Delta$ die Divisorensysteme $P_k$ nicht enthält, wobei $k$ die Grade der Primdivisoren von $p$ in $\Gamma(\zeta)$ durchläuft.[209]

Im abschließenden §5 bestimmte Hensel sowohl eine Ergänzungsgattung minimalen Grades, als auch eine Kreisteilungsgattung bzw. Periodengattung minimalen Grades, die Ergänzungsgattung ist.

Zu einer Ergänzungsgattung minimalen Grades kam er, indem er das erste Divisorensystem $P_k$ bestimmt, welches in $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ nicht enthalten ist und $\zeta$ als Wurzel einer mod $p$ irreduziblen Gleichung $k$-ten Grades wählt. Dann ist $p$ in $\Gamma(\zeta)$ prim von der Ordnung $k$ und es ist daher nur $P_k$ zu prüfen, welches in $\Delta$ nicht enthalten war. Hensel formulierte eine Bemerkung, die modern formuliert besagt, daß alle Erweiterungen $k$-ten Grades von $\mathbb{F}_p$ isomorph sind:

> ... so erkennt man, dass es für $p$ nur einen einzigen Gattungsbereich $\Gamma(\zeta)$ giebt, welcher ein Ergänzungsbereich niedrigster Ordnung in Bezug auf $\mathcal{G}(\xi)$ ist. Dieser letzte Ausspruch ist so zu verstehen, dass die ganzen Grössen zweier Gattungsbereiche $k$ter Ordnung, welche modulo $p$ irreductibel sind, einander für diese Primzahl paarweise kongruent sind, so dass bei der hier behandelten Frage der eine Bereich für den anderen gesetzt werden kann.[210]

---

[206] [14, 1894, 150].

[207] [14, 1894, 152].

[208] Z.B. mit Hensels obiger Konstruktion, er schreibt nur "was offenbar möglich ist." [14, 1894, 153]

[209] Hensel merkte noch an, daß man $P_{ak}$ nicht mehr prüfen muß, wenn das System nicht durch $P_k$ teilbar war, [14, 1894, 154].

[210] [14, 1894, 156].

Wiederum dadurch motiviert, daß Kronecker bei seinem Beispiel die Gattung der dritten Einheitswurzeln adjungiert hatte, versuchte Hensel nun auch noch die algebraisch einfachsten Ergänzungsgattungen zu finden. Es ist möglich, eine minimale Gattung der $q$-ten Einheitswurzeln ($q$ prim), sowie innerhalb dieser die Periodenuntergattung minimalen Grades, die noch Ergänzungsgattung ist, zu bestimmen, da man genau weiß, wie $p$ in diesen Gattungen zerfällt. Es werden dabei alle Ordnungen der Primdivisoren explizit ausgeschlossen, für die $P_k$ in $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ enthalten ist. Hensel erhielt:

> Es sei $(\mathcal{G})$ eine beliebige Gattung $n$ter Ordnung und $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ die von ihrem Zahlentheiler befreite Discriminante ihrer Fundamentalgleichung. Ferner sei $p$ irgend eine reelle Primzahl und es bezeichnen $P_{k_1}, P_{k_2}, \ldots, P_{k_l}$ alle diejenigen Divisorensysteme von der Form: $P_k = (p; u_1^{p^k} - u_1, \ldots, u_n^{p^k} - u_n)$; welche in $\Delta$ enthalten sind, und von deren Indices $k_1, \ldots, k_l$ keiner ein Vielfaches eines anderen ist.
> Ist dann $\nu$ die kleinste Primzahl, welche in der ganzen Zahl $F(p) = (p^{k_1} - 1) \ldots (p^{k_l} - 1)$ nicht enthalten ist, so ist die Gattung $\Gamma_\nu$ der $\nu$ten Einheitswurzeln die niedrigste dieser Art, welche eine Ergänzungsgattung der Gattung $(\mathcal{G})$ ist, und ferner ist die unter ihr enthaltene Periodengattung $\Gamma_\nu(\lambda)$ der $\lambda$ $\mu$-gliedrigen Perioden der $\nu$ten Einheitswurzeln die niedrigste dieser Art, welche noch dieselbe Eigenschaft besitzt, wenn $\mu$ der grösste Theiler von $\nu - 1$ ist, für welchen die Zahl $f(p^\mu)$ die Primzahl $\nu$ nicht enthält.[211]

**Datierung**

Es erscheint sehr wahrscheinlich, daß mit Ausnahme von §2 Hensel alle Ergebnisse bereits 1886 bekannt waren. Für die Umformulierung in §2 gibt es andererseits auch keine Indizien, daß sie so alt sein könnte. Allerdings ist ebenfalls nicht klar, für welche spätere Arbeit Hensel sie benötigte. Vermutlich stand der erste Paragraph in der 3. Habilitationsarbeit und darin wurde auf die achte Habilitationsarbeit verwiesen, ebenso wie im Text auf [13, 1894]. Die Ergebnisse des §4 und eventuell auch die detailierten Ausführungen des §5 sind hingegen wohl schon in der Dissertation enthalten: In seiner knappen Zusammenfassung schrieb Hensel, der Satz, wonach eine Form genau dann für alle ganzzahligen Werte durch $q$ teilbar sei, wenn sie das Divisorensystem $(q, u_1^q - u_1, \ldots, u_\nu^q - u_\nu)$ enthalte, lasse sich noch erweitern. Er führe dann zu der Aussage, daß die Form die Primzahl $q$ sicher nicht stets als Teiler enthalte, wenn $q$ in der Gattung, aus der die einzusetzenden ganzen Zahlen stammen, in Faktoren der Ordnungszahl $k$ zerfällt und $q^k > \nu(\nu - 1)$ ist.[212] Die Gattung könne "als Gattung von Einheitswurzeln bestimmt" und deren minimale Ordnung explizit berechnet werden.[213]

## 2.5 Die Diskriminante in der allgemeinen Situation

Wie man an den Titeln der Habilitationsarbeiten erkennt, beschäftigen sie sich alle mit der zahlentheoretischen Situation. Ein Rückschluß auf ihren Inhalt ist allenfalls durch einen Blick auf die Arbeit *Ueber Gattungen, welche durch Composition aus zwei anderen Gattungen entstehen* [5, 1889] möglich, die zwar in der allgemeinen Situation angesiedelt ist, auf deren Besonderheiten aber gar nicht näher eingeht.
In der oben besprochenen Arbeit [13, 1894] behauptete Hensel, die Zerlegung eines Primdivisors in Primdivisoren erster Stufe mit Hilfe der Fundamentalgleichung auch für beliebige Rationalitätsbereiche zeigen zu können:

[211] [14, 1894, 159f].
[212] [1, 1884, 11]. Das entspricht nicht ganz der Grobabschätzung in §4 [14, 1894, 155]. Die Diskrepanz beruht aber vermutlich auf einem Flüchtigkeitsfehler.
[213] [1, 1884, 11].

> Diese Erweiterung des Satzes ist hier nicht gegeben worden, um die Einfachheit der Herleitung deutlicher erkennen zu lassen; es ist sehr leicht, den Satz auf diesem Wege für einen beliebigen Rationalitätsbereich zu beweisen, wie in einer späteren Arbeit dargelegt werden soll.[214]

Die genannte Arbeit gibt Anhaltspunkte, was Hensel glaubte, auch allgemeiner bewiesen zu haben.

### 2.5.1 Der Gedankengang

Die Arbeit [5, 1889] ist ein erster Versuch, mit Hilfe der Bestimmungsstücke zweier Gattungen etwas über die komponierte Gatttung auszusagen. Hensel beschränkte sich in ihr daher auf den einfachsten Fall: Die beiden Gattungen sind linear unabhängig und es tritt keine wilde Verzweigung auf.[215] In diesem Fall stellte er sich die Aufgabe, die ganzen Elemente und die Diskriminante der komponierten Gattung zu bestimmen.

Eine der Hauptschwierigkeiten mit dieser Arbeit ist, daß Hensel unveröffentlichte Ergebnisse nutzte, auch ohne sie explizit anzusprechen. Sein Vorgehen legt die Interpretation nahe, daß er überhaupt keine zusätzlichen Schwierigkeiten in der allgemeinen Situation sah. Daher ging er davon aus, daß seine im zahlentheoretischen Fall erlangten Ergebnisse auch hier Bestand hätten.

Er setzte daher voraus, daß die Primdivisorzerlegung des Primdivisors $P$ aus der Zerlegung der Fundamentalgleichung modulo $P$ bestimmt werden kann und aus dieser der $P$-Anteil der Diskriminante.[216] Dabei läßt sich zuordnen, welcher Anteil der Diskriminante zu welchem Primdivisor gehört.

Hensel nannte ein System, dessen Diskriminante den gleichen $P$-Anteil hat wie die Diskriminante eines Fundamentalsystems, ein *Fundamentalsystem für den Modul $P$*, denn mit dessen Hilfe können nur dann durch $P$ teilbare Elemente dargestellt werden, wenn sämtliche Koeffizienten durch $P$ teilbar sind.

Er stellte sich die Aufgabe, ein Fundamentalsystem für den Modul $P$ aus den Fundamentalsystemen für die Primdivisoren $P_i$ von $P$ zusammenzusetzen. Anschließend versuchte er, in dem so erhaltenen System die Verteilung des $P$-Anteils der Diskriminante auf die Primdivisoren wiederzufinden. Dazu führte er gebrochene Potenzen von $P$ ein und ordnete jeder Spalte der Matrix, deren Determinantenquadrat die Diskriminante bildet, die gebrochene Potenz von $P$ zu, die man aus ihr herausziehen kann.[217]

Durch komplizierte Rechnungen mit Divisorensystemen konnte Hensel für sein zusammengesetztes Fundamentalsystem zeigen, daß bereits der gesamte $P$-Anteil der Determinante aus den Spalten herausgezogen werden kann. Ein solches Fundamentalsystem für den Modul $P$ nannte er *normal*. Wesentlich für diesen Begriff ist die Betrachtung von gebrochenen Potenzen eines Primdivisors. Hensels konkretes Beispiel stammt wiederum aus der Situation Periodenunterkörper, so daß diese möglicherweise auch den Ausgangspunkt füt diesen Theorieteil Hensels bildete.

Startet man mit normalen Fundamentalsystemen für den Modul $P$ für beide Gattungen, so kann man in dem von Hensel betrachteten einfachen Fall aus den Produkten der Elemente nur durch eventuelle Division durch $P$ wieder ein normales Fundamentalsystem für die komponierte Gattung bilden, mit dessen Hilfe

[214] [13, 1894, 76]. Es ist allerdings nicht klar, ob er damit die zahlentheoretische Situation mit einem algebraischen Körper als Grundkörper meint, oder tatsächlich die allgemeine Situation. Für beide Situationen gibt es keine Arbeiten von ihm.

[215] Dies ist nur eine Bedingung, falls $P$ eine Primzahl ist: Keiner der Exponenten der Primdivisorzerlegung von $P$ darf durch $P$ teilbar sein.

[216] $P$ ist dabei prim im ursprünglichen Rationalitätsbereich, entspricht also $p$ in der zahlentheoretischen Situation. Für die Aussage über den $P$-Anteil der Diskriminante geht ein, daß wilde Verzweigung ausgeschlossen wurde.

[217] Zur Erinnerung: In den Spalten stehen die Konjugierten der einzelnen Elemente des Fundamentalsystems.

man also sowohl die in Bezug auf $P$ ganzen Zahlen darstellen, als auch unmittelbar die Diskriminante berechnen kann.

### 2.5.2 Darstellung der Arbeit

#### Die Einleitung

In der Einleitung vermittelte Hensel die Vorstellung, daß es eine einheitliche arithmetische Theorie gibt, die erst Kronecker auch im allgemeinen Fall entwickelt hatte:

> Die arithmetische Theorie stellt sich als Hauptaufgabe die Erkenntniss der Eigenschaften einer beliebigen Gattung, d.h. die Untersuchung desjenigen Zahlen- und Formenreiches, welches durch alle rationalen Functionen einer Wurzel einer vorgelegten algebraischen Gleichung bestimmt ist.[218]

In dieser würden sich zunächst drei Fragen stellen,

> die vollständige Darstellung aller ganzen algebraischen Grössen..., ferner die Bestimmung der Discriminante der Gattung..., endlich die Zerlegung einer beliebigen rationalen Function in ihre innerhalb der Gattung unzerlegbaren Factoren.[219]

die Hensel als beantwortet ansah:

> [S]ie sind in dem allgemeinsten Falle in den "Grundzügen einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen" von Herrn *Kronecker* mit einer Vollständigkeit und Einheitlichkeit behandelt worden, welche die Hinzufügung von Wesentlichem ausschließt.[220]

Als "nächsten Schritt, welcher in dieser Theorie zu thun ist",[221] bezeichnete er die Untersuchung der Komposition zweier Gattungen. Sein Ziel war es, die Antworten auf die obigen Fragen aus den Antworten für die komponierenden Gattungen abzuleiten. Etwas übertrieben formulierte er, daß diese Frage

> für die Theorie und besonders auch für ihre Anwendungen etwa dieselbe Wichtigkeit besitzt, wie für die elementare Zahlentheorie die Untersuchung der zusammengesetzten Zahlen.[222]

Er wollte mit der Arbeit [5, 1889] nur den Anfang zur Bewältigung der aufgeworfenen Probleme machen und beschränkte sich daher auf den (einfacheren) Fall, in dem die Ordnung der komponierten Gattung gleich dem Produkt der Ordnungen der komponierenden Gattungen ist. Für diesen behauptete er, die beiden ersten Aufgaben gelöst zu haben:

> Damit ist dann die Möglichkeit gegeben, alle ganzen algebraischen Formen einer aus zwei anderen componirten Gattung darzustellen und zu untersuchen, sobald dieselbe Aufgabe für jene beiden Gattungen gelöst ist. Mit Hülfe dieses Resultates ist es dann möglich, die Discriminante der componirten Gattung a priori zu bestimmen, sobald man die entsprechenden Fragen für die beiden componirenden Gattungen gelöst hat.[223]

Für die dritte Aufgabe sowie den allgemeinen Fall kündigte er weitere Arbeiten an.

[218] [5, 1889, 329].
[219] [5, 1889, 329].
[220] [5, 1889, 329]. Diese Behauptung ist etwas überraschend, denn selbst im bestausgeführten zahlentheoretischen Fall hatten wir ja gesehen, daß die Arbeit [13, 1894] als wesentliche Ergänzung angesehen wurde.
[221] [5, 1889, 329].
[222] [5, 1889, 329f]. Der Vergleich zur elementar-zahlentheoretischen Situation ist in der Zeit nicht ungewöhnlich, z.B. beschreibt Dedekind die Relation des Enthaltenseins zwischen Körpern mit Begriffen der Teilbarkeitstheorie, vgl. [Dedekind, 1871].
[223] [5, 1889, 330].

**Bereitstellung der Hilfsmittel - das spezielle Fundamentalsystem**

Im längsten Abschnitt I. motivierte, definierte, rechtfertigte und behandelte Hensel den Begriff des *normalen Fundamentalsystems für den Modul $P$*. Dazu führte er zunächst den Begriff *Fundamentalsystem für den Modul $P$* ein, konstruierte ein solches und wies dessen konkrete Eigenschaften nach, die die speziellere Definition nahelegen.

Es sei $\mathcal{G}$ eine Gattung $m$-ter Ordnung über dem natürlichen Rationalitätsbereich $(\mathcal{R}, \mathcal{R}', \dots)$. Für die Frage, wie oft ein $P$ (prim in $(\mathcal{R}, \mathcal{R}', \dots)$) in der Diskriminante der Gattung $\mathcal{G}$ enthalten ist, ist es nützlich,

> wenn man für die Darstellung der Zahlen von $\mathcal{G}$ ein *Fundamentalsystem für den Modul $P$*, d.h. ein System von $m$ so gewählten Formen:
>
> $$(1.) \quad \xi_{11}, \xi_{12}, \dots \xi_{1m}$$
>
> zu Grunde legt, dass eine Congruenz:
>
> $$(2.) \quad u_1\xi_{11} + u_2\xi_{12} + \dots + u_m\xi_{1m} \equiv 0 \pmod{P},$$
>
> deren Coefficienten $u_1, u_2, \dots u_m$ rational und ganz sein sollen, nur dann bestehen kann, wenn alle Coefficienten den Divisor $P$ enthalten.[224]

Es wird hier ein Teil der Bedingungen an ein (absolutes) Fundamentalsystem gefordert, nämlich daß die Darstellung eines ganzen Elements mit Hilfe dieses Systems keinen Nenner $P$ hat. Für Hensel war selbstverständlich, daß umgekehrt ein System auch dann ein (absolutes) Fundamentalsystem ist, wenn es für jeden Primdivisor $P$ ein Fundamentalsystem für den Modul $P$ ist, denn er erwähnt dies beiläufig acht Seiten später.[225] Hensel begründete weiter, warum das Fundamentalsystem für den Modul $P$ zur Berechnung des $P$-Anteils der Diskriminante benutzt werden kann:

> Da nämlich ein solches Fundamentalsystem in ein absolutes durch eine den Divisor $P$ nicht enthaltende Substitution übergeht, so wird seine Discriminante
>
> $$(3.) \quad D^2 = |\xi_{hk}|^2 \qquad (h, k = 1, 2, \dots m)$$
>
> diesen Modul ebenso oft als jene [Discriminante der Gattung] enthalten, und es kann daher diese der Untersuchung zu Grunde gelegt werden.[226]

An dieser Stelle ging Hensel offenbar davon aus, daß es ein absolutes Fundamentalsystem mit $m$ Elementen auch im allgemeinen Fall gibt. Kronecker hingegen hatte in den Grundzügen behauptet, man benötige im allgemeinen Fall mehr als $m$ Elemente, woraus sich auch eine leicht modifizierte Definition der Diskriminante ergibt.[227]

Hensel schwächte den Begriff des gewöhnlichen Fundamentalsystems ab, da er ein Fundamentalsystem für den Modul $P$ leichter in Abhängigkeit von $P$ konstruieren konnte. Er setzte es aus den Fundamentalsystemen für die Primdivisoren $P_i$ von $P$ mit Hilfe von Vorfaktoren zusammen.[228]

Sei dazu $P \sim P_1^{\delta_1} P_2^{\delta_2} \dots P_h^{\delta_h}$ und $\kappa_i$ die Ordnungszahl von $P_i$, "d.h. es sei: $N_{\mathcal{G}} P_i \sim P^{\kappa_i}$ ."[229] Hensel

[224] [5, 1889, 330f]. Bei Hensels Beschäftigung mit den gaDT ging es (implizit) um die Frage, ob das spezielle System $1, w, \dots, w^{m-1}$ diese Eigenschaft (für $p$) hat.

[225] [5, 1889, 337].

[226] [5, 1889, 337].

[227] Vgl. [Kronecker, 1882, §§ 6 u. 8]. In späteren Arbeiten berücksichtigte Hensel Kroneckers Aussage (vgl. 3.5), bestritt sie jedoch noch später im konkreten Fall zweier Variablen (vgl. 4.5). Es ist also sehr unwahrscheinlich, daß er Kronecker an dieser Stelle widersprechen wollte.

[228] Es erscheint wahrscheinlich, daß Hensel hier sein Vorgehen in der zweiten Habilitationsarbeit auf den allgemeinen Fall übertrug.

[229] [5, 1889, 331].

behauptete implizit die Existenz eines Fundamentalsystems für den Modul $P_i$ “in dem oben für $P$ charakterisierten Sinne” mit $\kappa_i$ Elementen.[230] Daß die Existenz eines solchen Systems im allgemeinen Fall problematisch ist, wird im nächsten Abschnitt erläutert.

Das Fundamentalsystem $\xi_{11}, \dots, \xi_{1m}$ für den Modul $P$ besteht aus den Elementen

$$\frac{P}{P_{i,1}^{\delta_i - r}} \xi_{1s}^{(i)} \qquad (i = 1, \dots, h; r = 0, 1, \dots, \delta_i - 1, s = 1, 2, \dots, \kappa_i),$$

wobei $\xi_{1s}^{(i)}$ die Elemente eines Fundamentalsystems mod $P_i$ sind.[231]

Hensel betrachtete die Determinante $D = |\xi_{hk}|$ der aus den Elementen des Fundamentalsystems für den Modul $P$ und deren Konjugierten gebildeten Matrix und den größten gemeinsamen Teiler $\pi_{ir}$ der Vorfaktoren einer Spalte dieser Matrix

$$\pi_{ir} = \mathrm{ggT}\left(\frac{P}{P_{i,1}^{\delta_i - r}}, \dots, \frac{P}{P_{i,m}^{\delta_i - r}}\right).$$

Betrachtet man nur die $\kappa_i \delta_i$ einem $P_i$ entsprechenden Spalten der Matrix, so kann man aus je $\kappa_i$ von ihnen $\pi_{ir}$ herausziehen, insgesamt also $\pi = \prod_{r=0}^{\delta_i - 1} \pi_{ir}^{\kappa_i}$. Hensel berechnete $\pi_{ir}$ mit Hilfe des Kalküls der Modulsysteme:

$$\left(\frac{P}{P_{i,1}^{\delta_i - r}}, \dots, \frac{P}{P_{i,m}^{\delta_i - r}}\right)^{\delta_i} \sim \left(\frac{P^{\delta_i}}{P_{i,1}^{\delta_i(\delta_i - r)}}, \dots, \frac{P^{\delta_i}}{P_{i,m}^{\delta_i(\delta_i - r)}}\right) \sim P^r \left(\left(\frac{P}{P_{i,1}^{\delta_i}}\right)^{\delta_i - r}, \dots, \left(\frac{P}{P_{i,m}^{\delta_i}}\right)^{\delta_i - r}\right) \sim P^r,$$

also $\pi_{ir} \sim P^{\frac{r}{\delta_i}}$.

Dabei benutzte er zunächst $M \sim (M_1, M_2, \dots) \longrightarrow M^t \sim (M_1^t, M_2^t, \dots)$, was er “in einer späteren Arbeit eingehend” darlegen wollte.[232] Den Schluß

$$\left(\left(\frac{P}{P_{i,1}^{\delta_i}}\right)^{\delta_i - r}, \dots, \left(\frac{P}{P_{i,m}^{\delta_i}}\right)^{\delta_i - r}\right) \sim 1$$

rechtfertigte Hensel mit den Worten, daß das links stehende Modulsystem “zu jedem der zu $P_{i1}$ conjugirten Divisoren, also auch gegen ihre Norm, d.i. gegen $P$ relativ prim, also äquivalent Eins” ist.[233] Ermöglicht wird die ganze Berechnung durch die Zulassung gebrochener Potenzen von Primdivisoren, mit denen nach der Regel $\pi^\delta \sim P^k \longrightarrow \pi \sim P^{\frac{k}{\delta}}$ (auch wenn $\frac{k}{\delta}$ nicht ganz ist) gerechnet wird.

Da gilt

$$\frac{\kappa_i}{\delta_i} \sum_{r=0}^{\delta_i - 1} r = \frac{\kappa_i}{2\delta_i} \delta_i(\delta_i - 1) = \frac{1}{2} \kappa_i(\delta_i - 1),$$

folgt $\pi \sim P^{\frac{1}{2}\kappa_i(\delta_i - 1)}$ und wegen $m = \kappa_1 \delta_1 + \cdots + \kappa_h \delta_h$ und mit $m_1 := \kappa_1 + \cdots + \kappa_h$ erhält man die Aussage, man könne $P^{m - m_1}$ aus der Diskriminante $D^2$ herausziehen.[234]

[230] Trotz der ungewohnten Formulierung, d.h. dem Schwerpunkt auf der linearen Unabhängigkeit modulo $P_i$ und nicht auf der Darstellbarkeit aller Elemente mit Hilfe des Systems, erkennt man leicht, daß dieser Begriff eines Fundamentalsystems für den Modul $P_i$ mit demjenigen übereinstimmt, den Hensel im zahlentheoretischen Spezialfall in [1, 1884] bzw. [2, 1887] eingeführt hatte. Die Koeffizienten sind dabei als rationale Elemente schon durch $P$ teilbar, falls sie durch $P_i$ teilbar sind.

[231] Das $j$-te Konjugierte des obigen Elements ist dann

$$\frac{P}{P_{i,j}^{\delta_i - r}} \xi_{js}^{(i)}. \text{ Wegen } \sum \kappa_i \delta_i = m \text{ erhält man wirklich } m \text{ Elemente.}$$

[232] [5, 1889, 332]. Diese Behauptung ist eher überraschend, so daß Olaf Neumann sie explizit bewies, [Neumann, 2001, 158].

[233] [5, 1889, 332]. Sein Argument würde einen Zusammenhang zwischen allen Primdivisoren von $P$ und allen Konjugierten eines Primdivisors erfordern, der im nicht-galoisschen Fall nicht trivial ist.

[234] [5, 1889, 332f].

Hensel behauptete, “dass die auf dem vorhin angegebenen Wege aus den Verticalreihen herausgehobene Potenz von $P$ auch die höchste in $D^2$ enthaltene Potenz dieses Divisors ist”, schloß hierbei aber explizit den (modern formuliert) Fall der wilden Verzweigung aus.[235] Er betrachtete die Diskriminante “der von $u_1\xi_1 + \cdots + u_m\xi_m$ nebst ihren conjugierten für unbestimmte $u_1, \ldots u_m$” erfüllten Gleichung, also der Fundamentalgleichung, die, wie “eine einfache Determinantenumformung” zeige, durch $D^2$ teilbar sei und daher den Divisor $P$ mindestens $(m - m_1)$ Mal enthalte. Weiter behauptete er aber, man könne “leicht nachweisen, dass jene Gleichungsdiscriminante den Divisor $P$ auch nicht öfter enthält.”[236] Daraus folge nun (außer im Fall der wilden Verzweigung) “ein neuer Beweis des wichtigen Satzes von der Aequivalenz der Gattungsdiscriminante und der Discriminante der Fundamentalgleichung.”[237] Insbesondere folgt aber auch, daß allein die Betrachtung der Vorfaktoren bei dem speziellen System schon zur Berechnung des $P$-Anteils der Diskriminante ausreicht.

**Begrifflichkeiten - Anwendungen des speziellen Systems**

Das betrachtete spezielle Fundamentalsystem für den Modul $P$ diente Hensel als Motivation für den Begriff *normales Fundamentalsystem* $\eta_{11}, \ldots, \eta_{1m}$ *für den Modul* $P$. Ein solches hat die folgenden drei Eigenschaften:

- Die $\eta_{1i}$ sind linear unabhängig.
- Ist $P^{\varrho_i}$ der größte gemeinsame Teiler von $P$ mit den Elementen einer Spalte der Matrix $(\eta_{ij})$, so sind alle $\varrho_i$ echte Brüche.
- Es ist $\varrho = \sum \varrho_i$ die größte Potenz von $P$, die in $D = |\eta_{ij}|$ enthalten ist.[238]

Akzeptiert man die gebrochenen Potenzen, so kann man mühelos mit Hilfe der Cramerschen Regel zeigen, daß ein System mit diesen Eigenschaften wirklich modulo $P$ linear unabhängig ist: Sei dazu

$$\sum_{k=1}^{m} u_k \eta_{ik} = P\eta_i$$

für $i = 1$ die Darstellung einer durch $P$ teilbaren Form und $i = 2, \ldots, m$ die daraus folgenden konjugierten Gleichungen. Dann ergibt sich $Du_k = D_k$, “wo $D_k$ aus $D$ dadurch hervorgeht, dass an Stelle der Elemente ihrer $k$ten Verticalreihe die Elemente $P\eta_1, \ldots, P\eta_m$ gesetzt werden.”[239] Also enthält $D_k$ den Divisor $P$ häufiger als $D$, jedes $u_k$ also eine positive Potenz von $P$ und da die $u_i$ aus dem Rationalitätsbereich stammen, folgt, daß sie $P$ enthalten müssen.

Hensel zog aus dem speziellen Fundamentalsystem eine weitere Schlußfolgerung, die eine abkürzende

[235] [5, 1889, 333]. Der Fall ist, daß $P$ eine Zahl ist und einen der Exponenten $\delta_i$ teilt. Hensel schrieb: “Dieser ganz specielle Fall bietet grössere Schwierigkeiten dar, besitzt aber deshalb ein besonderes Interesse, weil hier zum ersten Male eine Beziehung zwischen arithmetischen und algebraischen Eigenschaften der Gattungen hervortritt.”

[236] Damit bezieht er sich wahrscheinlich auf die Untersuchungen seiner achten Habilitationsarbeit, die im Abschnitt 2.4.1 dargestellt wurden. Noch in der späteren Veröffentlichung [13, 1894, 76] behauptete er, seine Theorie lasse sich auf beliebige Rationalitätsbereiche ausdehnen.

[237] Alle Zitate [5, 1889, 333]. Dieser Satz war zu diesem Zeitpunkt in einer Veröffentlichung noch gar nicht vollständig bewiesen, vgl. [Kronecker, 1882, 376f].

[238] [5, 1889, 334]. Offenbar kann in $\varrho$ nur der Nenner 2 auftreten.

[239] [5, 1889, 334].

Sprechweise erlaubte: Er betrachtete als weitere Invarianten der Gattung die Divisorensysteme $(D_s)$, deren "Elemente die sämmtlichen Unterdeterminanten einer bestimmten $s$ten Ordnung der Discriminante der Gattung sind."[240] Bildet man analog das Divisorensystem $(\Delta_s)$ für die aus $m$ beliebigen Formen $\zeta_{11}, \ldots, \zeta_{1m}$ und ihren Konjugierten gebildete Matrix, so ist $(D_s)$ ein Teiler von $(\Delta_s)$, insbesondere sind $(D_s)$ und $(\Delta_s)$ äquivalent, wenn $\zeta_{11}, \ldots, \zeta_{1m}$ ebenfalls ein Fundamentalsystem ist.[241]

Interessiert man sich nur für "die Theiler, welche $(D_s)$ mit $P$ gemeinsam hat",[242] so kann man diese auch aus einem Fundamentalsystem modulo $P$ bestimmen, also zum Beispiel dem aufgestellten. Für dieses ist aber $(D_s, P) \sim 1$ für $s \leq m_1$, denn es gibt in der aufgestellten Matrix eine $s \times s$-Unterdeterminante, die prim zu $P$ ist.[243] Für $s > m_1$ tritt hingegen mindestens ein Teiler $\pi_{ir}$ mit $r \neq 0$ auf, der einer gebrochenen Potenz von $P$ äquivalent ist. "[D]er Modul $(D_s, P)$ wird also jetzt nicht mehr primitiv sein."[244]

Hensel nannte das maximale $s$ mit $(D_s, P) \sim 1$ den *Rang der Determinante mter Ordnung modulo P* und erhielt daher die Aussage, daß die Determinante $|\eta_{ij}|$ eines beliebigen Fundamentalsystems für den Modul $P$ vom Rang $k$ modulo $P$ ist, wenn genau $P^{m-k}$ die Diskriminante teilt.

Er behauptete weiter, "dass es mit Benutzung unseres Fundamentalsystemes leicht ist, den Theiler, welchen der Modul $(D_s)$ mit $P$ gemeinsam hat, in jedem Falle zu bestimmen, wenn man nur die Zerlegung von $P$ für die Gattung $\mathcal{G}$ vollständig kennt."[245]

### Die Anwendung auf die Komposition

In den weiteren Abschnitten zeigte Hensel, wie man mit Hilfe der normalen Fundamentalsysteme für den Modul $P$ die Diskriminante eines Kompositums berechnen kann.[246]

Hat man allgemein Fundamentalsysteme $\xi_{1i}$ bzw. $\eta_{1j}$ $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ für die Gattungen $\mathcal{G}_1$ und $G_1$ gegeben, so ist das System der $mn$ Produkte $\xi_{1i}\eta_{1j}$ linear unabhängig und aufgrund der Formel $|\xi_{hi}\eta_{ik}| = |\xi_{hi}|^n \cdot |\eta_{ik}|^m$ enthält die Diskriminante des komponierten Systems den Divisor $P$ gerade $n(m-m_1)+m(n-n_1)$-mal, wenn $m_1, n_1$ wie oben den Rang der jeweiligen Matrix modulo $P$ bezeichnen.

Hensel zeigte zunächst am Beispiel der Periodengattungen, daß das komponierte System im Allgemeinen kein Fundamentalsystem ist und wie man es modifizieren kann. Sei dazu $p$ eine Primzahl und $p - 1 = m\mu = n\nu$, wobei $m$ und $n$ teilerfremd sind. Dann betrachtete er die Gattungen der $m$ $\mu$-gliedrigen und der $n$ $\nu$-gliedrigen Perioden, sowie deren Kompositum, die Gattung der $mn$ $\frac{p-1}{mn}$-gliedrigen

[240] [5, 1889, 335]. Hier ist mit Discriminante die Determinante gemeint, deren Quadrat die Diskriminante ist.

[241] Als Argument nannte Hensel den "erweiterten Multiplicationssatz für Determinanten," [5, 1889, 335].

[242] [5, 1889, 335].

[243] Man wähle alle Spalten mit $r = 0$ und die Zeilen so, daß die Konjugierten des Primdivisors $P_{01}$ bereits allen Primdivisoren entsprechen, so daß schon

$$\left(\left(\frac{P}{P_{i,k_1}^{\delta_i}}\right), \ldots, \left(\frac{P}{P_{i,k_s}^{\delta_i}}\right)\right) \sim 1$$

ist, worin $k_1, \ldots, k_s$ die gewählten Zeilen bzw. Konjugierten sind. Hensel formulierte hingegen, "da man ja alsdann sogar eine Matrix finden kann, deren sämmtliche Determinanten $s$ter Ordnung, modulo $P$ betrachtet, ein primitives Modulsystem bilden."[5, 1889, 336].

[244] [5, 1889, 336].

[245] [5, 1889, 336]. Auf diesen Aussagentyp ist Hensel zumindest in den nächsten zwanzig Jahren nicht zurückgekommen.

[246] Der Abschnitt beginnt gleich mit einer verwirrenden Formulierung, es soll nämlich der "wesentliche Theiler einer aus zwei Gattungen componirten dritten Gattung" bestimmt werden, [5, 1889, 337]. Offenbar fehlt hier das Wort Diskriminante. Weiterhin erhält man aber auch einen Hinweis darauf, wie Hensel Diskriminante konzipierte. In der Einleitung schrieb er nämlich, die Diskriminante sei der größte gemeinsame Teiler aller Gleichungsdiskriminanten. Dieser hat nun einen außerwesentlichen und einen wesentlichen Teiler und letzterer soll bestimmt werden. Unklar ist, warum dieses Wort dann erst hier auftaucht.

Perioden. Die Diskriminante aller drei Gattungen ist vom Rang 1 (also $m_1 = n_1 = 1$), die Exponenten von $p$ in den Gattungsdiskriminanten sind daher $m-1, n-1$ bzw. $mn-1$ und die Diskriminante des komponierten Systems ist durch $p^{mn-1+(m-1)(n-1)}$ teilbar. Letzteres ist also nur für $m = 1$ oder $n = 1$ ein Fundamentalsystem für den Modul $p$. (Hensel merkte weiter an, daß der Fall, wo das komponierte System kein Fundamentalsystem für den Modul $p$ ist, "schon bei den drei- und viergliedrige Perioden der dreizehnten Wurzeln der Einheit auftaucht."[247])

Die Ursache hierfür sah Hensel darin, daß von den Produkten einige durch $p$ selbst teilbar sind, falls nämlich $(\xi_i\eta_j)^{nm} \sim p^k$ mit $k > nm$ gilt. Teilt man die betreffenden Produkte durch $p$, so erhält man den gewünschten Exponenten kleiner als Eins.

Der Verallgemeinerung dieses Vorgehens widmete Hensel einen neuen Abschnitt. Geht man nun von normalen Fundamentalsystemen für den Modul $P$ aus, so kann man leicht kontrollieren, welche gebrochene Potenz von $P$ man aus einer Spalte der Determinante des komponierten Systems herausziehen kann und insbesondere nachrechnen, daß dies alle Potenzen von $P$ sind, die überhaupt in der Diskriminante enthalten sind. Um zusätzlich noch die letzte Bedingung für ein normales Fundamentalsystem zu erfüllen, müssen die Elemente und damit auch die Spalten der komponierten Matrix durch eine geeignete ganzzahlige Potenz von $P$ dividiert werden, bis sich nur noch $P^k$ herausziehen läßt, wobei $k$ ein echter Bruch ist. Der Rang der komponierten Matrix modulo $P$ ist die Anzahl der Spalten, die überhaupt keinen Teiler von $P$ mehr enthalten.

Sind also $\varrho_i$ die Exponenten, die bezeichnen, welche gebrochene Potenz von $P$ man aus den Spalten der Matrix zu dem normalen Fundamentalsystem für den Modul $P$ von $\mathcal{G}$ herausheben kann und $\sigma_j$ die entsprechenden für $G$, so ergibt sich die Frage, wie oft $\varrho_i + \sigma_j$ größer als Eins ist. Für die Angabe einer Formel nutzte Hensel wieder das spezielle normale Fundamentalsystem. Dann weiß man mit Hilfe der Primdivisorzerlegung von $P$ in $\mathcal{G}$ bzw. $G$, welche Brüche wie oft in den $\varrho_i$ bzw. $\sigma_j$ auftreten. Ist $(\delta_i, \varepsilon_j)$ der größte gemeinsame Teiler der Exponenten $\delta_i$ und $\varepsilon_j$, so erhielt Hensel:

> Sind $\mathcal{G}_1$ und $G_1$ zwei Gattungen $m$ter und $n$ter Ordnung, $(\mathcal{G}_1, G_1)$ die aus ihnen componirte Gattung von der $(mn)$ten Ordnung, sind ferner: $P \sim P_1^{\delta_1} \dots P_h^{\delta_h}$ und $P \sim \Pi_1^{\varepsilon_1} \dots \Pi_k^{\varepsilon_k}$ die Zerlegungen eines beliebigen rationalen Primdivisors $P$ in seine Primfactoren innerhalb $\mathcal{G}_1$ und $G_1$, und sind endlich $\kappa_1, \dots, \kappa_h; \lambda_1, \dots, \lambda_k$ die Ordnungszahlen jener Divisoren, so sind
>
> $$\begin{aligned} m - \sum_{r=1}^{h} \kappa_r &= \sum_{r=1}^{h} \kappa_r(\delta_r - 1), \\ n - \sum_{s=1}^{k} \lambda_s &= \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(\varepsilon_s - 1), \\ mn - \sum_{r=1}^{h}\sum_{s=1}^{k} \kappa_r\lambda_s(\delta_r, \varepsilon_s) &= \sum_{r=1}^{h}\sum_{s=1}^{k} \kappa_r\lambda_s\{\delta_r\varepsilon_s - (\delta_r, \varepsilon_s)\} \end{aligned}$$
>
> die Exponenten derjenigen Potenzen von $P$, welche als wesentliche Theiler in den Discriminanten der Gattungen $\mathcal{G}_1, G_1$ und $(\mathcal{G}_1, G_1)$ enthalten sind.[248]

Hensel hob noch zwei Spezialfälle hervor: Ist $P$ in der Diskriminante von $G_1$ überhaupt nicht enthalten, so sind alle $\varepsilon_k$ Eins und man erhält als Exponenten $(m - m_1)n$, also das $n$fache des Exponenten von

[247] [5, 1889, 339]. Zur Erinnerung, diese bildeten Hensels allerersten mathematischen Untersuchungsgegenstand.
[248] [5, 1889, 343].

$P$ in der Diskriminante der Gattung $\mathcal{G}_1$. Sind die Exponenten der beiden Zerlegungen von $P$ paarweise teilerfremd, so vereinfacht sich das Ergebnis auf $mn - m_1 n_1$.

### 2.5.3 Interpretation im allgemeinen Fall?

Wie während der Darstellung der Arbeit bereits angedeutet wurde, wirft Hensels Arbeit einige Probleme auf. Diese betreffen besonders, aber nicht nur, den allgemeinen Fall mit mindestens zwei Variablen.
Zunächst stellt sich die Frage nach der Existenz eines Fundamentalsystems für den Modul $P$. Hensel ging stillschweigend von der Existenz eines (absoluten) Fundamentalsystems mit $m$ Elementen aus und daraus folgt natürlich insbesondere die Existenz eines Fundamentalsystems für den Modul $P$.
Weiterhin ist der von Hensel benutzte Begriff der Diskriminante aus dem Text nicht zu entnehmen. Am plausibelsten ist, daß er Diskriminante als den "grössten gemeinsamen Theilers aller ihrer [der Gattung] Gleichungsdiscriminanten"[249] definierte, in dieser aber einen wesentlichen und einen außerwesentlichen Teiler unterschied, wobei der wesentliche Teiler wie bei Kronecker als der größte gemeinsame Teiler aller Diskriminanten von $n$ beliebigen ganzen Elementen definiert ist.[250] Gleichzeitig wollte er aber die Diskriminante mit Hilfe des (absoluten) Fundamentalsystems mit $m$ Elementen berechnen.
Auch wenn ein absolutes Fundamentalsystem im Allgemeinen mehr als $m$ Elemente benötigt, kann man jedoch die Existenz eines Fundamentalsystems für den Modul $P$ mit $m$ Elementen zeigen, mit dessen Hilfe man den $P$-Anteil der Diskriminante bestimmen kann. (Hensel machte dies in [26, 1897].)

Die zweite Frage betrifft die Zerlegung von $P$ in Primdivisoren. Welche Primdivisoren sind hier gemeint und warum ist die Zerlegung in diese eindeutig? Die einzige sinnvolle Interpretation ist, daß Hensel mit Kroneckers Primdivisoren erster Stufe arbeitete.[251] Wie unter anderem [Lucius, 1996] und [Neumann, 2001] herausgearbeitet haben, entsprechen diesen Kroneckerschen Primdivisoren minimale (von Null verschiedene) Primideale und der Multiplikation der Primdivisoren entspricht eine Operation mit diesen Idealen, die nicht die normale Idealmultiplikation ist. Die eindeutige Zerlegung in diese Primdivisoren ist gewährleistet.[252]
Aus dieser Antwort folgt das nächste Problem, denn Hensel schloß aus $N_{\mathcal{G}} P_i \sim P^{\kappa_i}$ auf die Existenz von $\kappa_i$ für den Modul $P_i$ linear unabhängigen Elementen. Da den Primdivisoren im allgemeinen Fall keine maximalen Ideale entsprechen, ist $\mathcal{O}/P_i$ kein Körper und es gibt insbesondere keinen Grund, warum es ein freier Modul sein sollte. Kronecker hatte vermutlich dieses Problem gesehen, zumindest war er vorsichtig genug, die entsprechende Aussage nur im zahlentheoretischen Fall zu behaupten.[253]

Die nächste Frage, die auch die zahlentheoretische Situation betrifft, ist, warum die $\frac{P}{P_{i,1}^{\delta_i - r}} \xi_{1s}^{(i)}$ sinnvoll als Elemente eines Fundamentalsystems angesehen werden können. Die Faktoren der Zerlegung von $P$ in Primdivisoren liegen im Allgemeinen nicht im Gattungsbereich, sondern im

[249] [5, 1889, 329].
[250] Anhaltspunkte für diese Ansicht finden sich bei der Definition der Divisorensysteme $(D_s)$ [5, 1889, 335] und in der Bezeichnung wesentlicher Teiler [5, 1889, 337 und 342f].
[251] Vgl. [Kronecker, 1882, § 20].
[252] [Neumann, 2001, 172].
[253] [Kronecker, 1882, 318f].

> weiteren Bereiche..., der durch die Gesammtheit aller algebraischen Formen des Gattungsbereiches ($\mathcal{G}$) mit beliebig vielen Variablen gebildet wird.[254]

Es gibt zwei Möglichkeiten, mit diesem Problem umzugehen. Einmal kann man versuchen, die gesamte Arithmetik in diesem größeren Bereich anzusiedeln. Dies scheint problematisch, da es schwierig zu entscheiden ist, wann ein Ausdruck dann einem Element der ursprünglichen Gattung entspricht. Plausibler erscheint mir daher die zweite Interpretation, daß Hensel implizit davon ausging, er habe ein Element zur Verfügung, das zumindest lokal äquivalent zu dem Primdivisor ist, d.h. genau einmal durch ihn und nicht durch alle anderen Primdivisoren von $P$ teilbar ist, und dieses ebenso bezeichnete.[255]

Nicht geklärt ist auch, wie Hensel seine Behauptung einlösen wollte, es sei ihm möglich,

> alle ganzen algebraischen Formen einer aus zwei anderen componirten Gattung darzustellen und zu untersuchen, sobald diese Aufgabe für jene beiden Gattungen gelöst ist.[256]

Eventuell wollte er dazu mit zwei Fundamentalsystemen starten, die für alle kritischen Primdivisoren normal sind.[257]

Grundsätzlich problematisch ist also nur die Existenz eines Fundamentalsystems für den Modul $P_i$ im allgemeinen Fall, auf der aber fast die gesamte Arbeit beruht. (Ohne das spezielle Fundamentalsystem für den Modul $P$ bleibt nur die Aussage: Wenn man für zwei linear unabhängige Gattungen je ein normales Fundamentalsystem für den Modul $P$ hat, so kann man leicht ein Fundamentalsystem für den Modul $P$ für das Kompositum konstruieren. So lange man noch nicht weiß, ob es normale Fundamentalsysteme für den Modul $P$ überhaupt gibt, ist diese Aussage jedoch noch nicht sehr hilfreich.)
Hensel scheint Kroneckers Grundzüge nicht sehr aufmerksam gelesen zu haben und hat (das ist weniger überraschend) ihre Feinheiten nicht durchdrungen. Insbesondere haben Kroneckers Primdivisoren im allgemeinen Fall nicht mehr die Eigenschaften, die Hensel ihnen selbstverständlich zuschrieb. Im folgenden wird dargestellt, welche Anknüpfungen diese Arbeit in der zahlentheoretischen Situation und in der Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen gestattete.

[254] Wie Hensel in seiner Habilitation formulierte, [2, 1887, 104f].
[255] Er hatte explizit gezeigt, daß das im zahlentheoretischen Fall möglich ist, wenn es keine gaDT gibt.
[256] [5, 1889, 330].
[257] Er griff diese Aufgabenstellung schlicht nicht wieder auf. Überhaupt entsteht der Eindruck, daß Einleitung und Hauptteil nicht richtig zusammenpassen.

# Kapitel 3

# Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen

Dieses Kapitel behandelt frühe Arbeiten Hensels zur Theorie der algebraischen Funktionen. Es beginnt mit seiner ersten Arbeit zu diesem Themenkreis und endet mit der Arbeit, in der zum ersten Mal mit Potenzreihen argumentiert wird und die daher die Überleitung zum nächsten Kapitel bildet.

Eine wesentliche Idee von Hensels erster Darstellung der Theorie [9, 1891] ist eine Homogenisierung, die es erlaubt, den Punkt $\infty$ in eine einheitliche Untersuchung zu integrieren.[1] Hensel hat diese Homogenisierung in weiteren Arbeiten noch ausführlicher durchgeführt, letztendlich aber wieder darauf verzichtet. Weiterhin ist der Ausgangspunkt von Hensels erster Darstellung strikt konstruktiv. Dies erlaubt weder die Zerlegung eines Polynoms in seine Linearfaktoren noch die Benutzung der Konjugierten eines Elements. Hensel verzichtete dementsprechend auch auf das Konzept "Diskriminante". In seinen späteren Arbeiten gab Hensel diese starke Konstruktivitätsforderung wieder auf, um sich auf die Betrachtung der einzelnen Stellen $x = a$ konzentrieren zu können.

Hensel löste eine der Hauptaufgaben der Theorie, nämlich die (explizite) Aufstellung der sogenannten Integrale erster Gattung, d.h. der Integranden, die nach der Integration an jedem Punkt endlich sind. Dazu verallgemeinerte er die einfache Beobachtung, daß eine Funktion, die lokal die Gestalt $c(x-a)^r$ mit $r > -1$ hat, nach der Integration lokal die Gestalt $c_1(x-a)^{r_1}$ mit $r_1 > 0$ hat, also ihr Integral in $x = a$ nicht singulär ist. Daraus ergab sich die Frage, welche Exponenten $r$ in einer Gattung algebraischer Funktionen überhaupt auftreten können.

Hensel bemerkte einen Zusammenhang zwischen einem Fundamentalsystem für die ganzen Formen und einem solchen für die Formen erster Gattung, so daß sich die Teilaufgabe ergab, ein Fundamentalsystem für die ganzen Formen aufzustellen. Ist die algebraische Funktion $y$ durch eine Gleichung $n$-ten Grades gegeben, so geht es darum, daß eine Funktion der Gestalt $c_0 + c_1 y + \cdots + c_{n-1}y^{n-1}$ auch dann ganz sein kann, wenn in einigen der $c_i$ Nenner vorkommen. Nachdem Hensel den maximal möglichen Nenner bestimmt hatte, stellte er sich die Aufgabe, alle Funktionen zu finden, die durch ein beliebiges $P$ teilbar

[1] Die Objekte heißen im homogenen Fall *Formen* und nicht mehr Funktionen.

sind, ohne daß alle Koeffizienten durch $P$ teilbar wären, d.h. für diese ein Fundamentalsystem aufzustellen. Aus der Lösung dieser Teilaufgabe läßt sich ein Fundamentalsystem für die ganzen Funktionen bestimmen.

Hensel suchte konkret nach einem konstruktiven Verfahren, also einem Algorithmus, um die durch $P$ teilbaren Funktionen wirklich zu bestimmen. Dazu hatte er die Idee, die Aufgabe in Teilaufgaben zu zerlegen. Zunächst sonderte er aus allen Funktionen der angegebenen Form diejenigen aus, die durch $P^{\frac{1}{n}}$ teilbar sind, anschließend aus diesen die, die durch $P^{\frac{2}{n}}$ teilbar sind, bis er diejenigen erhält, die durch $P$ teilbar sind. Für jeden Schritt ist ein lineares Kongruenzensystem zu lösen. In einem Nachtrag verfeinerte er das Verfahren noch weiter, indem er die Anzahl der Schritte erhöhte und die Anzahl der Kongruenzen, die insgesamt zu berücksichtigen sind, reduzierte.

Hensels zweite Theorie der algebraischen Funktionen [20, 1895] ist weniger konstruktiv, insbesondere ist in ihr der Bezug auf die Konjugierten einer Funktion erlaubt. Er nahm damit die Theorie der Arbeit [5, 1889] wieder auf, allerdings konnte er auf eine Theorie der idealen Primdivisoren als Voraussetzung verzichten. Dazu benutzte er nur ggTs von vollständigen Familien konjugierter Funktionen, die er als Wurzelfunktionen einführte.[2]

Hensel hatte zuvor definiert, daß eine algebraische Funktion $f(x)$ durch $w(x)$, eine rationale Potenz einer rationalen Funktion, algebraisch teilbar ist, wenn die Minimalgleichung des Quotienten ganze Koeffizienten hat. In diesem Fall ist aber, wie er jetzt anmerkte, die Funktion $f(x)$ nebst allen ihren Konjugierten durch $w(x)$ teilbar ist. Daher kann man den ggT einer Funktion $f(x)$ mit ihren Konjugierten mit Hilfe der Koeffizienten der Minimalgleichung der Funktion $f(x)$ beschreiben bzw. definieren. (Wie angekündigt, ist dieser ggT eine Wurzelfunktion.)

Hensel betrachtete in dieser Arbeit wieder wie in [5, 1889] die Matrix $M$, in der die Konjugierten der Elemente eines linear unabhängigen Systems stehen.[3] Zur Untersuchung dieser Matrix benutzte er systematisch ihre Elementarteiler, die ebenfalls Wurzelfunktionen sind. Eines seiner Ergebnisse ist die Aussage, daß ein gegebenes System ganzer Funktionen genau dann ein Fundamentalsystem ist, wenn die Exponenten $e$ aller Linearfaktoren in den Elementarteilern der Matrix $M$ die Bedingung $0 \leq e < 1$ erfüllen.

Die Betrachtung der Elementarteiler ermöglichte es, den Begriff des normalen Systems nutzbringend zu verfeinern. Hatte Hensel in [5, 1889] für ein normales System gefordert, daß das Produkt der Spaltenteiler bereits den ganzen $(x-a)$-Anteil der Determinante $D$ ergibt, so konnte er jetzt zeigen, daß in diesem Falle (lokal) die Elementarteiler schon mit den Spaltenteilern übereinstimmen. Diese (äquivalente) Bedingung benutzte er anschließend als Definition eines (lokal) kanonischen Systems.

Da die (lokalen) Elementarteiler invariant bleiben, wenn man die gegebene Matrix mit einem (lokalen) Einheitssystem multipliziert, kann man das gegebene System so transformieren, daß die Elementarteiler gleich bleiben, aber einer der Spaltenteiler steigt und dies ermöglichte es Hensel, ein Verfahren anzugeben, um ein beliebig gegebenes System in ein äquivalentes kanonisches System zu transformieren. Ein

[2] Eine Wurzelfunktion ist eine Wurzel aus einer rationalen Funktion, also $w(x) = r(x)^{\frac{1}{k}}$ mit rationaler Funktion $r(x)$ und $k \in \mathbb{Z}$.

[3] Ist das linear unabhängige Sysytem ein Fundamentalsystem, so ist das Quadrat der Determinante $D$ dieser Matrix die Diskriminante.

kanonisches System läßt sich aber sehr leicht in ein Fundamentalsystem transformieren, da man es dazu nur noch durch ganze Potenzen von Linearfaktoren teilen muß.

Vermutlich ermöglichte die Benutzung der Elementarteiler Hensel auch die folgenden Überlegungen. Er wußte bereits ([5, 1889]), daß die Spaltenteiler eines (lokalen) Fundamentalsystems die Verzweigung widerspiegeln, wenn es mit Hilfe der Primdivisorzerlegung konstruiert wurde. Jetzt folgte zunächst, daß man die Verzweigung aus jedem kanonischen System anhand der Spaltenteiler ablesen kann und weiter, da äquivalente Systeme die gleichen Elementarteiler haben, aus jedem beliebigen linear unabhängigen System anhand der Elementarteiler.[4]

Für die (schnelle[5]) Darstellung dieses Wissens wählte Hensel einen weiteren theoretischen Ausgangspunkt, nämlich die insgesamt $n$ Potenzreihenentwicklungen an der Stelle $x = a$ aus der Theorie der Riemannschen Flächen. Er definierte auch für diese größte gemeinsame Teiler und zeigte, daß einem $k$-fachen Verzweigungspunkt über $x = a$ eine Sequenz von Linearfaktoren $1, (x-a)^{\frac{1}{k}}, \ldots, (x-a)^{\frac{k-1}{k}}$ in den Elementarteilern entspricht. Daher kann man aus diesen Sequenzen in den Elementarteilern die Verzweigung ablesen.

Ein wesentlicher Vorteil von Hensels Theorie ist, daß man mit dem System $1, y, \ldots, y^{n-1}$ arbeiten kann. Für dieses rechnete Hensel die Fälle $n = 3, 4$, sowie den Fall einer reinen Gleichung $y^n = a(x)$ komplett durch. Transformiert man dieses System geeignet in ein kanonisches System, so kann man neben den Verzweigungspunkten auch die Doppelpunkte bzw. die außerwesentlichen Diskriminantenteiler bestimmen.

Hensel homogenisierte seine Theorie vollständig und daher erwiesen sich die Elementarteiler auch für die Integrale erster Gattung als nützlich. Die in der ersten Arbeit rational formulierte Beziehung zwischen einem Fundamentalsystem für die ganzen Formen und die Formen erster Gattung vereinfachte sich nämlich dahingehend, daß die Matrix des einen Systems die Inverse der Matrix den anderen Systems ist, wenn diese Matrizen gebildet werden dürfen. Damit ist ein System genau dann ein Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung, wenn seine Elementarteiler Formen sind, für deren Linearfaktoren alle Exponenten $d$ die Bedingung $-1 < d \leq 0$ erfüllen.

Hensel nutzte die Elementarteiler auch in der allgemeinen Situation. Die entsprechenden Arbeiten werden in einem Exkurs dargestellt und zwar einmal, weil die Voraussetzungen der allgemeinen Situation präziser formuliert werden als in [5, 1889], zum anderen aber auch, weil hier die Theorie mit Primdivisoren entwickelt wird, die im Fall der algebraischen Funktionen durch eine Theorie der Potenzreihenentwicklungen ersetzt worden war. Hensel zeigte zuerst, wie sich auch hier die Exponenten für den Faktor $P$ in den Elementarteilern eines Fundamentalsystems aus der Zerlegung des Primdivisors $P$ folgern lassen. Dazu benutzte er das schon in [5, 1889] konstruierte kanonische Fundamentalsystem für den Modul $P$. Mit Hilfe der so erhaltenen Bruchsequenzen untersuchte er dann die Frage, wie sich die Diskriminante bei der Komposition von Gattungen verhält. Dabei schloß er aber (neben den Exponenten der Primzerlegung von $P$) noch weitere potentielle Zahlteiler von seiner Betrachtung aus, nämlich die Teiler des Grades einer Teilerweiterung.

[4] In der Situation der algebraischen Funktionen einer Variablen gibt es keine wilde Verzweigung, im allgmeinen Fall war sie ausdrücklich ausgeschlossen.

[5] Frobenius reichte zwei kurze diesbezügliche Noten im Herbst 1895 der Berliner Akademie ein.

## 3.1 Die konstruktive Theorie - 1891

### 3.1.1 Hintergründe

Hensels Arbeit *Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der algebraischen Integrale. Erste Abhandlung* [9, 1891] wurde 1891 im Crelle-Journal veröffentlicht. Vermutlich zuvor hatte Hensel am 26.9.1891 auch auf der ersten DMV-Tagung in Halle über seine Ergebnisse vorgetragen [11, 1892]. Aus zwei Briefen Kleins an Fricke aus der auf die Tagung folgenden Woche läßt sich entnehmen, daß Hensel die dabei benutzte Homogenisierung unabhängig von den Arbeiten Kleins entwickelt hatte. Eine erste Bemerkung zu Hensel schließt sich an Kleins positives Gesamturteil über die DMV-Tagung an:

> Waren Sie denn Freitag Mittag noch da, als wir von allen Seiten auf Hensel eindrangen, der die Einführung des formentheoretischen Denkens in die Theorie der algebraischen Functionen als etwas Neues hatte vorbringen wollen? Die nächste Folge ist, dass Hensel Ende der Woche nach Göttingen kommt, wo wir ausführlich conferiren wollen.[6]

Wenige Tage später bezog sich Klein auf diesen Vorfall, um zu begründen, warum die formentheoretische Denkweise in der Einleitung zu Kapitel 4 ihres Buchs über elliptische Modulfunktionen [Klein/Fricke, 1892] als grundlegend hervorgehoben werden sollte:

> Alle wirkliche Durchführung analytischer Ansätze knüpft immer an den formentheoretischen Ansatz an. Ihnen gegenüber brauche ich in dieser Hinsicht nicht auf meine Abhandlung über Abel'sche Functionen in Bd. 36 zu argumentiren. Aber ich erzähle Ihnen gern von dem dramatischen Momente, der in dieser Hinsicht vorigen Freitag Mittag (Sie waren da schon abgereist?) zwischen Hensel und mir zur Entwickelung kam. Hensel hatte, ohne unsere Arbeiten zu kennen, genau denselben Gedanken, natürlich in Kronecker'scher Sprechweise, entwickelt! Genau dasselbe Homogenmachen, etc. etc. Ich brauche nicht zu erzählen, mit welcher Lebhaftigkeit ich reagirte. Das Resultat ist, dass H. nächster Tage herkommen will, um mit mir das Gesammtgebiet zu besprechen. Vielleicht, dass das für unsere mathematischen Parteigegensätze im allgemeineren Sinne erfreuliche Resultate zeitigt. Jedenfalls ist mir um so wichtiger, dass in unserem Modulbuche unsere eigentliche Denkweise, auch wenn sie aus didaktischen Gründen nicht zur Basis der Darstellung genommen wird, als solche völlig hervortritt.[7]

Über das angesprochene Treffen zwischen Klein und Hensel ist nichts bekannt, auch sind keine Spuren sichtbar, die auf "erfreuliche Resultate" bezüglich der "mathematischen Parteigegensätze" schließen ließen. Insbesondere verwies Hensel in der gedruckten Arbeit nicht auf Klein.[8] Vermutlich diese taucht noch ein weiteres Mal in der Klein-Fricke-Korrespondenz auf, in einem Brief, den Fricke kurz vor seiner Abreise aus Berlin schrieb:

> Prof. Franklin ist nun gestern früh hier angekommen und will bis morgen abend bleiben. Eben ist er zu Kronecker mit dem [er] auch über die letzte Arbeit von Hensel sprechen will; ich bin sehr gespannt auf das Resultat dieser Unterhaltung.[9]

Falls in diesem Satz die Erwartung einer Kritik an Hensels Arbeit zum Ausdruck kommt (was nicht eindeutig ist), so korrespondiert dem vermutlich eine Stelle in Hensels Arbeit [12, 1893]:

[6] Brief Kleins an Fricke vom 29.9.1891.

[7] Brief Kleins an Fricke vom 1.10.1891. Der Brief enthält allgemeine Kommentare zu dem von Fricke selbständig bearbeiteten vierten Kapitel.

[8] Über Hensels Gründe dafür kann nur spekuliert werden. Eventuell waren Kleins Arbeiten für ihn thematisch weit entfernt, oder er betrachtete die Technik der Homogenisierung als Allgemeingut. Es ist bekannt, daß Kronecker überhaupt sehr wenig von den formentheoretischen Arbeiten Kleins hielt, aber unbekannt, ob Hensel diese Einschätzung teilte.

[9] Brief Frickes an Klein vom 20.12.91

> [I]ch möchte diese Gelegenheit benutzen, um ein dort auftretendes Versehen zu berichtigen, zu dessen Auffindung ich zuerst durch eine gütige Bemerkung des Herrn *Franklin* geführt wurde.[10]

Ein weiteres Indiz dafür, daß Hensels Arbeit wahrgenommen wurde, ist eine Kritik Bakers in den Mathematischen Annalen,[11] gegen die sich Hensel ebendort verteidigte.[12]

### 3.1.2 Darstellung der Arbeit

Auf die Einleitung, die den konstruktiven Standpunkt hervorhebt und begründet, folgen zwei Abschnitte, die den Übergang von rationalen bzw. algebraischen Funktionen zu den ensprechenden homogenen Formen beschreiben. Der nächste Abschnitt führt ganze algebraische Formen und insbesondere Formen, die ganz für den Modul $P(x_1, x_2)$ sind, ein und motiviert die Frage, wann ein Quotient $\frac{u_1\eta_1+\cdots+u_n\eta_n}{P}$ für den Modul $P$ ganz ist. Nachdem diese allgemeine Frage auf die einfachere mit ganzen $u_i$ zurückgeführt wurde, formt der folgende vierte Abschnitt die Bedingungen an die Koeffizienten der von $w$ erfüllten Gleichung, die sichern, daß $\frac{w}{P^\delta}$ lokal ganz ist, solange um, bis in ihnen nur noch der Koeffizient des Absolutglieds vorkommt.[13] Nachdem im folgenden Abschnitt die Diagonalisierung (bei erlaubter Variablentransformation) eines linearen Kongruenzensystems dargelegt wurde, zeigte Hensel (induktiv), daß das von ihm abgeleitete Kongruenzensystem auf lineare Kongruenzen zurückführbar ist, in denen alle $(n-1)$-ten partiellen Ableitungen der Form des Absolutgliedes vorkommen. Im sechsten Abschnitt führte Hensel sehr ausführlich vor, wie man (mit Hilfe der in Frage kommenden Teiler) die Dimension eines gegebenen linear unabhängigen Systems so lange reduzieren kann, bis es ein Fundamentalsystem ist. Die minimale Dimension eines solchen Systems ist das Geschlecht der Gattung. Einfacher gestaltete sich die Bestimmung eines Fundamentalsystems für den Modul $P$ in Abschnitt sieben. Hier betonte Hensel erstmals, daß mit Hilfe eines solchen Fundamentalsystems auch alle für den Modul $P$ ganzen Formen mit rationalen, für den Modul $P$ ganzen Formen als Koeffizienten *dargestellt* werden können. Der vorletzte Abschnitt führte die algebraischen Formen erster Gattung als diejenigen ein, die nach Multiplikation mit einer rationalen ganzen Form $P(x_1, x_2)$ für jede Nullstelle von $P$ verschwinden. Sie stehen in so enger Beziehung zu den ganzen Formen, daß Hensel eine explizite Formel zur Berechnung eines Fundamentalsystems der Formen erster Gattung aus einem für die ganzen Formen ableiten konnte. Die Beziehung zu den algebraischen Integralen wird im letzten Abschnitt hergestellt. Dabei homogenisierte Hensel zunächst das Integral und leitete die Bedingung ab, daß das Integral genau dann überall endlich ist, wenn der Integrand eine Form erster Gattung ist. Damit die Form einer algebraischen Funktion entspricht, muß sie Dimension Null haben. Diese Bedingung an die Koeffizienten der Form erlaubte es weiterhin, eine allgemeine Form für die Integranden erster Gattung mit konstanten Koeffizienten aufzustellen und aus dieser folgte, daß die Anzahl der linear unabhängigen Integranden erster Gattung gleich dem Geschlecht ist. Hensel betonte zum Abschluß, daß in dem von ihm aufgestellten System linear unabhängiger Integranden erster Ordnung neben $x$ und $y$ nur noch rationale Funktionen der Gleichungskoeffizienten vorkommen.

[10] [12, 1893, 154].
[11] Zum Beispiel auf der Seite [Baker, 1894, 129]
[12] [19, 1894]. Es ist unklar, was Baker mißverstanden hatte.
[13] Dies hat eine Voraussetzung, die Hensel später vergaß, was Franklin kritisierte (s.o.).

### Die Einleitung

Hensel begann seine Arbeit mit der Bemerkung, die "durch die neueren Untersuchungen in hohem Masse ausgebildete" Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen würde nicht den notwendigen Anforderungen genügen, denn:

> Alle hier gegebenen Definitionen entbehren nämlich so lange einer sicheren Grundlage, als kein Mittel angegeben wird, durch welches entschieden werden kann, ob sie auf eine vorgelegte Grösse passen oder nicht, und ebensowenig kann ein Satz als begründet gelten, wenn sein Beweis nicht so geführt ist, dass auch in jedem speciellen Falle seine Anwendbarkeit erkannt werden kann.[14]

Hensel behauptete, die Bedeutung dieser von Kronecker aufgestellten Forderung würde man in der Theorie der algebraischen Funktionen besonders gut erkennen. Das Ziel der Untersuchung müsse die

> eingehende Untersuchung specieller Klassen algebraischer Gebilde sein. Nur auf dahin gerichtetem Wege kann diese Theorie eine so hohe Ausbildung erreichen, wie sie schon seit Anfang dieses Jahrhunderts die Theorie der algebraischen Zahlen ereicht hat.[15]

Die hierin sichtbare Gauß-Verehrung ist auch für Kronecker charakteristisch, der Aussage würde aber wohl kaum ein Zeitgenosse Hensels zugestimmt haben. Einen Anhaltspunkt dafür, was Hensel bemängelte, gibt die angeführte Aufgabe, "die dort nur *definirten* Anzahlen nunmehr wirklich zu bestimmen."[16] Weil "die Resultate und Methoden unmittelbar auf jedes specielle algebraische Gebilde angewendet werden können" sollen,

> darf die Untersuchung nur zu Functionen führen, welche sowohl in Bezug auf die Veränderlichen, als auch auf die Coefficienten der Gleichung rational sind.[17]

Hensel dachte dabei insbesondere an die Fälle, "wo zwischen den Gleichungscoefficienten beliebige algebraische Relationen bestehen." Mit Blick auf diese "muss daher die Benutzung conjugirter Wurzeln der definierenden Gleichung, und die der Linearfactoren der Functionen einer Variablen vollständig vermieden werden."[18] Hensel begründete also seine methodische Forderung auch inhaltlich: Er wollte einen umfassenderen Gegenstandsbereich konkret bearbeiten können.

Nach dieser methodischen Vorbemerkung erläuterte Hensel die Ergebnisse seiner Arbeit. Die Einführung der homogenen algebraischen Formen habe "die Betrachtung der unendlich fernen Stellen des algebraischen Gebildes" entbehrlich gemacht.[19] Da jede algebraische Funktion als Quotient zweier homogener ganzer Formen dargestellt werden könne, reiche es aus, die ganzen algebraischen Formen zu betrachten und hier ergebe sich die Aufgabe der Aufstellung eines Fundamentalsystems, die durch Aufstellung geeigneter linearer Gleichungssysteme gelöst werde. Hensel schrieb über den Fortgang seiner Arbeit:

> Hieran schließt sich die Untersuchung derjenigen Formen, welche den ganzen am nächsten stehen, der sogenannten 'Formen erster Gattung', und als Anwendung die vollständige Darstellung der Integrale erster Gattung. Zugleich ergibt sich die einfache Beziehung, welche zwischen der Gesammtdimension des Fundamentalsystems und dem Geschlecht des betrachteten algebraischen Gebildes besteht.[20]

[14] [9, 1891,1].
[15] [9, 1891, 1f].
[16] [9, 1891, 2 ].
[17] [9, 1891, 2].
[18] Zitate [9, 1891, 2]. Vermutlich werden die von Hensel angesprochenen "Klassen algebraischer Gebilde" mit Hilfe solcher Unbestimmter gebildet, dachte er also an durch Parameter beschriebene Familien von Kurven.
[19] [9, 1891, 2].
[20] Sie sind gleich. [9, 1891, 3].

Hensel behauptete weiter, seine Untersuchungen könnten auch auf “die Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven ausgedehnt werden.”[21] Den Abschluß der Einleitung bilden Hinweise auf andere Arbeiten, die den aufgestellten methodischen Forderungen entsprechen. Hensel nannte hierzu zunächst Kroneckers *Grundzüge* [Kronecker, 1882], die jedoch “entsprechend der umfassenderen Natur der abgeleiteten Resultate, auf die hier sich darbietenden Probleme” nicht eingingen.[22] Hensel erwähnte weiter Kroneckers Arbeit *Ueber die Discriminante algebraischer Functionen* [Kronecker, 1881] und deren “längst abgeschlossen[e]” unveröffentlichte Fortsetzung,[23] sowie eine Arbeit Max Noethers, der “einige der hier behandelten Probleme in einer von der unsrigen völlig verschiedenen Weise, jedoch unter Zugrundelegung genau derselben Forderungen behandelt” habe.[24]

**Die Homogenisierung**

Hensel begann mit der Homogenisierung der rationalen Funktionen. Deren Koeffizienten dürfen aus beliebigen Gattungsbereichen (im Sinne Kroneckers) stammen:

> Die Coefficienten werden, um gleich den allgemeinsten Fall zu umfassen, als rationale Functionen beliebig vieler Unbestimmten $(\mathcal{R}, \mathcal{R}', \dots)$ vorausgesetzt, zwischen denen wiederum eine algebraische Gleichung bestehen kann.[25]

Hensel setzte $x_1 = \frac{x}{x-u}, x_2 = \frac{1}{x-u}$ mit einer Unbestimmten $u$ und erreichte dadurch $x = \frac{x_1}{x_2}$. Dann erhält man alle Werte von $x$ (auch $\infty$) durch endliche Werte von $x_1, x_2$ und für jedes endliche $u$ bleiben $x_1$ und $x_2$ endlich. Jede rationale Funktion von $x$ kann nun in naheliegender Weise als Quotient zweier ganzer homogener Formen $f, g$ in $x_1, x_2$ geschrieben werden.
Für eine homogene Form $P(x_1, x_2)$ der Dimension $\lambda$

$$P(x_1, x_2) = a_0 x_1^\lambda + a_1 x_1^{\lambda-1} + \cdots + a_\lambda x_2^\lambda,$$

setzte Hensel voraus, daß $a_0$ und $a_\lambda$ nicht beide verschwinden. Den Rest einer beliebigen ganzen Form $f(x_1, x_2)$ modulo $P(x_1, x_2)$ bestimmt man, indem man durch Division eine Gleichung $f(x_1, x_2) = P(x_1, x_2)Q(x_1, x_2) + f_1(x_1, x_2)$ erhält, wobei

> der Grad von $f_1$ in Bezug auf $x_1$ der möglichst niedere ist, ausser natürlich in dem Falle, wo $P = x_2^\lambda$ ist, und wo $x_2$ an die Stelle von $x_1$ tritt.[26]

Hensel behauptete, man könne ebenso wie in der Theorie der ganzen Funktionen den größten gemeinsamen Teiler zweier ganzer Formen bestimmen und formulierte dies im teilerfremden Fall:

> Ist $f(x_1, x_2)$ zu $P(x_1, x_2)$ relativ prim, so kann man vermittelst dieses *’Euklidischen Verfahrens* zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers’, stets eine solche ganze homogene Form $F$ finden, dass $fF \equiv x_2^\mu \pmod{P(x_1, x_2)}$ ist, wo $\mu$ einen ganzzahligen nicht negativen Exponenten bedeutet.[27]

[21] [9, 1891, 3].
[22] [9, 1891, 3]. Strenggenommen fällt Hensels Situation nicht unter die der *Grundzüge*, da es in diesen keine Veränderliche gibt. Es gibt dort nur Unbestimmte, die ja auch bei Hensel im Koeffizientenkörper auftreten dürfen. Während aber in den Grundzügen die Ganzheit eines Elements auch von diesen Unbestimmten abhängt, ist sie hier nur an die Veränderliche gebunden, d.h. unter anderem ganze Funktionen dieser Veränderlichen mit beliebigen (auch gebrochenen) Koeffizienten des Grundkörpers werden als ganz betrachtet.
[23] Diese Fortsetzung ist unveröffentlicht geblieben. Da Kronecker 1891 noch lebte, ist unklar, ob Hensel sie später aus dem Nachlass hätte veröffentlichen können oder ob Kronecker dies ausgeschlossen hatte. Ebenfalls unbekannt ist, ob sie sich noch in dem 1945 verbrannten Kronecker-Nachlass befand. Zum Kronecker-Nachlass vgl. [Edwards, 1978].
[24] Beide Zitate [9, 1891, 3]. Sie beziehen sich vermutlich auf [Noether, 1894].
[25] [9, 1891, 4].
[26] [9, 1891, 5]. Die Notwendigkeit, den Fall $P = x_2^\lambda$ (stets) extra zu behandeln, entspricht dem Extrafall des Punktes im Unendlichen.
[27] [9, 1891, 5].

Ordnet man einer gebrochenen homogenen Form als Dimension die Differenz der Dimensionen von Zähler und Nenner zu, so läßt sich zeigen, daß genau die Formen nullter Dimension den rationalen Funktionen entsprechen. Hensel faßte, in Übertragung einer Ausdrucksweise aus der Zahlentheorie, alle rationalen Formen einer Dimension in eine Klasse zusammen, da das "Verhältniss je zweier von ihnen einer Function von $x$ gleich ist."[28]

Anschließend führte Hensel die Betrachtung *für eine homogene ganze Form $P(x_1, x_2)$ als Modul* ein. Die rationale homogene Form $F(x_1, x_2) = \frac{f(x_1,x_2)}{g(x_1,x_2)}$ heißt *modulo $P$ betrachtet ganz*, wenn der Nenner $g(x_1, x_2)$ mit $P$ keinen gemeinsamen Teiler hat. Aus der Charakterisierung dieser Formen, "dass sie für keinen derjenigen Werthe von $x$ über jedes Mass hinaus wachsen, für welche $P(x_1, x_2)$ für ein variables $u$ verschwindet,"[29] schlußfolgerte Hensel, daß auch der Bereich der modulo $P$ ganzen Formen bezüglich Summen und Produkten abgeschlossen ist.

Im nächsten Schritt demonstrierte Hensel, wie man von einer algebraischen Funktion von $x$ zu einer algebraischen homogenen Form von $x_1$ und $x_2$ gelangt. Sei dazu $A_0y^n + A_1y^{n-1} + \cdots + A_n = 0$ die Gleichung, die $y$ als algebraische Funktion von $x$ bestimmt, worin die $A_i$ ganze Funktionen von $x$ sind. Ist $x^m$ die höchste in den $A_i$ vorkommende Potenz von $x$, so führte Hensel $x_1, x_2$ durch Einsetzen von $x = \frac{x_1}{x_2}$ ein und multiplizierte anschließend mit $x_2^m$. Dadurch erhielt er die Gleichung $A_0(x_1, x_2)y^n + A_1(x_1, x_2)y^{n-1} + \cdots + A_n(x_1, x_2) = 0$, deren Koeffizienten ganze homogene Formen der Dimension $m$ sind. Er nannte dann $\eta := yA_0(x_1, x_2)$ eine *homogene algebraische Form von $(x_1, x_2)$ der Dimension $m$*, denn $\eta$ erfüllt eine Gleichung $\eta^n + B_1\eta^{n-1} + \cdots + B_n = 0$, wobei $B_i$ eine homogene Form der $mi$-ten Dimension ist und $\eta$ in $t^m\eta$ übergeht, wenn man $x_1, x_2$ durch $tx_1, tx_2$ ersetzt.

Unter allen rationalen Funktionen von $x_1, x_2$ und $\eta$ betrachtete Hensel nur die homogenen Formen (der "Dimension" $\mu$), d.h. diejenigen, für die gilt $F(tx_1, tx_2, t^m\eta) = t^\mu F(x_1, x_2, \eta)$. Auch hier entsprechen die algebraischen Formen der Dimension Null den algebraischen Funktionen von $x$.

**Ganzheit**

Hensel definierte *algebraisch ganz* wie üblich: Eine homogene algebraische Funktion heißt algebraisch ganz, wenn sie einer Gleichung mit Leitkoeffizient 1 und rationalen homogenen ganzen Koeffizienten genügt.[30] Diese ganzen Formen haben "die charakteristische Eigenschaft, für *alle* Werthe von $x$ stets endlich zu bleiben, wenn die Unbestimmte $u$ auf endliche Werthe beschränkt wird."[31] Daraus folgt, daß ganze Funktionen von algebraisch ganzen Formen wieder algebraisch ganz sind.

Wählt man $\eta$ ganz, so läßt sich jede gebrochene algebraische Form als Quotient zweier ganzer algebraischer Formen darstellen. Hensel setzte dazu $\eta_i = \eta^{i-1}$. Dann läßt sich jede Form $w$ eindeutig in der Form $w = u_1\eta_1 + \cdots + u_n\eta_n$ darstellen und bildet man den Hauptnenner der Koeffizienten $u_i$, erhält man

$$w = \frac{v_1\eta_1 + \ldots v_n\eta_n}{P(x_1, x_2)},$$

[28] [9, 1891, 6].

[29] [9, 1891, 6].

[30] Daß jede homogene algebraische Form $w = u_0 + u_1\eta + \cdots + u_{n-1}\eta^{n-1}$ eine Gleichung $n$-ten Grades erfüllt, leitete Hensel hier aus den Darstellungen $w\eta^{i-1} = \sum_{k=1}^n u_{ik}\eta^{k-1}$ ab, die die Gleichung $|u_{ik} - \delta_{ik}w| = 0$ ergeben. Dies entspricht der Vorgehensweise bei [Dedekind/Weber, 1882, 244].

[31] [9, 1891, 9].

also $w$ als Quotient zweier ganzer Formen.

An diese Darstellung schloß Hensel die Frage, wann $w$ algebraisch ganz ist, auch wenn die Koeffizienten in der Darstellung mit dem System der $\eta_i$ gebrochen sind:

> Es sind also zunächst die Bedingungen aufzustellen, damit eine algebraische Form durch eine homogene Form $P(x_1, x_2)$ von $x_1$ und $x_2$ theilbar ist, und hierzu ist es wieder nöthig, überhaupt das Verhalten einer beliebigen algebraischen Form für eine ganze rationale Form als Modul genauer zu untersuchen.[32]

Hierzu führte Hensel den Begriff *für einen Modul* $P(x_1, x_2)$ *algebraisch ganz* ein, der besagt, daß die Koeffizienten der erfüllten Gleichung mit Leitkoeffizient 1 für den Modul $P$ ganz sind. Auch diese wachsen "für keinen Werth von $x$ über jedes Mass hinaus ..., welchem eine Nullstelle von $P(x_1, x_2)$ entspricht"[33] und Summen und Produkte solcher Formen sind daher wieder algebraisch ganz für den Modul $P(x_1, x_2)$. Hensel untersuchte dann jedoch nicht konkret, wann $w$ modulo $P$ betrachtet algebraisch ganz ist, sondern kehrte zu dem zuerst angesprochenen Punkt zurück, wann

$$\frac{u_1\eta_1 + \dots u_n\eta_n}{P} = \frac{w}{P}$$

algebraisch ganz ist, wobei man in beiden Fällen voraussetzen kann, daß alle Koeffizienten $u_i$ ganz für den Modul $P$ und modulo $P$ reduziert sind.

### Umformung der Bedingung

Hensels Ziel war es, die Kongruenz $\sum u_i\eta_i \equiv 0 \pmod P$ auf eine Folge von Systemen linearer Kongruenzen mod $P$ zurückzuführen.[34]

Jeder Schritt in dieser Folge wird dem Übergang von der Teilbarkeit durch $P^{\frac{k}{n}}$ zur Teilbarkeit durch $P^{\frac{k+1}{n}}$ entsprechen. Daher fragte Hensel zunächst nach den Bedingungen dafür, daß $w = u_1\eta_1 + \dots u_n\eta_n$ durch $P^\delta$ für beliebiges $0 < \delta \in \mathbb{Q}$ algebraisch teilbar ist,

> d.h. damit die Gleichung des $n$ten Grades, der
>
> $$z = \frac{w}{P^\delta}$$
>
> genügt, lauter *ganze* homogene Formen von $x_1$ und $x_2$ als Coefficienten besitzt.[35]

Ist die von $w$ erfüllte Gleichung $w^n + U_1(u_1, \dots, u_n)w^{n-1} + \dots + U_n(u_1, \dots, u_n) = 0$, so erhält man durch Einsetzen von $zP^\delta$ für $w$ die Gleichung, der $z$ genügt und damit die Kongruenzen

$$P^{(n-i)\delta}U_i(u_1, \dots, u_n) \equiv 0 \pmod{P^{n\delta}} \qquad {\scriptstyle (i=1,\dots,n)}$$

als Bedingung dafür, daß $z$ ganz ist.[36]

Zur Umformung dieser Bedingungen benutzte Hensel das Hilfsmittel der unbestimmten Koeffizienten und die Schreibweise der Modulsysteme (die hier übergangen wird). Daß $w$ durch $P^\delta$ teilbar ist, ist äquivalent

[32] [9, 1891, 10].
[33] [9, 1891, 11].
[34] In der Arbeit *Zur Theorie der linearen Formen* [7, 1891] hatte er einen Lösungsalgorithmus für solche Systeme dargestellt.
[35] [9, 1891, 12].
[36] [9, 1891, 13]. Der Umgang mit diesen Kongruenzen scheint für Hensel unproblematisch und rein formal zu sein. Er kürzte soweit möglich Potenzen von $P$ und die rationale Form $U_i$ muß dann durch die nächsthöhere ganzzahlige Potenz von $P$ teilbar sein, da sie nicht durch gebrochene Potenzen von $P$ teilbar sein kann.

dazu, daß $\sum_k(u_k+v_kP^\delta)\eta_k$ mit Unbestimmten $v_k$ durch $P^\delta$ teilbar ist. Mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung erhielt Hensel das System der Kongruenzen

$$P^{(n-i+\lambda)\delta}U_i^{(\lambda)}(u_1,\ldots,u_n)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,P^{n\delta})\quad \left(\begin{smallmatrix}i=1,\ldots,n\\ \lambda=0,1,\ldots,i\end{smallmatrix}\right),$$

worin $U_i^{(\lambda)}(u_1,\ldots,u_n)$ alle $\lambda$-ten partiellen Ableitungen von $U_i$ durchläuft.[37]
Unter der Bedingung, daß 1 linear und homogen durch die $\eta_i$ darstellbar ist, folgen (wie Hensel durch eine weitere Taylor-Entwicklung nachwies) alle diese Kongruenzen aus denjenigen, in denen nur die Ableitungen von $U := U_n(u_1,\ldots,u_n)$ vorkommen: $P^{\nu\delta}U^{(\nu)}\equiv 0\quad(\mathrm{mod}\,P^{n\delta})\qquad {\scriptstyle(\nu=0,1,\ldots,n)}$.[38]

Hensel bezeichnete die so gefundenen Bedingungen als "sehr complicirter Natur, weil sie die Auflösung einer grossen Anzahl homogener Congruenzen der ersten, zweiten bis $n$ten Dimension erfordern würden."[39]
Daher wollte er diese " durch eine Anzahl homogener linearer Congruenzen modulo $P$"

$$W_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}u_k\equiv 0\qquad(\mathrm{mod.}\,P(x_1,x_2))$$

ersetzen.[40]

### Lineare Kongruenzensysteme

Sei jetzt ein solches Kongruenzensystem gegeben. Durch Zeilen- und Spaltenoperationen an der Koeffizientenmatrix, wobei letztere einer Transformation der Unbestimmten entsprechen, gelang es Hensel, das Kongruenzensystem auf die Diagonalform $P_nP_{n-1}\ldots P_iu_i'\equiv 0\quad(\mathrm{mod.}\,P)$ zu transformieren. Dabei ist $P_i$ der $P$-Anteil des $i$-ten Elementarteilers der Koeffizientenmatrix, was Hensel nicht explizit formulierte, sondern mit Hilfe der Formulierung:

> wo allgemein das Product $(P_nP_{n-1}\ldots P_{n-i})$ der größte gemeinsame Theiler der Form $P$ mit allen Unterdeterminanten der $i$ten Ordnung der aus den Coefficienten $a_{ik}$ gebildeten Matrix ist,[41]

zum Ausdruck bringen wollte. Hier hat sich ein kleiner Fehler eingeschlichen, denn bezeichnet man den größten gemeinsamen Teiler von $P$ und allen $i\times i$-Unterdeterminanten mit $D_i$, so muß
$D_i = P_n\ldots P_{n-i+1}$ sein, damit man aus diesen Gleichungen alle $P_i$ bestimmen kann.[42] Setzt man $D_0 = 1$, so ergibt sich $P_i=\frac{D_{n-i+1}}{D_{n-i}}$ für $i=1,\ldots,n$ und Hensel setzte weiter $P=P_0P_1\ldots P_n$, also $P_0=\frac{P}{D_n}$.
Unter der von nun an geltenden Voraussetzung, daß $P$ keine mehrfachen Teiler enthält, sind die $n+1$ Formen $P_i$ relativ prim zueinander, es ist also möglich, das erhaltene Diagonalsystem nacheinander für jedes $P_i$ als Modul zu lösen und die sich ergebenden Bedingungen zu kombinieren. Die Lösungen für $P_i$ als Modul lassen sich aber sehr einfach beschreiben, denn in dem entstehenden Diagonalsystem

> sind dann die Coefficienten von $u_1',\ldots,u_i'$ durch $P_i$ theilbar, während diejenigen von $u_{i+1}',\ldots,u_n'$ zu $P_i$ relativ prim sind; die $m$ Congruenzen für den Modul $P_i$ sind demnach dann und nur dann erfüllt, wenn $u_{i+1}',\ldots,u_n'$ durch $P_i$ theilbar sind, während $u_1',\ldots,u_i'$ völlig beliebige Werte haben können.[43]

[37] Die Koeffizienten jedes Produkts der $v_i$ müssen durch $P^{n\delta}$ teilbar sein. [9, 1891, 14].
[38] [9, 1891, 15].
[39] [9, 1891, 16].
[40] [9, 1891, 16].
[41] [9, 1891, 17].
[42] Diese Interpretation wird dadurch gestützt, daß Hensel den Divisor $P_0$ anders definieren wollte.
[43] [9, 1891, 17f].

Die Transformation des Systems führte also auf eine Zerlegung in Teilsysteme und eine Transformation der Unbestimmten, die dieser Zerlegung in Teilsysteme angepaßt ist.

Hensel wendete dieses Verfahren an, um induktiv zu zeigen, daß das Kongruenzensystem
$P^{\nu\delta}U^{(\nu)} \equiv 0 \pmod{P^{n\delta}}$ $\quad {\scriptstyle (\nu=0,1,\ldots,n)}$ auch für $\delta_1 = \frac{\kappa}{n}$ auf ein Folge von Systemen linearer Kongruenzen für den Modul $P$ zurückgeführt werden kann, wenn dies für $\delta_0 = \frac{\kappa-1}{n}$ gilt.
Er begann damit, die Konsequenzen aus der Induktionsvoraussetzung zu ziehen. Sei $\overline{P}$ einer der Teiler, die sich aus dem linearen System ergeben und sei $w = u_1'\eta' + \ldots u_n'\eta_n'$ die Form, die sich nach der Transformation der Unbestimmten ergibt, so läßt sich diese Voraussetzung folgendermaßen formulieren:

> Eine ganze algebraische Form $w = u_1'\eta' + \cdots + u_n'\eta_n'$ ist dann und nur dann durch $\overline{P}^{\frac{\kappa-1}{n}}$ theilbar, wenn ihre $(n-\mu)$ letzen Coefficienten gleich Null sind.[44]

Hensel benutzte anschließend noch einmal das Hilfsmittel der unbestimmten Koeffizienten mit anschließender Taylorentwicklung. Es ist $w = u_1'\eta' + \cdots + u_\mu'\eta_\mu'$ genau dann durch $\overline{P}^{\frac{\kappa}{n}}$ teilbar, wenn

$$\sum_{i=1}^{\mu}(u_i' + v_i'P^{\frac{1}{n}})\eta_i'$$

mit Unbestimmten $v_i'$ durch $P^{\frac{\kappa}{n}}$ teilbar ist, denn $v_1'\eta_1' + \cdots + v_\mu'\eta_\mu'$ ist für Unbestimmte $v_i'$ durch $P^{\frac{\kappa-1}{n}}$ teilbar. Transformiert man die Form $U$ auf die neuen Unbestimmten $u_i'$ und setzt anschließend $u_{\mu+1}', \ldots, u_n'$ gleich Null und führt für die so entstandenen Formen $U'^{(\nu)}$ die Taylor-Entwicklung durch, so erhält man das System der Kongruenzen

$$\overline{P}^{\frac{\nu_1}{n}}U'^{(\nu_1)}(u_1', \ldots, u_\mu') \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, \overline{P}^{\kappa}) \qquad {\scriptstyle (\nu_1=0,1,\ldots,n).}$$

Hier erhält man für $\nu_1 = n$ eine bereits erfüllte Bedingung und auch in den anderen Fällen kann der Faktor $\overline{P}^{\frac{\nu_1}{n}}$ weggelassen werden:

> Nun sind aber alle Ableitungen $U'^{(\nu_1)}$ homogene Formen von $u_1', \ldots, u_\mu'$, deren Coefficienten *rationale* ganze Formen von $x_1$ und $x_2$ sind. Daher kann eine Form $U'^{(\nu_1)}$, multiplicirt mit der Potenz $\overline{P}^{\frac{\nu_1}{n}}$, deren Exponent ein echter Bruch ist, nur dann durch $\overline{P}^{\kappa}$ theilbar sein, wenn $U'^{(\nu_1)}$ selbst jene Potenz von $\overline{P}$ enthält.[45]

Aus den so erhaltenen Bedingungen $U'^{(\nu_1)}(u_1', \ldots, u_\mu') \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, \overline{P}^{\kappa})$ ${\scriptstyle (\nu_1=0,1,\ldots,n-1)}$ können nun noch alle mit $\nu_1 \neq n-1$ weggelassen werden, denn alle Ableitungen lassen sich homogen und linear durch die $(n-1)$-ten darstellen.[46] Man erhält damit das Kongruenzensystem
$U'^{(n-1)}(u_1', \ldots, u_\mu') \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, \overline{P}^{\kappa})$ und dies ist ein System linearer Kongruenzen mod $\overline{P}$, weil nach der Induktionsvoraussetzung $U'^{(n-1)}(u_1', \ldots, u_\mu')$ bereits durch $\overline{P}^{\kappa-1}$ teilbar ist.
Da für $\delta = 0$ die Induktionsvoraussetzung gilt, wendete Hensel die Induktion an und erhielt, daß man für alle $\overline{P}$ und damit auch für $P$ alle durch $P$ teilbaren Elemente als Lösung mehrerer linearer Kongruenzensysteme erhält. Als Nebenresultat erhielt Hensel für die Teilbarkeit durch $P$ die Bedingung:

[44] Wobei die $u_i'$ auf ihren "kleinsten Rest modulo $\overline{P}$ reducirt" angenommen worden sind.[9, 1891, 19].
[45] [9, 1891, 21].
[46] Nach "dem bekannten *Euler*schen Satze."[9, 1891, 21]. Dieser heißt auch heute noch *Satz von Euler über homogene Funktionen* und liefert für eine homogene Funktion $f$ der Dimension $m$ (bzw. in heutiger Terminologie: des Grades $m$) die Gleichung

$$mf = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Wendet man diesen sukzessive auf die auftretenden partiellen Ableitungen an, gelangt man zu Hensels Aussage.

$U^{(n-1)}(u_1, \ldots, u_n) \equiv 0(\bmod P^n)$.

Unter bestimmten Bedingungen (die Hensel an dieser Stelle vergaß, nochmals zu erwähnen), kann also die Teilbarkeit eines Elements durch eine (gebrochene) Potenz von $P$ am Absolutglied seiner Minimalgleichung abgelesen werden. Diese strukturelle Aussage war möglicherweise als Zielpunkt wichtig für die später von Hensel entwickelte Zahlentheorie und damit die Betrachtung der $p$-adischen Zahlen.[47] Die von ihm besonders ausführlich betrachteten (ganzzahligen) Gleichungen, die auch für den Bereich von $p$ (also über $\mathbb{Q}_p$) irreduzibel bleiben, haben jedenfalls diese Eigenschaft.[48]

### Aufstellen von Fundamentalsystemen

Mit Hilfe des so erhaltenen Verfahrens konnte Hensel

> ein System von $n$ linear unabhängigen ganzen algebraischen Formen ableiten, welches die Eigenschaft besitzt, dass alle ganzen algebraischen Formen und nur sie als homogene lineare Functionen von jenen dargestellt werden können, deren Coefficienten *ganze* homogene Formen von $x_1$ und $x_2$ sind. Ein solches System soll ein *Fundamentalsystem* genannt werden.[49]

Seien dazu wieder linear unabhängige Formen $\eta_1, \ldots, \eta_n$ gegeben, die diesmal nach absteigender Dimension geordnet sind. Ist $\nu_i$ die Dimension von $\eta_i$, so forderte Hensel weiter, daß $\nu_n = 0$, also genau eine der Formen von der Dimension Null ist. Man kann z.B. (wie Hensel angab) $\eta_i = \eta^{n-i+1}$ setzen.

Hensel schränkte zunächst die möglichen Teiler bzw. Nenner ein. Damit $w = u_1\eta_1 + \cdots + u_n\eta_n$ mit ganzen rationalen $u_i$ durch $P(x_1, x_2)$ teilbar ist, muß (wie im vorigen Abschnitt hergeleitet) das Kongruenzensystem $U^{(n-1)} \equiv 0 \,(\bmod\, P^n)$ erfüllt sein, also insbesondere $U^{(n-1)} \equiv 0 \,(\bmod\, P)$. Ist dann $D$ der größte gemeinsame Teiler aller $n \times n$-Unterdeterminanten des Systems $U^{(n-1)}$, d.h. der Determinanten, die aus je $n$ Zeilen des Koeffizientensystems gebildet werden, so folgt

$Du_i \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, P)$. Also muß man nur die Formen betrachten, die Teiler von $D$ sind.

Hensel faßte alle diese Teiler zusammen, indem er $P$ als das Produkt der verschiedenen Teiler von $D$ setzt. Durch das obige Verfahren gelangt man für einen Teiler $P'$ von $P$

> zu einem Systeme von linear unabhängigen homogenen algebraischen Formen
>
> $$\eta_1', \eta_2', \ldots, \eta_m',$$
>
> welche sämmtlich durch $P'(x_1, x_2)$ algebraisch theilbar sind, und durch welche sich jede andere $P'$ enthaltende Form homogen und linear ausdrücken läßt.[50]

Mit Hilfe dieser Formen konstruierte Hensel aus $\eta_1, \ldots, \eta_n$ ein linear unabhängiges System geringerer Dimension. Dazu stellte er die Formen $\eta_i'$ mit Hilfe der Formen $\eta_i$ dar

$$\eta_i' = \sum_{\kappa=1}^{n} \beta_{i\kappa}\eta_\kappa \qquad\qquad (i=1,\ldots m).$$

Anschließend beschrieb er die Veränderungen am System der $\eta_i'$, nach denen mit seiner Hilfe weiterhin alle durch $P'$ teilbaren Formen dargestellt werden können:

[47] Er selbst datierte den Beginn seiner Überlegungen dazu (z.B. in [53, 1907]) auf 1893.
[48] Vgl. 5.2 und 5.5.2.
[49] [9, 1891, 23].
[50] [9, 1891, 25].

> Die $m$ Formen behalten offenbar alle vorher angegebenen Eigenschaften, wenn man jede mit irgend einer zu $P'$ theilerfremden Form multiplicirt, oder auch, falls dies ausführbar ist, dividirt, wenn man ferner allgemein $\eta_i'$ durch $\eta_i' - Q\eta_\kappa'$ ersetzt, wo $Q$ eine beliebige ganze rationale Form bedeutet, und wenn man endlich einen jeden Coefficienten auf seinen kleinsten Rest modulo $P'$ reducirt.[51]

Hensel identifizierte die Änderungen, die diese Operationen am Koeffizientensystem $(\beta_{i\kappa})$ bewirken, und brachte umgekehrt mit Hilfe dieser Operationen das System $(\beta_{i\kappa})$ auf Zeilenstufenform, wobei die Pivotelemente zu $P'$ relativ prim sind. Er erhielt

> ein Coefficientensystem, dessen Horizontalreihen mit Formen
>
> $$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m,$$
>
> anfangen, die zu $P'$ relativ prim sind, und das aus dem Grunde ein *Diagonalsystem* genannt werden kann, weil die unter dem Anfangsgliede $\beta_i$ einer jeden Zeile stehenden Elemente derselben Colonne sämmtlich gleich Null sind.[52]

Anschließend muliplizierte Hensel jede Zeile mit einem Element $\beta_i'$, für das $\beta_i\beta_i' \equiv x_2^{\delta_i} \pmod{P'}$ gilt, reduzierte modulo $P'$ und teilte jede Spalte durch eine möglichst hohe Potenz von $x_2$. Ist $\lambda$ die Dimension von $P'$, so beginnt jede Zeile des so modifizierten Koeffizientensystems mit einem Term $x_2^{\varepsilon_i}$, wobei $\varepsilon_i < \lambda$ ist. Er betrachtete weiter die Formen $\eta_i''$, die mit Hilfe des modifizierten Koeffizientensystems $\gamma_{i\kappa}$ gebildet werden:[53]

$$\begin{array}{lcrl}
\eta_1'' & = & x_2^{\varepsilon_1}\eta_{\varrho_1} + \gamma_{\varrho_1+1,1}\eta_{\varrho_1+1} & + \cdots\cdots\cdots + \gamma_{n1}\eta_n \\
\eta_2'' & = & x_2^{\varepsilon_2}\eta_{\varrho_2} & + \cdots\cdots\cdots + \gamma_{n2}\eta_n \\
\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\eta_m'' & = & & x_2^{\varepsilon_m}\eta_{\varrho_m} + \cdots + \gamma_{nm}\eta_n
\end{array}$$

Ersetzt man hier die Elemente $\eta_{\varrho_i}$ durch $\frac{\eta_i''}{P'}$, so erhält man ein System geringerer Dimension, in dem höchstens zusätzlich eine Form durch $x_2$ teilbar sein kann, denn die Determinante der Substitutionsmatrix ist

$$\frac{x_2^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_m}}{P'(x_1, x_2)^m}.$$

Die Dimension des neuen Systems ist $\sum_{i=1}^n \nu_i - \sum_{k=1}^m (\lambda - \varepsilon_k)$ und damit um mindestens $m$ kleiner als die des alten Systems.

Diesen Vorgang wiederholt man nun für $P'$, bis $P'$ kein möglicher Teiler mehr ist, dann für die anderen Möglichkeiten für $P'$ und abschließend noch für $P_s = x_2$. In seinem Resumee hob Hensel hervor, man gelange

> von einem beliebig gegebenen System $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ von $n$ linear unabhängigen ganzen algebraischen Formen auf rationalem Wege, nämlich durch blosse Auflösung linearer Gleichungen, zu einem anderen Systeme unabhängiger homogener Formen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, welches die wichtige Eigenschaft besitzt, dass alle ganzen algebraischen homogenen Formen und nur sie eindeutig in der Form:
>
> $$w = u_1\zeta_1 + u_2\zeta_2 + \cdots + u_n\zeta_n$$
>
> mit homogenen ganzen Formen von $x_1$ und $x_2$ als Coefficienten dargestellt werden können.[54]

---

[51] [9, 1891, 25].
[52] [9, 1891, 26].
[53] [9, 1891, 27].
[54] [9, 1891, 29].

Ist jetzt $\mu_i$ die Dimension von $\zeta_i$ und $N = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$, so muß $N \geq n-1$ sein, da nur eine Form von der Dimension Null sein kann und $p = N - (n-1)$ ist also eine ganze, nicht negative Zahl, die man "das *Geschlecht* der Gattung $\mathcal{G}$, welche durch die ursprüngliche Gleichung $f(x,y) = 0$ definirt ist,"[55] nenne. Warum dies so ist bzw. in welchem Verhältnis diese Bestimmung des Geschlechts zu der bei [Dedekind/Weber, 1882] steht, wird im letzten Abschnitt von 3.1.2 erläutert.

Im Anschluß daran widmete Hensel einen eigenen Abschnitt der entsprechenden lokalen Aufgabe, d.h. der Darstellung der modulo $P(x_1, x_2)$ ganzen algebraischen Formen durch ein Fundamentalsystem für den Modul $P$. Ein solches ist

> ein System von $n$ algebraischen Formen $\xi_1, \ldots, \xi_n$, welche, modulo $P$ betrachtet, algebraisch ganz und linear unabhängig sind, d.h. zwischen denen eine homogene lineare Congruenz
>
> $$w = u_1\xi_1 + \cdots + u_n\xi_n \equiv 0 \,(\text{mod.}\, P)$$
>
> dann und nur dann besteht, wenn alle Coefficienten durch $P$ teilbar sind.[56]

Hensel behauptete, daß dies die Aufgabe sei," welche z.B. für die Zerlegung der algebraischen Grössen in ihre Primfactoren einzig und allein erforderlich ist."[57] Weiter wies er darauf hin, daß ein absolutes Fundamentalsystem auch für jeden Modul $P$ eines ist und betonte, daß

> jede modulo $P$ ganze Form $w$ auf eine und nur auf eine Weise durch die Elemente desselben homogen und linear so dargestellt werden kann, dass die Coefficienten rationale homogene Formen von $(x_1, x_2)$ sind, deren Nenner mit $P$ keinen gemeinsamen Theiler haben.[58]

Die "Aufstellung eines solchen Systems ist viel einfacher als die im vorigen Abschnitt durchgeführte."[59] Ist $P$ kein Teiler von $D$, so ist das System $\eta^{n-1}, \ldots, \eta, 1$ ein Fundamentalsystem für den Modul $P$. Andernfalls bestimmte Hensel wieder ein System $\eta'_1, \ldots, \eta'_m$, mit dessen Hilfe alle durch $P$ algebraisch teilbaren Formen dargestellt werden können. Ausgangspunkt ist das System $\eta^{n-1}, \ldots, 1$ und mit Hilfe der Gleichungen

$$\eta'_i = \sum \beta_{i\kappa}\eta^{n-\kappa-1}$$

kann man $m$ der Formen direkt durch die modulo $P$ ganzen Formen $\frac{\eta'_i}{P}$ zu ersetzen. (Zur Darstellung der $\eta^j$ benötigt man dann die übrigen Potenzen von $\eta$ und die neuen $\eta'_i$.) Dieses Verfahren wird fortgesetzt und man gelangt nach einer endlichen Anzahl von Schritten zu dem gesuchten Fundamentalsystem modulo $P$.

### Formen erster Gattung

Um die Integranden der Integrale erster Gattung algebraisch zu charakterisieren, nannte Hensel diejenigen Formen $w$ *Formen erster Gattung*, für die für eine beliebige Form $P(x_1, x_2)$ das Produkt $wP$ noch durch eine (gebrochene) Potenz von $P$ teilbar ist.[60] Diese umfassen die algebraisch ganzen Formen und

[55] [9, 1891, 29].
[56] [9, 1891, 30]. Dies ist derselbe Begriff eines lokalen Fundamentalsystems wie in [5, 1889].
[57] [9, 1891, 30]. Es gibt keine spätere Veröffentlichung Hensels, die diese Behauptung stützt.
[58] [9, 1891, 30].
[59] [9, 1891, 30].
[60] Dazu muß es mindestens durch $P^{\frac{1}{n}}$ teilbar sein.

lassen sich so charakterisieren, “dass das Product $z = Pw$ für eine jede Nullstelle der beliebig gewählten Form $P(x_1, x_2)$ stets verschwindet.”[61]

Hensel nannte als erste Möglichkeit, alle Formen erster Gattung zu bestimmen, die Auflösung des Kongruenzensystems $U^{(n-1)} \equiv 0 \mod P$. (Dabei enthält $P$ wiederum alle Formen, durch deren $\frac{1}{n}$-te Potenz eine Form teilbar sein könnte, ohne daß alle Koeffizienten durch $P$ teilbar sind.)[62]

Es gibt aber noch einen einfacheren Weg, ein Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung zu finden, wenn man bereits ein Fundamentalsystem zur Verfügung hat. Hensel betrachtete dafür zu seinem Fundamentalsystem eine homogene Variante dessen, was bei [Dedekind-Weber, 1882, 274] komplementäre Basis heißt.

Er brachte seine Rechnung wiederum durch die Einführung einer Form mit unbestimmten Koeffizienten voran: Falls $z = \sum u_i \zeta_i$ durch $P^{\frac{1}{n}}$ teilbar ist, so auch $Z = z\overline{w}$, worin $\overline{w} = \sum v_i \zeta_i$ eine ganze Form mit unbestimmten Koeffizienten bedeutet. Dann sind in der Gleichung, der $Z$ genügt, auch alle Koeffizienten für unbestimmte $v_i$ durch $P$ teilbar. Dazu ist aber hinreichend, daß der “erste dieser Coefficienten, oder, was dasselbe ist, dass die Summe der $n$ zu $Z$ conjugirten Formen durch $P$ theilbar” ist,[63] also $S(z\overline{w}) \equiv 0(\text{mod.}\, P)$, “wenn allgemein $S(w)$ die Summe der zu einer algebraischen Form $w$ conjugirten Formen bedeutet.”[64]

Unter Benutzung der Bezeichnungen $a_{i\kappa} = S(\zeta_i \zeta_\kappa)$ formte Hensel $S(z\overline{w}) \equiv 0$ mod. $P$ in die Bedingung $\sum a_{i\kappa} v_i u_\kappa \equiv 0(\text{mod.}\, P)$ für unbestimmte Koeffizienten $v_i$ um, die sich auf $\sum a_{i\kappa} u_\kappa \equiv 0(\text{mod.}\, P)$ reduziert.

In einem zweiten Schritt ging es Hensel darum, die abgeleiteten Bedingungen auch zu erfüllen. Es ist $\Delta = |a_{ij}| \neq 0$ und eine Auflösung des Kongruenzensystems ergibt $\Delta u_\kappa \equiv 0(\text{mod.}\, P)$, also

> jenen Bedingungen kann dann und nur dann durch Formen $u_1, \ldots, u_n$ genügt werden, welche nicht sämmtlich durch $P$ theilbar sind, wenn $P$ in $\Delta$ enthalten ist.[65]

Ist dann $\overline{P}$ der größte Teiler von $\Delta = |a_{ij}|$, der keine mehrfachen Faktoren enthält, so muß man nur das Kongruenzensystem $\sum a_{ik} u_k \equiv 0(\text{mod.}\, \overline{P})$ auflösen.

Setzt man $A = (a_{i\kappa})$ und $A^{-1} = (A_{i\kappa})$, so stellte Hensel die Gleichungen $\sum a_{i\kappa} u_\kappa = \overline{P}\, \overline{u_i}$ mit ganzen Formen $\overline{u_i}$ auf, löste diese durch $u_\kappa = \overline{P} \sum A_{i\kappa} \overline{u_i}$ und setzte $\overline{\zeta_i} = \sum A_{i\kappa} \zeta_\kappa$. Mit dieser Bezeichnung ist $z = \overline{P} \sum \overline{u_i}\, \overline{\zeta_i}$.

Eine beliebige Form $w$ ist genau dann eine Form erster Gattung, wenn $\overline{P}w$ durch $\overline{P}^{\frac{1}{n}}$ teilbar ist, d.h. wie gerade gezeigt, wenn $\overline{P}w = \overline{P} \sum \overline{u_i}\, \overline{\zeta_i}$ ist. Dann folgt $w = \sum \overline{u_i}\, \overline{\zeta_i}$, worin die $\overline{u_i}$ ganze Formen von $x_1$ und $x_2$ sind. Daher bilden die $\overline{\zeta_i}$ ein Fundamentalsystem für die algebraischen Formen erster Gattung.[66]

Hensel berechnete noch (durch Betrachtung von $S(w\overline{w})$, wenn $w$ eine ganze Form und $\overline{w}$ die entsprechende Form erster Gattung ist) die Dimension von $\overline{\zeta_i}$ als $-\mu_i$, wenn $\zeta_i$ homogen von der Dimension $\mu_i$ war.

---

[61] [9, 1891, 32].

[62] Anschließend muß man die gefundenen Formen, die jetzt durch $P^{\frac{1}{n}}$ teilbar sind, noch durch $P$ teilen, was Hensel nicht erwähnte, [9, 1891, 33].

[63] [9, 1891, 33]. Es folgt durch schrittweise Betrachtung von $\overline{w} = 1, z, \ldots, z^{n-1}$ mit Hilfe der Newtonschen Potenzsummenformeln.

[64] [9, 1891, 33]. Hensel sah also kein Problem darin, $S(w)$ hier durch seine Bedeutung und mit Bezug auf die konjugierten Werte zu definieren, nachdem er zuvor gezeigt hatte, wie man diese Größe ohne die Benutzung dieser konjugierten Werte bestimmt.

[65] [9, 1891, 35].

[66] [9, 1891, 36].

### Der Zusammenhang zu den Integralen

Ist $J = \int \varphi(x,y)dx$ ein algebraisches Integral, d.h. $\varphi$ eine rationale Funktion und $y$ als algebraische Funktion von $x$ durch die Gleichung $f(y,x) = 0$ definiert, die in $y$ Grad $n$ hat, so erhält man das homogenisierte Integral, indem man

$$x = \frac{x_1}{x_2}, y = \frac{\eta}{A_0(x_1,x_2)} \quad \text{einsetzt, als } J = \int \varphi(x_1,x_2,\eta)\frac{x_2dx_1 - x_1dx_2}{x_2^2}.$$

Dabei ist $\varphi(x_1,x_2,\eta)$ eine homogene algebraische Form der nullten Dimension. Hensel setzte $\Phi(x_1,x_2,\eta) = \frac{\varphi(x_1,x_2,\eta)}{x_2^2}$ und betrachtete das entstehende Integral $\int \Phi(x_1dx_1 - x_1dx_2)$ zunächst für eine beliebige homogene Form $\Phi$. Es ergibt sich die Aufgabe

> zu untersuchen, wie diese beschaffen sein muss, damit $J$ für jeden Werth von $x$ endlich und stetig ist. Ist dies der Fall, so nennt man $J$ *ein Integral erster Gattung.* Hierzu ist bekanntlich nothwendig und hinreichend, dass für jeden Werth von $x$ $\quad dJ = \Phi \cdot (x_2dx_1 - x_1dx_2)$ unendlich klein ist.[67]

Hensel begann damit, das Differential $dJ$ so umzuformen, "dass die angegebene nothwendige und hinreichende Bedingung in algebraischer Form erscheint."[68] Dazu führte er zwei rationale homogene Hilfsformen $P(x_1,x_2)$ und $Q(x_1,x_2)$ ohne gleiche Faktoren der Dimensionen $\pi$ bzw. $\kappa$ ein, um einen anderen Ausdruck für $(x_2dx_1 - x_1dx_2)$ abzuleiten. Er erhielt

$$dJ = \Phi\frac{\kappa QdP - \pi PdQ}{P_1Q_2 - Q_1P_2},$$

wobei $P_i, Q_i$ die partiellen Ableitungen von $P$ und $Q$ bedeuten. Setzt man speziell $Q = u_1x_1 + u_2x_2$, so wird $\kappa = 1$ und der Nenner überall endlich und von Null verschieden. Man kann sich daher auf die Betrachtung des Zählers beschränken. Es ergibt sich damit die Bedingung,

> dass das Product
>
> $$\Phi(QdP - \pi PdQ) = (\Phi dP)Q - (\Phi P)\pi dQ$$
>
> unendlich klein ist, wenn $P(x_1,x_2)$ eine beliebige ganze Form ohne gleiche Factoren bedeutet.[69]

Der kritische Fall ist hier, daß $P$ verschwindet. Hensel betrachtete dann die lokalen Entwicklungen in Potenzreihen

$$P = t^\lambda \mathcal{P}(t), \quad P' = \frac{dP}{dt} = t^{\lambda-1}\mathcal{P}_1(t).$$

Weiter argumentierte er, daß $Q$ und $Q' = \frac{dQ}{dt}$ beide für $t = 0$ nicht verschwinden und die beiden Summanden des Termes, der unendlich klein werden soll, also mit verschiedenen Potenzen von $t$ beginnen. Daher müssen $P\Phi$ und $P'\Phi$ beide für $t = 0$ endlich sein.

> Beachtet man nun, das der Quotient dieser beiden Formen:
>
> $$\frac{P\Phi}{P'\Phi} = \frac{P}{P'} = t \cdot \frac{\mathcal{P}(t)}{\mathcal{P}_1(t)}$$
>
> für $t = 0$ verschwindet, ohne dass eine von ihnen unendlich gross ist, so ergibt sich, dass der Zähler verschwinden muss.[70]

[67] [9, 1891, 38].
[68] [9, 1891, 38].
[69] [9, 1891, 39].
[70] [9, 1891, 40].

Damit hatte Hensel die gewünschte Bedingung, daß $\Phi P$ für jede Nullstelle von $P$ verschwinden muß, abgeleitet. Er berücksichtigte jetzt wieder, daß im Fall der algebraischen Integrale $\varphi$ die Dimension Null, also $\Phi$ die Dimension $-2$ haben muß. Mit Hilfe des Fundamentalsystems $\overline{\zeta_i}$ für die Formen erster Gattung erhält er die Darstellung

$$\varphi = x_2^2(\overline{u_1}\overline{\zeta}_1 + \cdots + \overline{u_n}\overline{\zeta_n}).$$

Da $\overline{\zeta_i}$ die Dimension $-\mu_i$ hatte, kann man für die $\overline{u_i}$ homogene (rationale) Formen der Dimension $\mu_i - 2$ setzen. Für $\mu_i \neq 0$ ist eine homogene Form der Dimension $\mu_i - 2$ eine "homogene lineare Function der Formen

$$x_1^{\varrho_i} x_2^{\mu_i - \varrho_i}\overline{\zeta}_i = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\varrho_i} (x_2^{\mu_i}\overline{\zeta}_i) \qquad {\scriptstyle (\varrho_i = 0,1,\ldots,\mu_i-2)}\text{''}^{71}.$$

Dies sind insgesamt $\sum_{i=1}^{n-1}(\mu_i - 1) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i - (n-1) = N - (n-1) = p$ linear unabhängige Integranden, d.h. die Anzahl der linear unabhängigen Integranden erster Gattung ist gleich dem Geschlecht der betrachteten Kurve.

Hensel hob den seiner Meinung nach entscheidenden Unterschied seiner Untersuchung zu der von Dedekind und Weber hervor, denn

> [i]n der hier gegebenen Form ist dieser Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Integrale von den Herren *Dedekind* und *Weber* im §26 ihrer wichtigen Abhandlung "Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen" (dieses Journal Band 92) in voller Allgemeinheit ausgesprochen[72]

und bewiesen worden. Während in dieser Arbeit "aber nur die Nothwendigkeit der Existenz einer Lösung"[73] der Aufgabe, eine Normalbasis aufzustellen gezeigt wurde und daher "mit Hülfe jener Untersuchungen in keinem Falle die Bestimmung des Geschlechts wirklich gegeben und die Integranden erster Gattung gefunden werden können", hat Hensel ein Verfahren, also einen Algorithmus angegeben. Weiter ergebe sich aus der Untersuchung von Dedekind und Weber nicht

> wie die Coefficienten jener $p$ Integrale erster Gattung beschaffen sind, ob sie z.B. Wurzeln algebraischer Gleichungen, oder transcendente Grössen sind.[74]

Hensel schloß mit der folgenden Würdigung seines Ergebnisses:

> Hier ergiebt sich, und ich glaube auf dieses Resultat besonderes Gewicht legen zu dürfen, dass man stets ein vollständiges System von linear unabhängigen Integranden erster Gattung finden kann, deren Coefficienten aus denjenigen der ursprünglichen Gleichung $f(x, y) = 0$ rational zusammengesetzt sind; sind also z.B. die Coefficienten jener Gleichung ganze Zahlen, so sind die $p$ Functionen rationale Functionen von $x$ und $y$ mit ganzzahligen Coefficienten.[75]

Hensel kündigte eine weitere Arbeit an, die auch die Zerlegung der Formen in ihre Primfaktoren darstellen sollte und sowohl den zahlentheoretischen Fall, als auch den Fall mit beliebig vielen unabhängigen Variablen umfassen sollte. Ihre Grundlage sollte die "Theorie der bilinearen und der mit ihnen zusammenhängenden höheren homogenen Formen" bilden.[76]

[71] [9, 1891, 41].
[72] [9, 1891, 41].
[73] [9, 1891, 41].
[74] [9, 1891, 41]. Das scheint eine Fehlinterpretation zu sein, denn die Normalbasis besteht bei Dedekind und Weber ebenfalls aus Elementen des Funktionenkörpers.
[75] [9, 1891, 42].
[76] [9, 1891, 42]. Eine solche Arbeit ist nicht erschienen.

Diese sollte vermutlich auch die zusätzliche Behauptung des Vortrags in Halle beweisen, man erhalte unmittelbar den Satz von Riemann-Roch.[77]

### Zusammenhänge zur Arbeit von Dedekind und Weber

Im Vergleich zur breit angelegten Arbeit [Dedekind/Weber, 1882] ist Hensels Arbeit [9, 1891] auf ein Ziel ausgerichtet. Dieses einzige Ziel ist es, einen Algorithmus aufzustellen, mit dessen Hilfe das Geschlecht und eine Basis der Integranden erster Gattung für eine gegebene Gleichung bestimmt werden können. Nur das Fundamentalsystem für den Modul $P$ wird behandelt, ohne das es für dieses Ziel notwendig wäre. Allerdings konnte Hensel zu dessen Aufstellung ein bereits vorgestelltes Verfahren vereinfachen und er hielt es für nützlich für eine vermutlich zu diesem Zeitpunkte geplante Arbeit, in der die Primdivisoren einer rationalen Funktion $P$ bestimmt werden sollten.

Die Homogenisierung entspricht der Betrachtung einer Normalbasis bei Dedekind/Weber. Diese ordneten nämlich einer in Bezug auf $z$ ganzen Funktion $w$ als *Exponenten* die kleinste Zahl zu, so daß $\frac{w}{z^r}$ ganz in Bezug auf $\frac{1}{z}$ ist.[78] Diesem Exponenten entspricht bei Hensel die Dimension der homogenen Form, nämlich die Potenz von $x_2$, mit der der Absolutteil einer Funktion multipliziert werden muß, damit diese dann auch in Bezug auf $x_2$ ganz ist.

Während bei Dedekind/Weber das Geschlecht mit Hilfe der Verzweigungszahl definiert wurde, wobei zunächst gezeigt werden mußte, daß der benutzte Ausdruck von der gewählten Variablen unabhängig ist, nutzte Hensel die Summe der Dimensionen der Elemente seines Fundamentalsystems für die Definition des Geschlechts. Dedekind und Weber hatten gezeigt, daß die Verzweigungszahl $v_z$ das Doppelte der Summe der Exponenten einer Normalbasis ist und $p = \frac{v_z}{2} - n + 1$ gesetzt. Damit nutzte Hensel ihr Ergebnis für seine Definition bzw. Berechnung[79] und blieb bei seiner Betrachtung einer ausgezeichneten Variablen.

Überhaupt übernahm Hensel diejenigen Schritte, die heute an der Arbeit von Dedekind und Weber strukturell-begrifflich als bahnbrechend hervorgehoben werden, im Wesentlichen nicht. Zum Beispiel ging er von der Definition der Ganzheit zu einer Charakterisierung über, die besagt, daß die Funktion für alle endlichen Werte der Veränderlichen endlich bleibt und mit deren Hilfe zeigte er, daß das Produkt ganzer Funktionen wieder ganz ist. Auch werden die Punkte der Riemannschen Fläche und die Differentiale nicht abstrakt eingeführt, sondern gar nicht betrachtet.

Hensel verzichtete darauf, die Diskriminante zu definieren, auch wenn er an der Stelle, an der er aus dem Fundamentalsystem für die ganzen Formen das für die Formen erster Gattung ableitete, den entsprechenden Ausdruck betrachtete und (mit $\Delta$) bezeichnete.

Für die Integranden bzw. Differentiale erster Gattung gibt es bei Dedekind/Weber zwei Bedingungen. Während aus der ersten folgt, daß eine solche Funktion zum komplementären Modul gehören muß, stellt die zweite eine Anforderung an $z = \infty$. Die erste Bedingung

> In jedem Punkte $\mathcal{P}$, in welchem $z$ einen endlichen Wert $z_0$ hat, ist $(u(z - z_0))_0 = 0$.[80]

[77] [11, 1892, 57].

[78] [Dedekind/Weber, 1882, 314].

[79] Wobei er sich, worauf ich oben hingewiesen hatte, nicht explizit so äußert, als würde er das Geschlecht definieren, eher so, als sei klar, daß der von ihm betrachtete Ausdruck das Geschlecht ist.

[80] [Dedekind/Weber, 1882, 329]. Dabei ist $u$ die Funktion, die als Differentialquotient bezeichnet wird und $_0$ bedeutet das

übernahm Hensel im Prinzip. Da er im Allgemeinen nicht auf Linearfaktoren zurückgreifen konnte, formulierte er sie mit Hilfe einer rationalen Form $P(x_1, x_2)$, nämlich daß $\Phi P$ an jeder Stelle verschwinden soll, an der $P$ verschwindet. Während Dedekind und Weber diese Bedingung aus einer Theorie der abstrakten Differentialquotienten und der Ordnungszahlen folgerten, argumentierte Hensel an der entsprechenden Stelle mit den Anfangstermen von lokalen Potenzreihenentwicklungen.
Die zweite Bedingung von Dedekind und Weber ist bei Hensel aufgrund der Homogenisierung automatisch erfüllt. Zu der Schlußfolgerung, die diese aus ihrer Bedingung ableiten, gelangte Hensel, weil die homogene Form von der Dimension Null sein muß, damit sie einer algebraischen Funktion entspricht.

Es scheint daher, als habe sich Hensel relativ genau an Dedekind-Weber orientiert und versucht, die für seine Problemstellung wichtigen Theorieteile in eine knappere Theorie (die insbesondere ganz unabhängig von Primidealen ist) zu integrieren. Wesentlich neu an Hensels Arbeit ist der Versuch, einen wirklichen Algorithmus zur Bestimmung eines Fundamentalsystems zu finden.[81] Dabei gelangte er zu Schritten, die sich einfach als Übergang von der Teilbarkeit durch $P^{\frac{k}{n}}$ zur Teilbarkeit durch $P^{\frac{k+1}{n}}$ beschreiben ließen und diese Begriffsbildung legte es vielleicht nahe, auch bei der Betrachtung der Formen erster Gattung die Bedingung als eine Teilbarkeit von $P\Phi$ mindestens durch $P^{\frac{1}{n}}$ zu formulieren.

### 3.1.3 Eine Vereinfachung und Verbesserung

Die Arbeit *Ueber die Darstellung der ganzen algebraischen Functionen einer Variablen durch ein Fundamentalsystem* ([12, 1893]) entstand vermutlich aus dem Wunsch, einen von Franklin bemerkten Fehler zu verbessern. Hensel hatte nämlich in der Arbeit [9, 1891] vorausgesetzt, daß es möglich ist, mit dem Ausgangssystem die Eins darzustellen, bei seinen Induktionsschritten aber nicht nachgeprüft, ob diese Eigenschaft erhalten bleibt. Er setzte also

> wie a.a.O. ausdrücklich hervorgehoben wird, voraus, dass durch die betrachtete Form $w$ die Zahl Eins, oder irgendeine zu $P(x_1, x_2)$ theilerfremde Form darstellbar sei. Berücksichtigt man aber diese Bemerkung bei der im fünften Abschnitt von dieser Aequivalenz gemachten Anwendung, so gelangt man zu einem etwas anderen Resultate, welches sich von dem in dieser Arbeit gefundenen nur formal unterscheidet. [82]

Diesen vervollständigten Gedankengang veröffentlichte Hensel jedoch nicht, da er ein einfacheres Verfahren abgeleitet hatte und das andere Resultat auch komplizierter zu formulieren gewesen wäre.
Er konzentrierte sich in der Arbeit [12, 1893] ausschließlich auf die Aufgabe, alle durch $(x - a)$ teilbaren Funktionen durch Auflösung geeigneter linearer Gleichungssysteme zu bestimmen und verzichtete daher auf Konstruktivitätsanforderungen:

> Um die hier durchgeführten Entwicklungen ohne Bezugnahme auf die weitergehenden Untersuchungen der vorigen Arbeit vollständig darlegen zu können, ist an die Stelle einer rationalen homogenen Form $P(x_1, x_2)$ hier von vorn herein ein Linearfactor $x-a$ als Modul betrachtet, und in Folge dessen sowohl von der rationalen Ausführung der Operationen, als auch von der Betrachtung der unendlich fernen Stellen des algebraischen Gebildes abgesehen.[83]

Einsetzen der Werte am Punkt $\mathcal{P}$.

[81] Im Unterschied zu z.B. [Kronecker, 1881], wo in jedem Schritt ein Nenner maximalen Grades bestimmt werden muß, ohne daß auf die konkrete Lösung dieser Aufgabe eingegangen wird.

[82] [12, 1893, 154].

[83] [12, 1893, 154].

Gleich der erste Satz bestimmt eine ganze algebraische Funktion von $x$ als eine, "die für alle endlichen Werthe von $x$ ebenfalls endlich bleibt."[84] Ist dann $y$ eine ganze algebraische Funktion $n$-ten Grades von $x$, so stellt sich die Frage, für welche Linearfaktoren $(x-a)$ und für welche $u_i$ der Quotient $\frac{u_0+u_1y+\cdots+u_{n-1}y^{n-1}}{x-a}$ ganz ist, obwohl nicht alle $u_i$ durch $x-a$ teilbar sind. Für die Bestimmung der in Frage kommenden Linearfaktoren $(x-a)$ verwies Hensel ebenso auf die vorherige Arbeit, wie für den nächsten Schritt, aus einem linear unabhängigen System mit $n$ ganzen Elementen und einem Fundamentalsystem für die durch $x-a$ teilbaren Funktionen ein linear unabhängiges System zu finden,

> durch welches jetzt auch noch alle *diejenigen* ganzen algebraischen Functionen mit *ganzen* Coefficienten dargestellt werden können, welche durch das erste System ausgedrückt als Brüche mit dem Nenner $x-a$ erschienen.[85]

Die damit verbleibende Aufgabe formulierte Hensel folgendermaßen:

> Es seien $y_1, y_2, \ldots, y_n$ $n$ unabhängige ganze algebraische Functionen von $x$; es sollen die Coefficienten $u_1, u_2, \ldots, u_n$ in der allgemeinsten Weise als ganze Functionen von $x$ so bestimmt werden, dass die algebraische Function $z = u_1y_1 + \cdots + u_ny_n$ durch einen gegebenen Linearfactor $x-a$ algebraisch theilbar ist.[86]

Da die Koeffizienten nur modulo eines Linearfaktors betrachtet werden müssen, können sie als konstant angenommen werden.

Die auftretenden gebrochenen Potenzen erläuterte Hensel in dieser Arbeit etwas ausführlicher als in der vorangegangenen. So schrieb er explizit, daß er "den Begriff der algebraischen Theilbarkeit in einem etwas erweiterten Sinne auffaßt."[87] Es soll "*$z$ algebraisch theilbar* durch die gebrochene Potenz $(x-a)^\delta$ heissen, wenn der Quotient $w = \frac{z}{(x-a)^\delta}$ für $x=a$ endlich bleibt."[88] Ist $z^n + B_1(x)z^{n-1} + \cdots + B_n(x) = 0$ die von $z$ erfüllte Gleichung, so müssen in der von $w$ erfüllten Gleichung

$$w^n + \frac{B_1(x)}{(x-a)^\delta}w^{n-1} + \frac{B_2(x)}{(x-a)^{2\delta}}w^{n-2} + \cdots + \frac{B_n(x)}{(x-a)^{n\delta}} = 0$$

alle Koeffizienten ganz sein, also muß gelten $B_i(x) \equiv 0\,(\mathrm{mod.}\,(x-a)^{i\delta})$. Hensel erläuterte explizit, wie diese Kongruenzen für gebrochenes $i\delta$ aufzufassen sind:

> Nun ist aber eine ganze rationale Function $B(x)$ nur dann durch die gebrochene Potenz eines Linearfactors theilbar, wenn sie die nächst höhere ganzzahlige Potenz desselben enthält.[89]

Bezeichnet $[\delta]$ die minimale ganze Zahl, die größer oder gleich $\delta$ ist, und nennt man $z$ *genau* durch $(x-a)^\delta$ teilbar, wenn $z$ nicht durch $(x-a)^{\delta_1}$ mit $\delta_1 > \delta$ teilbar ist, so kommen für Exponenten $\delta$, durch die eine Funktion genau teilbar ist, nur Brüche in Frage, deren Nenner in der gekürzten Form kleiner oder gleich $n$ ist. Hensel ordnete jetzt für ein festes $n$ die gekürzten Brüche mit Nenner kleiner oder gleich $n$ der Größe nach, so daß $\delta_0 = 0, \delta_{i+1} > \delta_i$ und $\delta_\rho = 1$. Für $i = 1, \ldots, n$ kann dann zwischen $i\delta_k$ und $i\delta_{k+1}$ keine ganze Zahl liegen. Seine Aufgabe reduzierte sich nunmehr auf die folgende:

> Es seien $y_1, y_2 \ldots, y_m$ $m$ unabhängige ganze algebraische Functionen des Gattungsbereiches $\mathcal{G}(x,y)$, welche sämmtlich durch die gebrochene Potenz $(x-a)^{\delta_k}$ algebraisch theilbar sind..., so dass also die algebraische

[84] [12, 1893, 139].
[85] [12, 1893, 141].
[86] [12, 1893, 142].
[87] [12, 1893, 142].
[88] [12, 1893, 142].
[89] [12, 1893, 143].

Form $z = u_1y_1 + u_2y_2 \cdots + u_my_m$ für unbestimmte Werthe der Constanten $u_1, \ldots, u_m$ dieselbe Potenz von $x - a$ enthält. Es sollen nun jene $m$ Constanten in der allgemeinsten Weise so bestimmt werden, dass $z$ nicht bloss durch die $\delta_k$te, sondern auch durch die nächsthöhere d.h.durch die $\delta_{k+1}$te Potenz von $x - a$ algebraisch theilbar ist.[90]

Die Voraussetzung besagt also, daß $B_i(u_1, \ldots, u_m) = (x-a)^{[i\delta_k]}\overline{B_i}(u_1, \ldots, u_m)$ ist, wo $\overline{B_i}$ auch eine ganze homogene Form der $u_i$ ist. Beim Übergang von $\delta_k$ zu $\delta_{k+1}$ ergeben sich nur dann neue Bedingungen $\overline{B_i}(u_1, \ldots, u_m) \equiv 0 \bmod(x-a)$, wenn $i\delta_k$ ganz war. Nach Einsetzen von $a$ für $x$ werden diese Kongruenzen zu Gleichungen: $\overline{B_i}(u_1, \ldots, u_m|a) = 0$ (falls $i\delta_k$ ganz). Wie in der vorherigen Arbeit führte Hensel dieses Gleichungssystem durch die Einführung von Unbestimmten und anschließende Taylorentwicklung und den Eulerschen Satz auf ein lineares Gleichungssystem zurück. In einem ersten Schritt erhält man die Kongruenzen

$$B_i^{(\lambda)}(u_1, \ldots, u_m) \equiv 0 \operatorname{mod}(x-a)^{[i\delta_k + (i-\lambda)(\delta_{k+1}-\delta_k)]},$$

wobei $B_i^{(\lambda)}$ alle $\lambda$-ten partiellen Ableitungen von $B_i$ nach den $u_i$ bezeichnet. Da gilt $[i\delta_k + (i-\lambda)(\delta_{k+1} - \delta_k)] = [i\delta_{k+1}]$, sind diese Kongruenzen äquivalent zu

$$B_i^{(\lambda)}(u_1, \ldots, u_m) \equiv 0 \operatorname{mod}(x-a)^{[i\delta_{k+1}]},$$

die aus den entsprechenden Kongruenzen für die (i-1)-ten partiellen Ableitungen folgen. Damit reduziert sich das Kongruenzensystem auf das lineare Gleichungssystem $\overline{B_i}^{(i-1)}(u_1, \ldots, u_m|a) = 0$ (falls $i\delta_k$ ganz). Setzt man die die allgemeine Lösung $u'$ für die $u_i$ in das $z = u_1y_1 + \cdots + u_my_m$ aus der Voraussetzung des aktuellen Schrittes ein, so erhält man (durch die enthaltenen Parameter) $m'$ linear unabhängige Funktionen $y_i'$, durch die sich genau alle durch $(x-a)^{\delta_{k+1}}$ teilbaren Funktionen darstellen lassen und für die also der nächste Schritt durchgeführt werden kann.

Die Betrachtung der vollen Sequenz der $\delta_i$ führte dazu, daß in jedem Schritt nur relativ wenige Kongruenzen betrachtet werden mußten. Die Vereinfachung, die daher kommt, daß als Modul diesmal ein Linearfaktor betrachtet wird, ist hingegen nicht wesentlich, sondern soll nur die Darstellung einfacher machen. Hensel wies zum Abschluß nochmal auf das "von mir in jener Arbeit zum ersten Male eingeführte absolute Fundamentalsystem" hin und betonte, daß die Übertragung des hier vorgeführten Verfahrens auf die konstruktive, homogene Situation "so einfach" sei, "dass auf sie an dieser Stelle nicht näher eingegangen zu werden braucht."[91]

### Die Situation 1894

Im Jahr 1894 veröffentlichte Hensel die Arbeit *Théorie des fonctions algébriques d'une variable. (Premier mémoire.) Traduit par M. G. Brincard.* [18, 1894] in der Acta Mathematica. Auch für diese Arbeit war offenbar (ebenso wie für [9, 1891]) eine Fortsetzung geplant gewesen, zu der es jedoch nicht kam.[92]

Hensel stellte für das Publikum der Acta Mathematica sehr ausführlich eine Kombination seiner Ansätze vor: Er arbeitete mit der Homogenisierung aus [9, 1891], benutzte aber Linearfaktoren und (natürlich) das stärkere Verfahren aus [12, 1893], um in weniger Schritten zu den durch $(x-a)$ teilbaren Funktionen zu

[90] [12, 1893, 145].
[91] [12, 1893, 155].
[92] Bei [9, 1891] erkennt man dies an der römischen Eins im Titel: *Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der algebraischen Integrale. I.*

gelangen. Diese Ansätze wurden offenbar für so wichtig befunden, daß eine Übersetzung ins Französische angefertigt wurde.[93]

Ein weiteres Zeichen für die internationale Sichtbarkeit von Hensels Theorie war die oben bereits angesprochene Kritik des Cambridgers H.F.Baker [Baker, 1894] in den Mathematischen Annalen an der Arbeit [9, 1891], die Hensel auf etwa anderthalb Seiten [19, 1894] entschieden zurückwies.[94] Verbunden mit Bakers Detailkritik war jedoch auch eine grundsätzliche Anerkennung der Henselschen Resultate:

> Of course these remarks are not intended to detract from the very great interest attaching to the results given by Hensel.[95]

Hensel wechselte im Anschluß an diese Arbeit Voraussetzungen, Hilfsmittel und Fragestellungen. Den Zusammenhang zwischen Formen erster Gattung und Integralen erster Gattung konnte er jedoch auch im neuen Rahmen noch verwerten.

## 3.2 Die Theorie von 1895 - Elementarteiler

### 3.2.1 Der Aufbau der Arbeit

Hensel begann seine Arbeit *Ueber einen neuen Fundamentalsatz in der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen* [20, 1895] mit der Behauptung, daß die entwickelte Theorie nur "der Einfachheit"[96] wegen für algebraische Funktionen einer Veränderlichen vorgeführt werde und auch für Gleichungen ohne oder mit zwei oder mehr Veränderlichen durchgeführt werden kann. Nach dieser Vorbemerkung gliedert sich die Arbeit in zwei Teile. Die ersten sechs Paragraphen behandeln (modern formuliert) die Theorie des ganzen Abschlusses von $\mathbb{C}[x]$ in einer algebraischen Erweiterung. Der zweite Teil geht auf die Situation ein, die für die Behandlung der Abelschen Integrale maßgeblich ist, bei der also die Veränderliche $x$ auch den Wert $\infty$ annehmen kann. Hierfür führte Hensel eine etwas andere Homogenisierung als in [9, 1891] ein, für die es besonders einfach ist, die Ergebnisse von den Funktionen auf die Formen zu übertragen.

Im ersten Paragraph übertrug Hensel die Bildung des ggT von rationalen Funktionen auf Wurzelfunktionen, also Wurzeln aus rationalen Funktionen. Eine solche Wurzelfunktion ist das Produkt ihres größten rationalen Divisors mit ihrem kleinsten Rest und die reduzierten ganzen Wurzelfunktionen, die mit ihrem Rest übereinstimmen, werden im folgenden wichtig.

Den ggT von $n$ konjugierten Funktionen definierte Hensel mit Hilfe der Koeffizienten der Minimalgleichung, und zwar als größten gemeinsamen Teiler von (verschiedenen) Wurzeln aus diesen Koeffizienten.[97] Ebenfalls eine Wurzelfunktion ist der ggT von mehreren vollständigen Systemen konjugierter Funktionen.

Im zweiten Paragraphen führte Hensel Elementarteiler und Vielfache von Matrizen ein, um den grundlegenden Satz formulieren zu können, daß eine Matrix genau dann ein Vielfaches einer anderen ist, wenn

[93] Nicht alle Arbeiten in der Acta Mathematica waren französisch, vgl. z.B. Hensels [6, 1891].

[94] Baker glaubte, eine Beweislücke aufgezeigt zu haben, worauf Hensel antwortete, die Schließung dieser sei nicht nur leicht, sondern von ihm bereits veröffentlicht gewesen. Weiter gab Baker ein Beispiel an, um zu demonstrieren, daß Hensels Geschlechtsformel in einer Klasse von Fällen zu falschen Ergebnissen führe. Hensel skizzierte in wenigen Zeilen, daß das Geschlecht in Bakers Beispiel maximal Eins sein kann und schrieb dazu: "Wie aber Herr Baker durch Anwendung meiner Methoden die grössere Zahl $p = 3$ erhalten will, ist mir völlig unverständlich," [19, 1894, 599] und in der Tat sind Bakers Ausführungen sehr kompliziert und nicht nah an Hensels Vorgehensweisen, [Baker, 1894, 128f.]

[95] [Baker, 1894, 130].

[96] [20, 1895, 254].

[97] In einer Fußnote wies er darauf hin, daß der so definierte ggT mit dem idealtheoretischen ggT übereinstimmt.

ihre Elementarteiler Vielfache der Elementarteiler der anderen sind. Zwei Matrizen heißen äquivalent, wenn jede ein Vielfaches der anderen ist und damit ist jede Matrix äquivalent zur Diagonalmatrix ihrer Elementarteiler.

Betrachtet man nun speziell die aus $n$ Größen und ihren Konjugierten gebildete Matrix, so sind sowohl die ggTs der Konjugierten (Die in einer Spalte stehen und deren ggT daher im folgenden Spaltenteiler heißt.) als auch die Elementarteiler Wurzelfunktionen. Die Frage ist daher, ob die Elementarteiler der aus den Spaltenteilern gebildeten Diagonalmatrix mit den Elementarteilern der ursprünglichen Matrix übereinstimmen. Betrachtet man einzelne Linearfaktoren $(x - a)$, so läßt sich diese Bedingung einfacher formulieren, denn dann müssen die Spaltenteiler dieselben Exponenten bezüglich $(x - a)$ enthalten wie die Elementarteiler des Ausgangssystems. Sind beide Systeme äquivalent, so heißt das System kanonisch, stimmen nur die Exponenten von $(x - a)$ überein, so heißt es kanonisch in Bezug auf $(x - a)$.

Im dritten Paragraphen wird die Relation *Vielfaches* zwischen Systemen von $n$ Elementen, sowie das (*Kronecker*sche) Fundamentalsystem eingeführt. Die Bedeutung der Elementarteiler zeigt sich auch darin, daß die Elementarteiler eines Fundamentalsystems die ggTs der Elementarteiler beliebiger (linear unabhängiger) ganzer Systeme sind. Der folgende Paragraph beginnt mit dem Beweis des entscheidenden Satzes, wonach ein System genau dann ein Fundamentalsystem ist, wenn seine Elementarteiler reduzierte Wurzelfunktionen sind. Einfach sind dabei die Beweisteile, daß ein System, dessen Elementarteiler reduzierte Wurzelfunktionen sind, ein Fundamentalsystem ist, sowie der Übergang von einem kanonischen System zu einem Fundamentalsystem.

Hensel behauptete bereits in dieser Arbeit, daß jedes System äquivalent zu einem kanonischen System ist.[98] Im fünften Paragraphen führte er aber zunächst nur den Beweis, daß ein beliebiges System äquivalent zu einem in Bezug auf $(x - a)$ kanonischen System ist, da dieser ausreicht, um von einem beliebigen System zu einem Fundamentalsystem zu gelangen.

Den Abschluß des ersten Teils bildet ein Paragraph, in dem gefolgert wird, daß die Elementarteiler eines Fundamentalsystems auch aus den Elementarteilern eines beliebigen Systems bestimmt werden können. Dazu bildet man für jeden vorkommenden Linearfaktor den Rest der Elementarteiler des beliebigen Systems und ordnet die reduzierten Anteile dann zu den gesuchten Elementarteilern zusammen.

Der zweite Teil führt eine Homogenisierung ein, die eine direkte Übertragung der Ergebnisse erlaubt. So beginnt der siebente Paragraph mit der Einführung der homogenen rationalen und Wurzelfunktionen von zwei Variablen (der homogenen rationalen Formen), sowie deren ggTs. Im Anschluß daran definierte Hensel die homogenen algebraischen Formen und fand darunter die algebraischen Funktionen als die Formen nullten Grades wieder. Der ggT der Konjugierten einer homogenen Form wird wiederum so definiert, daß er, ebenso wie die Elementarteiler eines Systems homogener Formen, eine homogene Wurzelform ist. Damit läßt sich auch der Begriff des kanonischen Systems übertragen.

Im achten Paragraphen führte Hensel den Begriff des absoluten Fundamentalsystems ein, mit dessen Hilfe alle ganzen homogenen Formen einer Gattung als Linearkombination mit ganzen Koeffizienten dargestellt werden können. Falls ein solches existiert, sind seine Elementarteiler die ggTs der Elementarteiler aller

[98] Hierbei bedeutet äquivalent, daß mit beiden Systemen dieselben Elemente dargestellt werden können.

ganzen Systeme mit $n$ Elementen. Hensel zeigte die Existenz eines solchen Fundamentalsystems durch einen nichtkonstruktiven Beweis. An diesen schließt sich der Satz, daß ein System genau dann ein Fundamentalsystem ist, wenn seine Elementarteiler reduzierte Wurzelformen sind. Der Beweis überträgt sich aus dem nichthomogenen Fall, wobei die Konstruktion eines lokal kanonischen Systems nicht übertragen, sondern nur benutzt werden muß. Schließlich erhält man ebenfalls analog die Aussage, daß aus einem beliebigen System die Elementarteiler bestimmt werden können.

Im abschließenden neunten Paragraphen wandte Hensel dieses Resultat an, indem er am Beispiel der reinen Gleichung $y^n = a(x)$ vorführte, wie die Diskriminante tatsächlich berechnet werden kann. Die Bedeutung der Diskriminante des zugeordneten Bereiches homogener algebraischer Formen wird aber nicht erläutert, sondern dazu auf zukünftige Arbeiten verwiesen.

Hensel führte an den verschiedenen Stellen an, was noch auf rationalem Wege bestimmt werden kann, allerdings sind die kritischen Linearfaktoren $(x - a)$ grundsätzlich nicht dabei.

### 3.2.2 Die Theorie der ganzen algebraischen Funktionen

#### Die neuen Objekte

Einer der Ausgangspunkte für die Komposition dieser Arbeit ist die Beobachtung, daß die in der Arbeit [5, 1889] erfolgte Berechnung des ggTs der Konjugierten eines Elements auf die Betrachtung der Koeffizienten der Minimalgleichung zurückgeführt werden kann und daher keine Theorie der idealen Primdivisoren benötigt. Diese ggTs sind nunmehr Wurzelfunktionen, mit deren Einführung Hensel daher seine Arbeit begann.

Eine *Wurzelfunktion* hat die Gestalt $a(x)^{\frac{1}{\varrho}}$, wobei $a(x)$ eine rationale Funktion ist und eine der $\varrho$-ten Wurzeln fest gewählt ist. Die Bestimmung des ggTs $d(x)$ von $n$ Wurzelfunktionen $a_i(x)^{\frac{1}{\varrho_i}}$ läßt sich besonders leicht erläutern, wenn man die Wurzelfunktionen in ein Produkt von Linearfaktoren zerlegt denkt, ist aber auch sonst auf rationalem Weg möglich. Sei also $a_i(x) = \prod (x - c_j)^{\delta_j}$ (mit $\delta_j \in \mathbb{Q}$) ist. Dann nimmt man

> jeden Linearfactor so oft in $d(x)$ auf, als er in den $n$ Functionen $a_i(x)^{\frac{1}{\varrho_i}}$ mindestens vorkommt. Auch diese gemeinsamen Theiler können offenbar ohne Kenntnis der Linearfactoren von $a_1, \ldots, a_n$ allein durch das Euklidische Verfahren gewonnen werden.[99]

Die Notationsweise für diesen ggT ist $d(x) = \left(a_1(x)^{\frac{1}{\varrho_1}}, a_2(x)^{\frac{1}{\varrho_2}}, \ldots, a_n(x)^{\frac{1}{\varrho_n}}\right)$. Er ist genau dann ganz, wenn alle $n$ Funktionen ganz sind. Zu einer beliebigen Wurzelfunktion $d(x) = \prod (x - a_i)^{\delta_i}$, wobei $\delta_i$ ein positiver oder negativer Bruch ist, definiert Hensel den größten rationalen Divisor $[d(x)] = \prod (x - a_i)^{[\delta_i]}$, wobei $[\delta]$ für $\delta \in \mathbb{Q}$ im Unterschied zur Arbeit [9, 1891] diesmal die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $\delta_i$ bezeichnet, und den kleinsten Rest $R(d(x)) = \prod (x - a_i)^{\delta_i - [\delta_i]}$. Besonders wichtig sind *reduzierte ganze Wurzelfunktionen*, in denen alle Exponenten positiv und kleiner als Eins sind.[100]

Um den ggT konjugierter algebraischer Funktionen zu definieren, fragte Hensel zunächst nach den Bedingungen dafür, daß diese alle algebraisch durch eine Funktion $\delta$ teilbar sind. Diese Teilbarkeit soll bedeuten, daß der Quotient $z$ ganz ist, also "für alle endlichen Werthe von $x$ ebenfalls endlich bleibt" und

[99] [20, 1895, 256].
[100] [20, 1895, 256].

dies ist auch der Fall, wenn die “Coefficienten $a_i(x)$ [der von $z$ erfüllten Gleichung] irgend welche ganze *algebraische* Functionen von $x$ sind.”[101]

Sind daher $y_1, \ldots, y_n$ die konjugierten Wurzeln der Gleichung $y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x) = 0$, so läßt sich die Bedingung, daß $\delta$ ein Teiler der $y_i$ ist, so formulieren, daß die von $\eta_i = \frac{y_i}{\delta}$ erfüllte Gleichung

$$\eta^n + \frac{a_1(x)}{\delta}\eta^{n-1} + \frac{a_2(x)}{\delta^2}\eta^{n-2} + \cdots + \frac{a_n(x)}{\delta^n} = 0$$

ganze Koeffizienten hat,

> also $\delta$ ein Theiler der folgenden Wurzelfunction ist: $d(x) = \left(a_1(x), a_2(x)^{\frac{1}{2}}, \ldots, a_n(x)^{\frac{1}{n}}\right)$.[102]

Da also alle gemeinsamen Teiler der $y_i$ auch Teiler der Wurzelfunktion $d(x)$ sind, nannte Hensel diese den größten gemeinsamen Teiler der $y_i$ und bezeichnete sie auch durch $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.[103] Dieser ggT ist genau dann eine ganze Wurzelfunktion, wenn alle $a_i$ ganz sind, also $y$ eine ganze algebraische Funktion ist. Der größte gemeinsame Teiler von mehreren Systemen konjugierter Funktionen ist wieder eine Wurzelfunktion, nämlich der ggT der Wurzelfunktionen, die die ggTs der einzelnen Systeme sind.

**Das neue Hilfsmittel**

Ermöglicht wird die neue Theorie durch einen “Fundamentalsatz, auf welchem die hier zu gebenden Resultate sämmtlich beruhen.”[104] Ist $(a_{ik})$ eine rechteckige Matrix, deren Einträge rationale Funktionen von $x$ sind, und ist jeweils $D_i$ der größte gemeinsame Teiler aller $i \times i$-Unterdeterminanten, dann heißt $E_i = \frac{D_i}{D_{i-1}}$ der $i$-te Elementarteiler der Matrix $A$ $(i = 1, \ldots, n\,, D_0 = 1)$.

Ist $B = PAQ$ ist, wobei die Matrizen $P$ und $Q$ ganze Einträge haben, so heißt $B$ ein Vielfaches von $A$. Diese Aussage formulierte Hensel folgendermaßen:

> Componiert man ein System $(a_{ik})$ vorn und hinten mit je einem anderen System $(\alpha_{ik})$ bzw. $(\beta_{ik})$, deren Elemente aber *ganze* rationale Functionen von $x$ sein sollen, so erhält man ein neues durch die Compositionsgleichung $(\alpha_{ik})(a_{ik})(\beta_{ik}) = (\overline{a}_{ik})$ definirtes System $(\overline{a}_{ik})$; jedes solches System soll ein *Vielfaches* von $(a_{ik})$ genannt werden.[105]

Der entscheidende Satz besagt, daß $B$ genau dann ein Vielfaches von $A$ ist, wenn die Elementarteiler $E_i$ von $B$ Vielfache der Elementarteiler $\overline{E}_i$ von $A$ sind, d.h. $E_i = M_i\overline{E}_i$, wobei die $M_i$ “ganze Größen desjenigen Bereiches [sind], dem die Elemente der Systeme $(\alpha), (a)$ und $(\beta)$ angehören.”[106] Der zitierte Halbsatz weist bereits darauf hin, daß Hensel diesen Satz auch auf “ganze oder gebrochene rationale oder algebraische Functionen von $x$” ausdehnen wollte. Wie Hensel schrieb, wurde dieser Satz für Matrizen mit ganzzahligen Einträgen zuerst von Frobenius 1879 aufgestellt. Er war 1894 in seiner Arbeit in den Berliner Berichten *Ueber die Elementarteiler der Determinanten* [Frobenius, 1894] auf ihn zurückgekommen und Hensel hatte in der im März 1894 beendeten Arbeit *Ueber die Elementartheiler componierter Systeme* [17, 1894] einen “allgemeinen Beweis angegeben, welcher auch für beliebige Elemente $a_{ik}$” gilt.[107]

---

[101] [20, 1895, 257].
[102] [20, 1895, 257].
[103] [20, 1895, 257]. An dieser Stelle wies Hensel in einer Fußnote darauf hin, daß dieser Teiler mit dem idealtheoretischen Teiler von $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ übereinstimmt, er jedoch den elementaren Charakter seiner Untersuchung hervorheben wollte.
[104] [20, 1895, 260].
[105] [20, 1895, 259f].
[106] [20, 1895, 260].
[107] [20, 1895, 260]. In einer Fußnote wies Hensel darauf hin, daß der Fall, in dem $(a_{ik})$ und $(\overline{a}_{ik})$ Systeme algebraischer Funktionen einer Variablen sind, dort nicht ausdrücklich erwähnt ist, aber ebenso bewiesen werden kann.

Nennt man zwei Systeme äquivalent, die jeweils ein Vielfaches des anderen sind, so folgerte Hensel noch, daß zwei Systeme genau dann äquivalent sind, wenn sie die gleichen Elementarteiler haben, und daß jedes System $(a_{ik})$ äquivalent zu der Diagonalmatrix seiner Elementarteiler ist.

Sei jetzt $y$ eine algebraische Funktion $n$-ten Grades von $x$, seien $Y^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ rationale Funktionen von $x$ und $y$ und seien $Y_k^{(i)}$ die Konjugierten von $Y^{(i)}$. Betrachtet man dann die $n \times n$-Matrix

$$\left(Y_k^{(i)}\right) = \begin{pmatrix} Y_1^{(1)} & Y_1^{(2)} & \ldots & Y_1^{(n)} \\ Y_2^{(1)} & Y_2^{(2)} & \ldots & Y_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_n^{(1)} & Y_n^{(2)} & \ldots & Y_n^{(n)} \end{pmatrix},$$

und “das vollständige System aller Unterdeterminanten derselben $h$ten Ordnung”, so bemerkte Hensel, daß dieses

> ungeändert [bleibt], wenn man irgend zwei conjugirte Functionen $y_r$ und $y_s$ mit einander vertauscht; denn einer solchen Permutation entspricht ja die Vertauschung der $r$ten und $s$ten Zeile in dem Systeme $\left(Y_k^{(i)}\right)$.[108]

Daher besteht die Menge aller $h \times h$-Unterdeterminanten $(h = 1, \ldots, n)$ aus mehreren vollständigen Familien konjugierter Funktionen und ihr größter gemeinsamer Teiler ist also eine Wurzelfunktion. Damit sind auch die Elementarteiler der Matrix $\left(Y_k^{(i)}\right)$ Wurzelfunktionen und zwar alle ganze Wurzelfunktionen genau dann, wenn alle $Y^{(i)}$ ganze Funktionen waren.
Weiter bezeichnete Hensel mit $d_i(x)$ den größten gemeinsamen Teiler der Konjugierten zu $Y^{(i)}$. Dann enthält die Matrix mit den Elementen $Z_k^{(i)} = \frac{Y_k^{(i)}}{d_i(x)}$ nur ganze Einträge und es gilt $(Y_k^{(i)}) = (Z_k^{(i)})D$, wobei $D$ die Diagonalmatrix ist, deren Einträge die $d_i(x)$ sind. Nach obigem Satz sind daher die Elementarteiler von $(Y_k^{(i)})$ Vielfache der Elementarteiler von $D$.
Letztere sind aber leicht zu bestimmen. Es enthält

> der $i$te Elementartheiler $e_i(x)$ jeden der Linearfactoren $x - a$ von $d_1, \ldots, d_n$ in derjenigen Potenz, deren Exponent unter den in $d_1, \ldots, d_n$ enthaltenen Potenzen von $x - a$ der Grösse nach die $i$te Stelle einnimmt.[109]

**Neue Begriffe**

Als besonders nützlich erwies sich die Situation, in der die Elementarteiler von $(Y_k^{(i)})$ nicht nur Vielfache der Elementarteiler von $D$ sind, sondern auch mit diesen übereinstimmen. Dann sind die beiden Systeme äquivalent und die Determinante von $\left(Z_k^{(i)}\right)$ ist eine Konstante. In diesem Fall nannte Hensel das System $Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)}$ ein *kanonisches System*.
Ein *kanonisches System in Bezug auf den Linearfaktor* $x - a$ hat die schwächere Eigenschaft, daß

> die Determinante von $\left(Z_k^{(i)}\right)$ nur durch einen bestimmten Linearfaktor $x - a$ nicht theilbar [ist], während sie andere enthalten kann.[110]

Als einfachstes Beispiel für ein kanonisches System führte Hensel das System $1, y, \ldots, y^{n-1}$ an, falls $y$ eine Wurzelfunktion $n$-ten Grades ist.

[108] [20, 1895, 261].
[109] [20, 1895, 263].
[110] [20, 1895, 263].

Diese Definition spiegelt das genauere Verständnis der Situation wider, das durch die Betrachtung der Elementarteiler ermöglicht wurde. Überträgt man die von Hensel in der Arbeit [5, 1889] aufgestellte Bedingung für ein normales System in die Terminologie und Situation der Arbeit [20, 1895], so besagte sie, daß die Determinante des Systems $(Y_k^{(i)})$ mit der Determinante von $D$ übereinstimmen soll (bzw. diese Übereinstimmung für den $(x-a)$-Anteil). Der von Frobenius stammende Satz besagt aber, daß daraus bereits folgt, daß die Elementarteiler beider Systeme übereinstimmen (bzw. in ihrem $(x-a)$-Anteil übereinstimmen). Diese äquivalente Forderung benutzte Hensel für seine neue Definition.[111]

In einem nächsten Schritt führte Hensel den Begriff des *Vielfachen* für Systeme $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ und $(\overline{Y}^{(1)}, \ldots, \overline{Y}^{(n)})$ in der Weise ein, daß die entsprechenden Systeme $(Y_k^{(i)})$ bzw. $(\overline{Y}_k^{(i)})$ Vielfache von einander sind. Daraus ergibt sich, daß $(\overline{Y}^{(i)})$ ein Vielfaches von $(Y^{(i)})$ bzw. $(Y^{(i)})$ ein Teiler von $(\overline{Y}^{(i)})$ ist, falls sich die Elemente $\overline{Y}^{(1)}, \ldots, \overline{Y}^{(n)}$ als Linearkombination der $Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)}$ mit ganzen Funktionen von $x$ als Koeffizienten darstellen lassen. Hensel schrieb dazu:

> Diese Definition ist eine consequente Erweiterung der *Kronecker*schen Terminologie, denn unter der hier gemachten Voraussetzung ist ja das Divisorensystem $(\overline{Y}^{(1)}, \ldots, \overline{Y}^{(n)})$ in der That durch $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ theilbar; hier kommt nur noch die weitere Forderung hinzu, dass die Coefficienten $u_{ik}$ nicht bloss ganze algebraische sondern ganze rationale Functionen von $x$ sein sollen.[112]

Ist $(\overline{Y}^{(i)})$ ein Vielfaches von $(Y^{(i)})$, dann sind auch die Elementarteiler von $(\overline{Y}^{(i)})$ ganze Vielfache der Elementarteiler von $(Y^{(i)})$ und die Faktoren sind ganze Wurzelfunktionen von $x$.
Hensel führte den Begriff des *Kronecker*schen Fundamentalsystems ein, durch das also "jede ganze algebraische Function des Bereiches homogen und linear mit ganzen Functionen von $x$ als Coefficienten dargestellt werden kann."[113] Hensel merkte dazu an, daß diese "nur solange ihren Namen verdienen, als man die unabhängige Variable auf endliche Werthe beschränkt",[114] während anderenfalls ein neuer Begriff benötigt wird, den Hensel für §7 ankündigte.
Ein algebraisches System $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ist genau dann ein Fundamentalsystem, wenn es in jedem anderen ganzen System enthalten ist und daher:

> Ein System $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ist nur dann ein *Kronecker*sches Fundamentalsystem, wenn jeder seiner $n$ Elementarteiler $E_1, \ldots, E_n$ ganz und der größte gemeinsame Theiler der entsprechenden Elementartheiler aller anderen ganzen Systeme $\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_n$ ist.[115]

Hensel bewertete diesen Satz dahingehend, daß er "eine viel tiefer liegende Eigenschaft des Fundamentalsystems" aufdecke als die analoge Aussage Kroneckers für die Diskriminante, also für das Produkt der Elementarteiler $(E_1 E_2 \ldots E_n)^2$. Er ermögliche es (wie noch gezeigt wird), die Elementarteiler eines Fundamentalsystems und damit die Gattungsdiskriminante aus den Elementarteilern eines beliebigen linear unabhängigen Systems zu bestimmen.[116]

[111] Daß aus der Gleichheit der Elementarteiler auch die Gleichheit der Determinante folgt, ist offensichtlich.
[112] [20, 1895, 265]. Dieses Zitat belegt, daß Hensel sich weiterhin mit den Kroneckerschen Begriffsbildungen auseinandersetzt und sich insbesondere ihnen gegenüber rechtfertigt.
[113] [20, 1895, 266].
[114] [20, 1895, 266].
[115] [20, 1895, 266].
[116] [20, 1895, 266].

**Die Ergebnisse**

Hensel erhielt als wichtigstes Ergebnis den Satz:

> Ein System ist stets und nur dann ein Fundamentalsystem, wenn seine Elementartheiler reducirte ganze Wurzelfunctionen sind.[117]

Relativ leicht läßt sich zeigen, daß ein System $(Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(n)})$, dessen Elementarteiler ganze reduzierte Wurzelfunktionen sind, wirklich ein Fundamentalsystem ist. Ist $Y$ algebraisch ganz, so gibt es für die Konjugierten $Y_i$ Darstellungen $Y_i = u_1 Y_i^{(1)} + \cdots + u_n Y_i^{(n)}$ und zu zeigen ist, daß die $u_j$ ganz sind. Setzt man $\Delta = |Y_k^{(i)}|$ und definiert $\Delta_h$ als die Determinante der Matrix, die sich aus $(Y_k^{(i)})$ ergibt, wenn man die $h$-te Spalte durch $Y_i$ ersetzt, so wird $u_h = \frac{\Delta_h}{\Delta}$. Entwickelt man $\Delta_h$ nach der $h$-ten Spalte, so erkennt man, daß $\Delta_h$ durch den ggT aller $(n-1) \times (n-1)$ Unterdeterminanten $E_1 \ldots E_{n-1}$ teilbar ist. Es folgt also

$$u_h = \frac{E_1 \ldots E_{n-1} G_h}{E_1 \ldots E_{n-1} E_n} = \frac{G_h}{E_n}$$

mit ganzem $G_h$. Als Nenner von $u_h$ kommt also nur ein Teiler von $E_n$ in Frage, was aber nicht möglich ist, wenn $E_n$ eine reduzierte Wurzelfunktion ist, weil $u_h$ eine rationale Funktion von $x$ ist.[118]

Die Strategie zum Abschluß des Beweises beschrieb Hensel folgendermaßen:

> Dieser Satz ist bewiesen, wenn man zeigen kann, dass man von einem beliebigen Systeme $(\overline{Y}^{(1)}, \ldots, \overline{Y}^{(n)})$ ausgehend stets zu einem anderen $(Y^{(1)}, \ldots Y^{(n)})$ gelangen kann, dessen Elementartheiler ganze reducirte Wurzelfunctionen sind; nach dem eben bewiesenen Satze ist das letztere dann nämlich ein Fundamentalsystem, und jedes andere Fundamentalsystem besitzt dann dieselbe Eigenschaft, weil es dem System $(Y^{(1)}, \ldots Y^{(n)})$ äquivalent ist.[119]

Hier stellt sich die Frage, was mit "zu einem anderen gelangen kann" gemeint ist. Mit Blick auf die obige Charakterisierung eines Fundamentalsystems ergibt sich, daß man in mehreren Schritten jeweils zu einem System übergeht, das ein Teiler des vorherigen ist.

Hensel sah zwei Möglichkeiten für diese Modifikation des Systems. Entweder man zeigt, daß jedes System einem kanonischen System äquivalent ist und konstruiert aus diesem ein in ihm enthaltenes Fundamentalsystem, oder man führt diese Schritte für die in Frage kommenden Linearfaktoren $(x-a)$ einzeln durch.[120]

Der Übergang von einem kanonischen System zu einem Fundamentalsystem ist einfach, denn man muß nur jedes Element durch den größten rationalen Divisor des ggTs seiner Konjugierten teilen:

Sei $(\overline{Y}^{(i)})$ ein kanonisches System. Dann ist $(\overline{Y}_k^{(i)}) = (d_i(x))(Z_k^{(i)})$ und für das System der

$$Y^{(i)} = \frac{\overline{Y^{(i)}}}{[d_i(x)]}$$

gilt dann offenbar $(Y_k^{(i)}) = (R(d_i(x)))(Z_k^{(i)})$, d.h. es ist weiterhin ein kanonisches System und ein Fundamentalsystem. Hat man nur ein kanonisches System für den Linearfaktor $(x-a)$, so teilt man $Y_i$ durch

[117] [20, 1895, 267].

[118] Auch dieser Beweis entspricht demjenigen in [5, 1889], wird aber durch die Elementarteiler vereinfacht.

[119] [20, 1895, 268].

[120] Dazu zeigt man zunächst, daß jedes System äquivalent zu einem für den Linearfaktor $(x-a)$ kanonischen ist. Anschließend verändert man dieses (durch Division durch Potenzen von $(x-a)$) so, daß seine Elementarteiler nur noch gebrochene Potenzen von $(x-a)$ enthalten. Anschließend macht man dieselbe Konstruktion für alle weiteren Linearfaktoren, die in den Elementarteilern noch nicht reduziert vorkommen.

die höchste ganzzahlige Potenz von $(x-a)$, die in $d_i(x)$ enthalten ist.[121]

Hensel zeigte in dieser Arbeit nur, daß jedes System äquivalent zu einem in Bezug auf einen beliebigen Linearfaktor $x-a$ kanonischen System ist. Den allgemeineren Beweis, daß jedes System äquivalent zu einem kanonischen ist, kündigte er für eine spätere Arbeit an.[122]

**Die Konstruktion**

Der Übergang von einem beliebigen System zu einem für den Linearfaktor $(x-a)$ kanonischen System erfolgt in mehreren Schritten, in denen jeweils ein Element des Systems durch eine Linearkombination aller Elemente ersetzt wird, so daß der ggT der Konjugierten dieses Elements durch eine höhere gebrochene Potenz von $(x-a)$ teilbar ist als zuvor. Da die Differenz der Exponenten von $(x-a)$ nach unten beschränkt ist,[123] gelangt man nach endlich vielen Schritten dazu, daß $|Z_k^{(i)}|$ gar nicht mehr durch $(x-a)$ teilbar ist und damit zu einem kanonischen System.

Da der Übergang von einem beliebigen zu einem lokal kanonischen System das ist, was durch die Betrachtung der Potenzreihenentwicklungen wesentlich erleichtert wird, lohnt es sich, Hensels Konstruktion der angesprochenen Linearkombination genauer anzusehen.

Es sei $(\overline{Y}^{(1)},\ldots,\overline{Y}^{(n)})$ das gegebene System und $(x-a)^{\delta_i}$ die (gebrochene) Potenz von $(x-a)$, die im ggT der Konjugierten $\overline{Y}_k^{(i)}$ enthalten ist. Hensel betrachtete dann das durch $\overline{Y}^{(i)} = (x-a)^{\delta_i}\overline{Z}^{(i)}$ definierte System bzw. dessen Determinante $|\overline{Z}_k^{(i)}|$.

In den $\overline{Z}^{(i)}$ ersetzte er zuerst die gebrochenen Potenzen von $(x-a)$. Dazu bestimmte er den Hauptnenner $\nu$ der $\delta_i$, so daß also $\delta_i = \frac{\nu_i}{\nu}$ mit $\nu_i, \nu \in \mathbb{Z}$ ist, und ordnete die Elemente so um, daß $\nu_i \leq \nu_{i+1}$ ist. Anschließend führte er $t_i\,(i=1,\ldots,\nu)$ als die Wurzeln von $t^\nu = (x-a)$ ein.

Ist das System $(\overline{Y}^{(1)},\ldots,\overline{Y}^{(n)})$ nicht kanonisch in Bezug auf $(x-a)$, so ist die Determinante $|\overline{Z}_k^{(i)}|$ durch eine positive gebrochene Potenz von $(x-a)$ teilbar, verschwindet also für $t=0$. Dann

> kann man bekanntlich $n$ nicht sämmtlich verschwindende Constanten $a_1,\ldots,a_n$ so bestimmen, dass die lineare Function $Z = a_1\overline{Z}^{(1)} + \cdots + a_n\overline{Z}^{(n)}$ nebst allen ihren $n$ Conjugirten für $t=0$ gleich Null ist.[124]

Ist dann $a_r$ die letzte nichtverschwindende dieser Konstanten, so normierte Hensel sie zu Eins und setzte $Z^{(r)} = a_1\overline{Z}^{(1)} + \cdots + \overline{Z}^{(r)}$. Da die Gleichung $n$-ten Grades, die $Z^{(r)}$ erfüllt, rational in $t$ ist und für $t=0$ verschwindet, ist jeder der Koeffizienten durch $t$ teilbar und deshalb ist "$Z^{(r)}$ durch eine *positive* ganze oder gebrochene Potenz von $t$, etwa durch $t^\varrho$ algebraisch theilbar."[125] Durch die gleiche Potenz von $t$ sind auch die $\nu$ Konjugierten von $Z^{(r)}$ teilbar, die entstehen, wenn man $t$ durch einen anderen der $\nu-1$ konjugierten Werte ersetzt.

Hensel konstruierte mit Hilfe von $Z^{(r)}$ zunächst eine Funktion in $\overline{Y}^{(i)}$ und $t$, und durch anschließende Symmetrisierung eine Funktion nur in $\overline{Y}^{(i)}$, die ebenfalls durch eine höhere Potenz von $(x-a)$ teilbar ist. Dazu setzte er $\overline{Z}^{(i)} = \frac{\overline{Y}^{(i)}}{t^{\nu_i}}$ ein und brachte den Ausdruck auf den Hauptnenner $t^{\nu_r}$. Wegen der Anordnung

[121] [20, 1895, 269f]. Diese letztere Konstruktion hatte Hensel in [5, 1889, 343] benutzt, um ein normales Fundamentalsystem für den Modul $P$ zu erhalten. Dort hatte er die Elemente eines Systems, daß Eigenschaften hatte, aus denen kanonisch für $P$ folgt, durch geeignete Potenzen von $P$ geteilt.

[122] Diese Arbeit [25, 1897] gibt es im Gegensatz zu vielen anderen Ankündigungen Hensels. Sie wird im Abschnitt 3.3 besprochen.

[123] Kein Nenner ist größer als $n$, d.h. $\frac{1}{n(n-1)}$ ist eine untere Schranke.

[124] [20, 1895, 272].

[125] [20, 1895, 272].

der $\overline{Y}^{(i)}$ erhält man

$$\frac{a_1 t^{\mu_1}\overline{Y}^{(1)} + a_2 t^{\mu_2}\overline{Y}^{(2)} + \cdots + \overline{Y}^{(r)}}{t^{\nu_r}} \qquad \text{mit nichtnegativen } \mu_i.$$

Nach Konstruktion ist der Zähler dieses Ausdrucks durch $t^{\nu_1+\varrho}$ teilbar. Hensel nannte ihn $Y^{(r)}(t_i)$, nachdem $t_i$ für $t$ eingesetzt wurde. Da die Funktion $Y^{(r)} = \sum_{i=1}^{\nu} Y^{(r)}(t_i)$ "in $t_1, \ldots, t_\nu$ symmetrisch ist, so sind alle Coefficienten *ganze* Functionen von $x$ allein."[126] Auch $Y^{(r)}$ ist durch $t^{\nu_r+\varrho} = (x-a)^{\delta_r+\frac{\varrho}{\nu}}$ teilbar und daher sind

> die beiden Systeme $(\overline{Y}^{(1)}, \ldots, \overline{Y}^{(r)}, \ldots \overline{Y}^{(n)})$ und $(\overline{Y}^{(1)}, \ldots, Y^{(r)}, \ldots \overline{Y}^{(n)})$ äquivalent, aber $Y^{(r)}$ enthält eine höhere Potenz von $x-a$ als $\overline{Y}^{(r)}$.[127]

Bei dieser Konstruktion wurde also zuerst aus jeder Spalte des Systems $A$ die maximale Potenz von $(x-a)$ entfernt, so daß das Restsystem $B$ ganz bleibt. Die Bedingung, daß das System $A$ nicht kanonisch ist, besagte dann, daß es eine nichttriviale Linearkombination der Spalten von $B$ gibt, die für $x = a$ verschwindet. Aus dieser Linearkombination wurde durch Multiplikation mit der größten Potenz von $(x-a)$, durch die eine darin vorkommende Spalte geteilt worden war, eine Linearkombination des Systems $A$, nur daß noch einige zusätzliche Potenzen von $t$ als Faktoren auftraten. Diese mußten noch durch Symmetrisierung beseitigt werden.

### Formulierung des Ergebnisses

Der sechste Paragraph verfolgt zunächst das Ziel, "die Beziehungen zwischen allen Systemen von $n$ Functionen desselben Körpers klar erkennen" zu lassen.[128]

Betrachtet man die Linearfaktoren der Elementarteiler eines Fundamentalsystems einzeln, so enthält jeder Elementarteiler eine eindeutig bestimmte gebrochene Potenz $(x-a)^{\delta_i}$ mit $0 \leq \delta_i < 1$ von $(x-a)$. Die $(x-a)$-Anteile der Elementarteiler eines beliebigen anderen linear unabhängigen ganzen Systems unterscheiden sich von diesen um ganze Potenzen von $(x-a)$ und jedes System von $(x-a)$-Anteilen der Elementarteiler, das sich von diesen nur um ganze Potenzen von $(x-a)$ unterscheidet, kommt auch als System von $(x-a)$-Anteilen der Elementarteiler eines Systems linear unabhängiger Funktionen vor.[129]

Um diesen Sachverhalt für alle vorkommenden Linearfaktoren gleichzeitig formulieren zu können, führte Hensel die Menge aller zum Diagonalsystem der Elementarteiler äquivalenten Diagonalsysteme ein und nannte jedes solche ein *System zugehöriger Wurzelfunktionen.* Jede Wurzelfunktion eines solchen Systems enthält genau einen der $(x-a)$-Anteile der Elementarteiler (für alle vorkommenden Linearfaktoren $(x-a)$). Nach Hensel sind diese Systeme zugehöriger Wurzelfunktionen dann vom System der Elementarteiler nicht wesentlich verschieden, letzteres zeichne sich aber dadurch aus, daß seine Elemente

> selbst und nicht bloss ihre Linearfactoren Invarianten des Systemes $(Y_k^{(i)})$ sind, also rational und ohne Kenntnis eines kanonischen Systemes aus jenem gefunden werden können.[130]

126 [20, 1895, 273].

127 [20, 1895, 274].

128 [20, 1895, 275].

129 Dies folgt aus Hensels Konstruktion eines Fundamentalsystems: Äquivalente Systeme haben gleiche Elementarteiler und beim Übergang von einem kanonischen System zu einem Fundamentalsystem verändern sich offenbar die Spaltenteiler um ganze Potenzen von $(x-a)$ und daher (nach dem schon mehrfach als entscheidend benannten Satz von Frobenius) auch die Elementarteiler. Umgekehrt muß man nur die Elemente eines Fundamentalsystems mit den entsprechenden ganzen Potenzen von $(x-a)$ multiplizieren.

130 [20, 1895, 275].

Hat man dann zwei Systeme von $n$ linear unabhängigen Funktionen und zu dem ersten ein System zugehöriger Wurzelfunktionen gegeben, dann kann man (aus der Menge der äquivalenten) ein System zugehöriger Wurzelfunktionen zum zweiten System bestimmen, dessen Elemente rationale Vielfache von denen des ersten sind. Umgekehrt findet man zu vorgegebenen rationalen Vielfachen auch ein System, daß diese als System zugehöriger Wurzelfunktionen hat.[131]

Die Terminologie der zugehörigen Wurzelsysteme erlaubte es Hensel insbesondere, das folgende Ergebnis zu formulieren, ohne noch Faktoren umzusortieren:

> Ist $(Y^{(1)}, \dots, Y^{(n)})$ irgend ein System algebraischer Functionen, und sind $e_1(x), \dots, e_n(x)$ die rational bestimmbaren Elementartheiler von $(Y_k^{(i)})$; dann findet man das System der dem Fundamentalsysteme zugehörigen Wurzelfunctionen, wenn man alle Exponenten von $e_1(x), \dots, e_n(x)$ auf ihren kleinsten positiven Rest reducirt.[132]

### 3.2.3 Die Theorie der homogenen algebraischen Formen

#### Die Homogenisierung

Der zweite Teil der Arbeit erschien im nächsten (vierten) Heft von Band 115 des Crelle-Journals. Zur Motivation der Homogenisierung erläuterte Hensel zunächst, daß alle vorhergehenden Untersuchungen auf der Definition der Teilbarkeit und diese auf dem Begriff der ganzen Funktion von $x$ beruhten. Charakteristisch für eine solche war, daß sie "für den ganzen Bereich dieser Variablen, d.h. für jedes endliche $x$ endlich bleibt."[133] Wenn es nun notwendig ist, "auch die Stelle $x = \infty$ in den Bereich der unabhängigen Veränderlichen" aufzunehmen,[134] so nannte Hensel diese frühere Definition "gegenstandslos", da es ein rein äußerlicher Umstand sei, ob alle Unendlichkeitsstellen an $x = \infty$ liegen.[135] Um weiterhin in einem Bereich zu arbeiten, der auch ganze Elemente enthält, betrachtete Hensel "einen grösseren Bereich specieller Functionen von zwei Variablen", der die rationalen und algebraischen Functionen einer Variablen enthält, nämlich "die homogenen rationalen und algebraischen Functionen von $x_1$ und $x_2$."[136]

Zuerst erweiterte Hensel den Bereich der rationalen Funktionen von $x$. Dabei ist eine homogene rationale Form von $(x_1, x_2)$ eine rationale Funktion $a(x_1, x_2)$, "welche sich nur mit einer Potenz von $t$ multiplicirt, wenn $x_1$ und $x_2$ durch $tx_1, tx_2$ ersetzt werden."[137] Gilt $a(tx_1, tx_2) = t^\mu a(x_1, x_2)$, so heißt $\mu$ die Dimension der homogenen Form. Die rationalen Funktionen von $x$ findet man nach dem Einsetzen $x = \frac{x_1}{x_2}$ als die homogenen Formen der Dimension Null wieder und von diesen sind nur die Konstanten ganz. Als Schlußfolgerung hierraus formulierte Hensel:

> So sieht man, dass die Einführung der homogenen Formen nothwendig ist, wenn der Begriff der ganzen Grössen erhalten bleiben soll.[138]

Eine *homogene Wurzelform* ist die $\varrho$-te Wurzel aus einer homogenen Form. Ist dabei $a(x_1, x_2)$ homogen von der Dimension $\mu$, so hat $a(x_1, x_2)^{\frac{1}{\varrho}}$ die Dimension $\frac{\mu}{\varrho}$. Jede homogene Wurzelform kann man als

[131] [20, 1895, 275].
[132] [20, 1895, 276]. Für diese Reduktion muß man natürlich doch die Linearfaktoren kennen.
[133] [20, 1895, 277].
[134] [20, 1895, 277].
[135] [20, 1895, 277].
[136] [20, 1895, 277f].
[137] [20, 1895, 278].
[138] [29, 1875, 278]. Die Formulierung ist etwas irreführend, denn die Notwendigkeit, etwas zu verändern, hatte Hensel ja schon zur Motivation dargelegt. Vielmehr ist der größere Bereich hier so gewählt, daß die Funktionen von $x$ wirklich nicht ganz sind, die gewählte Erweiterung paßt in dieser Hinsicht zum (motivierenden) Phänomen.

ein Produkt von Potenzen von Linearfaktoren $\prod_i (a_i x_1 - b_i x_2)^{\delta_i}$ schreiben und daher ebenso wie bei Wurzelfunktionen größte gemeinsame Teiler definieren. Der ggT mehrerer Wurzelformen ist genau dann ganz, wenn diese Wurzelformen alle ganz sind und der ggT von Wurzelfunktionen ist nur dann ganz, wenn diese alle konstant sind.

Hensels Ziel war

> an Stelle der algebraischen Functionen von $x$ die homogenen algebraischen Formen von $(x_1, x_2)$ [zu] untersuchen; da aber dieses Reich von Grössen bis jetzt noch nicht untersucht worden ist, will ich dieselben zunächst definieren.[139]

Die algebraische Funktion $\eta(x_1, x_2)$ heißt homogene Form der Dimension $\mu$, falls sie in $t^\mu \eta$ übergeht, wenn man $x_1, x_2$ durch $tx_1, tx_2$ ersetzt. Hensel zeigte als erstes, daß eine durch

$$\eta^n + a_1(x_1, x_2)\eta^{n-1} + \cdots + a_n(x_1, x_2) = 0$$

definierte algebraische Funktion $\eta$ genau dann eine homogene Form der Dimension $\mu$ ist, wenn $a_i(x_1, x_2)$ homogen von der Dimension $\mu i$ sind.[140] Eine Form heißt ganz, wenn die Koeffizienten der von ihr erfüllten Gleichung ganz sind und eine ganze Form ist von nichtnegativer Dimension. Auch alle algebraischen ganzen Formen der Dimension Null sind konstant.

Jede algebraische Funktion ist eine homogene algebraische Form der Dimension Null und umgekehrt, wie man leicht erkennt, wenn man in die definierende Gleichung $x = \frac{x_1}{x_2}$ und gegebenenfalls $t = \frac{1}{x_1}$ einsetzt. Auch hier formulierte Hensel, daß

> die Einführung der Formen nothwendig ist, wenn der Begriff der ganzen algebraischen Grösse erhalten bleiben soll.[141]

Zu jeder Form $H$ der Dimension $\mu$ ist $\frac{H}{x_2^\mu}$ eine homogene Form der Dimension Null, entspricht also einer algebraischen Funktion von $x$. Daher erhält man alle homogenen algebraischen Formen, indem man alle algebraischen Funktionen von $x$ mit beliebigen ganzzahligen Potenzen von $x_2$ oder auch einem anderen Linearfaktor multipliziert.

Sind $\eta_1, \ldots, \eta_n$ die konjugierten homogenen Formen, die durch

$$\eta^n + a_1(x_1, x_2)\eta^{n-1} + \cdots + a_n(x_1, x_2) = 0$$

definiert werden, so nannte Hensel wiederum $d(x_1, x_2) = (a_1(x_1, x_2), a_2(x_1, x_2)^{\frac{1}{2}}, \ldots, a_n(x_1, x_2)^{\frac{1}{n}})$ den größten gemeinsamen Teiler der $\eta_i$.

Sei jetzt $y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x) = 0$ die irreduzible Gleichung, die den Gattungsbereich $\mathcal{G}(x, y)$ definiert. Dann betrachtete Hensel nach obiger Beobachtung den Bereich $\mathcal{G}(x_1, x_2, y)$, der zu $Y = \varphi(x, y)$ alle homogenen Formen $x_2^\mu Y = x_2^\mu \varphi(\frac{x_1}{x_2}, y)$ für $\mu \in \mathbb{Z}$ enthält, und schrieb, er sei "ebenfalls ein Gattungsbereich oder Körper homogener algebraischer Formen."[142]

---

[139] [20, 1895, 278].

[140] Um die Notwendigkeit dieser Bedingung nachzuweisen, setzte er $tx_1, tx_2$ und $t^\mu \eta$ statt $x_1, x_2, \eta$ ein, dividierte durch $t^{n\mu}$ und da die entstehende Gleichung mit der ursprünglichen identisch sein muß, ergibt Koeffizientenvergleich die Homogenitätsforderungen (inkl. Dimension) an die Koeffizienten der Gleichung. Es ist klar, daß die Bedingung hinreichend ist, [20, 1895, 280].

[141] [20, 1895, 282].

[142] [20, 1895, 283]. Natürlich ist nur die Summe homogener Formen gleicher Dimension wieder in diesem Bereich enthalten.

Der Hauptunterschied zu der Homogenisierung in der Arbeit [9, 1891] besteht darin, daß hier die homogenen Formen unmittelbar aus den Funktionen des Bereichs $\mathcal{G}(x, y)$ abgeleitet werden, während dort erst eine algebraische Form $\eta$ konstruiert wurde, wonach die homogenen Formen aus allen rationalen Funktionen von $x_1, x_2, \eta$ isoliert werden mußten.

Hensel betrachtete zu einem System von $n$ linear unabhängigen algebraischen Formen $H^{(i)}$ wieder die aus ihren Konjugierten gebildete Matrix $(H_k^{(i)})$, deren Elementarteiler $E_i(x_1, x_2)$ und die ggTs der Konjugierten zu $H^{(i)}$, bezeichnet durch $d_i(x_1, x_2)$. Ein solches System $(H^{(1)}, \ldots, H^{(n)})$ heißt dann *kanonisch*,

> wenn die Wurzelformen $d_1(x_1, x_2), \ldots, d_n(x_1, x_2)$, welche bezw. die Theiler der Functionen $H^{(i)}$ nebst ihren Conjugirten sind mit den Elementartheilern $E_1(x_1, x_2), \ldots, E_n(x_1, x_2)$ abgesehen von der Anordnung ihrer Linearfactoren übereinstimmen.[143]

Er setzte wiederum $H^{(i)} = d_i(x_1, x_2)Z^{(i)}$ und nannte das System *kanonisch in Bezug auf den Linearfaktor* $\xi$, wenn $|Z_k^{(i)}|$ nur den Linearfaktor $\xi$ nicht enthält.

Hensel merkte an, daß durch ein linear unabhängiges System von Formen $(H^{(1)}, \ldots, H^{(n)})$ jede algebraische Form des Bereichs $\mathcal{G}(x_1, x_2, y)$ eindeutig mit homogenen rationalen Koeffizienten dargestellt werden kann. Seien von nun an die $H^{(i)}$ so numeriert, daß die Dimension $\mu_i$ von $H^{(i)}$ kleiner oder gleich der Dimension $\mu_{i+1}$ von $H^{(i+1)}$ ist. Daran anschließend definierte er einen (leicht verallgemeinerten) Begriff von *Fundamentalsystem*

> Ich verstehe unter einem Fundamentalsysteme für einen Gattungsbereich $\mathcal{G}(x_1, x_2, y)$ ein System von $n$ ganzen algebraischen Formen $(H^{(1)}, \ldots H^{(n)})$, durch welche jede ganze Form des Bereiches homogen und linear mit ganzen Formen $u_1, \ldots, u_n$ als Coefficienten dargestellt werden kann.[144]

Er bezeichnete diese Begriffsbildung als eine notwendige Erweiterung des Kroneckerschen Begriffs, und da ein solches System nicht aus algebraischen Funktionen bestehen kann, "bedarf man für die Erweiterung des Begriffes eines Fundamentalsystemes nothwendig der Adjunction der algebraischen Formen."[145]

### Die Übertragung der Ergebnisse

Falls ein Fundamentalsystem existiert, so hat es offenbar die folgende Eigenschaft:

> Die Elementartheiler eines Fundamentalsystems sind die grössten gemeinsamen Divisoren der entsprechenden Elementartheiler aller ganzen Systeme des Bereichs $\mathcal{G}(x_1, x_2, y)$.[146]

Den Beweis der Existenz eines solchen Fundamentalsystems führte Hensel analog zu Kroneckers Beweis im nichthomogenen Fall:[147] Ist $(H^{(1)}, \ldots, H^{(n)})$ kein Fundamentalsystem, so gibt es eine ganze Form, in deren Darstellung einer der Koeffizienten $u_i$ eine gebrochene Form ist. Bildet man den Hauptnenner und wählt aus ihm einen Linearfaktor $\xi_1$ aus, so hat man eine ganze Form

$$\frac{u_1 H^{(1)} + \cdots + u_n H^{(n)}}{\xi_1}$$

gefunden, für die nicht alle Koeffizienten $u_i$ durch $\xi_1$ teilbar sind. Da man gegebenfalls eine lineare Transformation ausführen kann, kann man sich auf den Fall $\xi_1 = x_1$ beschränken. Dann kann man jeden

143 [20, 1895, 283].
144 [20, 1895, 285].
145 [20, 1895, 285].
146 [20, 1895, 291].
147 In [Kronecker, 1881], Kronecker verringerte entsprechend den Grad des Systems.

Koeffizienten auf die Form $c_i x_2^{\nu_i}$ transformieren, indem man Potenzen von $x_1$ durch solche von $x_2$ ersetzt, und den letzten von Null verschiedenen Koeffizienten $c_r$ zu Eins normieren. Die so entstehende homogene Form

$$\overline{H}^{(r)} = \frac{c_1 x_2^{\nu_1} H^{(1)} + \cdots + H^{(r)}}{x_1}$$

hat dann Dimension $\mu_r - 1$, das System $(H^{(1)}, \ldots, \overline{H}^{(r)}, \ldots H^{(n)})$ hat also eine geringere Gesamtdimension als $(H^{(1)}, \ldots, H^{(n)})$. Da die Gesamtdimension eines Systems ganzer homogener Formen nichtnegativ bleiben muß, gelangt man nach endlich vielen Schritten zu einem Fundamentalsystem, bzw. "so ist die Existenz eines solchen Fundamentalsystemes dargethan."[148]

Hensels nächstes Ziel bildete der folgenden Satz:

> Ein System $(H^{(1)}, \ldots H^{(n)})$ eines Gattungsbereiches $\mathcal{G}(y)$ ist dann und nur dann ein Fundamentalsystem für denselben, wenn seine $n$ Elementartheiler $E_1, \ldots, E_n$ ganze Wurzelfunctionen mit lauter echt gebrochenen Exponenten, wenn sie also ganze reducierte Wurzelformen sind.[149]

Er erläuterte zuerst, daß der Beweis leicht auf die Aussage zurückgeführt werden kann, daß jedes System für einen beliebigen Linearfaktor $\xi$ einem kanonischen äquivalent ist. Um letzteres zu zeigen, benutzte er die entsprechende Aussage aus dem ersten Teil. Dazu nahm er ohne Einschränkung $\xi = x_1$ an und betrachtete zu einem gegebenen System $(H^{(i)})$ das durch $H^{(i)} = x_2^{\mu_i} Y^{(i)}$ definierte System algebraischer Funktionen $(Y^{(i)})$. Dieses ist in Bezug auf $x_1$ zu dem System der $H^{(i)}$ äquivalent, einem kanonischen System $(Z^{(i)})$ in Bezug auf $x$ äquivalent und letzteres ist dann auch zu dem System der $H^{(i)}$ in Bezug auf $x_1$ äquivalent, also das gesuchte äquivalente (lokale) kanonische System.
Ebenso wie im inhomogenen Fall folgt daraus, daß sich die Exponenten jedes Linearfaktors in den Elementarteilern eines beliebigen Systems von den Exponenten desselben Linearfaktors in den Elementarteilern eines Fundamentalsystems nur um ganze Zahlen unterscheiden. Schließlich gilt daher:

> Ist $(H_k^{(i)})$ ein beliebiges System algebraischer Formen mit nicht verschwindender Determinante und sind $(e_1(x_1, x_2), \ldots, e_n(x_1, x_2))$ seine Elementartheiler, so gehört zu dem Fundamentalsysteme des Bereiches das System von Wurzelformen, welches durch die kleinsten Reste jener Elementartheiler constituiert wird.[150]

Um die Elementarteiler des Fundamentalsystems selbst zusammenzusetzen, muß man noch für jeden vorkommenden Linearfaktor die Restexponenten der Größe nach sortieren.
Insbesondere kann man ein solches Wurzelsystem auch aus dem einfachen System $1, y, \ldots, y^{n-1}$ bestimmen und die entsprechende Rechnung kündigte Hensel für "einige sehr allgemeine Fälle" an, in denen er auch das das Geschlecht explizit bestimmen könne.[151]
Um die Diskriminante $|G_k^{(i)}|^2$ eines Fundamentalsystemes und damit der Gattung $\mathcal{G}(x_1, x_2, y)$ zu bestimmen, muß man nur die bestimmten Restformen multiplizieren und anschließend quadrieren. Hensel kündigte weitere Ergebnisse über die Diskriminante an:

> Ihre Dimension ergiebt leicht das Geschlecht der durch $\mathcal{G}(x, y)$ bestimmten Klasse algebraischer Functionen, ihre Linearfactoren $\xi$ bestimmen die Verzweigungspunkte der zugehörigen *Riemann*schen Fläche, und ebenso

[148] [20, 1895, 287].
[149] [20, 1895, 287].
[150] [20, 1895, 289].
[151] [20, 1895, 290].

kann man aus ihr die Ordnung der zugehörigen Verzweigungspunkte unmittelbar erkennen, wie in einer späteren Arbeit dargelegt wird.[152]

Die Arbeit endet mit einer expliziten Berechnung im Fall einer reinen Gleichung $y^n = a(x)$. Das Ergebnis ist:

Ist also $y^n = \prod_{i=1}^h \xi_i^{r_i}$ irgend eine in homogener Form geschriebene reine Gleichung $n$ten Grades, so ist ihre Gattungsdiscriminante $D(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^h \xi_i^{n-(n,r_i)}$.
Es sei z.B. die vorgelegte reine Gleichung:

$$\begin{aligned} y^{12} &= \frac{(x-a)^3(x-b)^8}{(x-c)^7(x-d)^{18}(x-e)^{12}} \\ &= \frac{(x_1-ax_2)^3(x_1-bx_2)^8x_2^{26}}{(x_1-cx_2)^7(x_1-dx_2)^{18}(x_1-ex_2)^{12}} \end{aligned}$$

dann ist die Gattungsdiscriminante durch die Gleichung
$D(x_1, x_2) = (x_1 - ax_2)^9(x_1 - bx_2)^8(x_1 - cx_2)^{11}(x_1 - dx_2)^6x_2^{10}$ bestimmt.[153]

## 3.3 Unmittelbare Fortführungen

Aus der obigen Darstellung wurde deutlich, daß es offensichtliche Anknüpfungspunkte an die Arbeit [20, 1895] gab. Zunächst stand die Fortsetzung der neuen homogenen Theorie auf die Formen erster Gattung noch aus, diese ist [24, 1896]. Weiter war Hensels Behauptung, daß jedes System äquivalent zu einem kanonischen System ist, noch nicht bewiesen worden. Dieser Beweis findet sich, ebenso wie die angekündigte Theorie für das spezielle System $1, y, \ldots, y^{n-1}$, in der Arbeit [25, 1897]. Die Behauptung, daß sich aus den Elementarteilern eines beliebigen Systems die Verzweigung ablesen läßt, wurde hingegen (in [21, 1895]) mit anderen Hilfsmitteln gezeigt und wird daher erst im nächsten Abschnitt dieses Kapitels vorgestellt.

### 3.3.1 Die Fortsetzung der homogenen Theorie

Die Arbeit *Ueber die Darstellung der Integrale erster Gattung durch ein Fundamentalsystem* [24, 1896] schließt direkt an die Arbeit [20, 1895] an. Sie wurde auch unmittelbar nach dieser fertiggestellt, denn sie ist auf den 16.7.1895, erstere auf den 5.7.1895 datiert.
Im ersten Paragraphen wird der Begriff der Form erster Gattung aus den Bedingungen an ein Integral erster Gattung abgeleitet, im zweiten ein Fundamentalsystem für diese aus einem Fundamentalsystem für die ganzen Formen und im dritten wird gezeigt, daß dieser Zusammenhang es ermöglicht, eine Aussage über die Elementarteiler eines Fundamentalsystems für die Formen erster Gattung abzuleiten.

#### Die Formen erster Gattung

Hensel begann mit der Herleitung einer Bedingung, wann $\int Y dx$ "allenthalben endlich, also ein Integral der ersten Gattung ist."[154] Diese Herleitung unterscheidet sich von der 1891 vor allem dadurch, daß sie

[152] [20, 1891, 291]. Die letztere Behauptung hat Hensel in dieser Stärke nicht eingelöst: Es bleiben bei alleiniger Betrachtung der Diskriminante im Allgemeinen noch endlich viele Möglichkeiten für die Ordnungen der zugehörigen Verzweigungspunkte.
[153] [20, 1895, 293f]. Dabei bezeichnet $(n, r_i)$ den ggT von $n$ und $r_i$.
[154] [24, 1896, 29].

Limites und Linearfaktoren benutzt und also insbesondere weniger konstruktiv ist.

Es sei $x = \frac{a_1}{a_2}$ ein Wert von $x$, bei dem also auch $a_2 = 0$ sein darf. Ist dann wieder

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \qquad \text{also} \quad dx = \frac{x_2 dx_1 - x_1 dx_2}{x_2^2} \quad \text{und} \quad \overline{\eta} = \frac{Y}{x_2^2}$$

eine homogene algebraische Form der $-2$ten Dimension, so transformiert sich das Differential $Y dx$, das sich auf Null reduzieren muß, in $\overline{\eta}(x_2 dx_1 - x_1 dx_2)$. Sei jetzt $\xi = a_2 x_1 - a_1 x_2$ der Linearfaktor, dessen Nullstelle $x$ ist und $\xi' = b_2 x_1 - b_1 x_2$ ein beliebiger Linearfaktor mit der anderen Nullstelle $\frac{b_1}{b_2}$. Die Transformation auf die Koordinaten $\xi, \xi'$ ergibt $(a_1 b_2 - a_2 b_1)(x_1 dx_2 - x_2 dx_1) = \xi' d\xi - \xi d\xi'$ und da $(a_1 b_2 - a_2 b_1)$ nicht Null ist, erhielt Hensel die Bedingung

$$\lim_{\xi=0} \left(\overline{\eta}(\xi' d\xi - \xi d\xi')\right) = \lim_{\xi=0} \left(\xi'^2 \overline{\eta}\ d\left(\frac{\xi}{\xi'}\right)\right) = 0.$$ [155]

An der Stelle $\xi = 0$ ist $d\left(\frac{\xi}{\xi'}\right) = \lim \frac{\xi}{\xi'}$ und damit ergibt sich die Bedingung $\lim(\xi\xi'\overline{\eta}) = 0$. Wegen $\xi'_{\xi=0} \neq 0$ folgt, daß

> für jeden Linearfactor $\xi$ das Produkt $(\xi\overline{\eta})$ an der Nullstelle von $\xi$ verschwindet.[156]

Die Bedingung für dieses Verschwinden ist, daß in der Gleichung für $(\xi\overline{\eta})$ jeder Koeffizient mindestens durch $\xi$ teilbar ist. Dann muß der größte gemeinsame Teiler der zu $(\xi\overline{\eta})$ konjugierten Formen eine positive Potenz von $\xi$ als Faktor enthalten, der größte gemeinsame Teiler der $\overline{\eta}_i$ selbst also jeden Linearfaktor mit einem Exponenten größer als $-1$.

Homogene Formen $\overline{\eta}$, für die das Produkt $(\xi\overline{\eta})$ mit einem beliebigen Linearfaktor $\xi$ stets für $\xi = 0$ verschwindet, nannte Hensel *algebraische Formen erster Gattung* und da er gezeigt hatte, daß $\int Y dx$ genau dann ein Integral erster Gattung ist, wenn $\overline{\eta}$ eine Form erster Gattung ist,

> ist also die Aufsuchung der Integrale erster Gattung vollständig auf die Darstellung aller homogenen Formen der ersten Gattung zurückgeführt, denn man braucht ja aus ihnen nur alle Formen der -2ten Dimension auszusuchen, um alle jene Integranden zu erhalten.[157]

### Ein Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung

Sind $\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(n)}$ Formen erster Gattung und sind die ganzen rationalen Formen $u_i$ so gewählt, daß $\overline{\eta} = u_1\overline{\eta}^{(1)} + \cdots + u_n\overline{\eta}^{(n)}$ homogen ist, so ist $\overline{\eta}$ auch eine Form erster Gattung. Hensel nannte ein System $(\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(n)})$ *Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung*, wenn man die Formen erster Gattung und nur sie eindeutig in der Form $\overline{\eta} = u_1\overline{\eta}^{(1)} + \cdots + u_n\overline{\eta}^{(n)}$ mit ganzen Koeffizienten $u_i$ darstellen kann.[158] Hensel betrachtete wiederum zu einem beliebigen linear unabhängigen System homogener Formen $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)}$ die Matrix $(\eta_k^{(i)})$, die die Konjugierten von $\eta^{(i)}$ enthält.[159] Sei $(\overline{\eta}_k^{(i)})$ "das reciproke System"[160] bzw. die inverse Matrix. Dann leitete Hensel aus der (Cramerschen) Formel für die Einträge $\overline{\eta}_k^{(i)}$ ab, daß die Elemente der $k$-ten Zeile nur von $y_k$ und $x_1, x_2$ rational abhängen, da sie symmetrische Funktionen von

[155] [24, 1896, 30]. Diese Umformung war in [9, 1891] nicht explizit. Daher wurde dort mit lokalen Potenzreihenentwicklungen argumentiert.

[156] [24, 1896, 30]. 1891 war dies für jede Nullstelle einer beliebigen rationalen Funktion $P$ gefordert worden, was offenbar daraus folgt.

[157] [24, 1896, 31].

[158] [24, 1896, 32].

[159] Diese entstehen durch Einsetzen der Konjugierten $y_1, \ldots, y_n$ der algebraischen Funktion $y$.

[160] [24, 1896, 33].

$y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n$ sind. Daher sind auch die Elemente einer Spalte von $(\overline{\eta}_k^{(i)})$ zueinander konjugiert. Durch Betrachtung der Dimensionen folgt, daß die Elemente $\overline{\eta}_k^{(i)}$ von der Dimension $-\mu_i$ sind, wenn $\mu_i$ die Dimension von $\eta^{(i)}$ bezeichnet. Weiter gilt für die Elementarteiler beider Systeme $\overline{e}_i = \frac{1}{e_{n-i+1}}$.
Ist das System $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ speziell ein Fundamentalsystem für die ganzen Formen, so ist "das reciproke System" $(\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(n)})$ ein Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung.[161] Dies folgt in zwei Schritten. Zum einen sind die erhaltenen Formen erster Gattung. Es ist $\overline{e}_1$ der ggT der Elemente $\overline{\eta}_k^{(i)}$, d.h. $\overline{\eta}_k^{(i)} = \overline{e}_1 \gamma_k^{(i)}$ mit ganzen $\gamma_k^{(i)}$. Wegen $\overline{e}_1 = \frac{1}{e_n}$, folgt also $\overline{\eta}_k^{(i)} = \frac{\gamma_k^{(i)}}{e_n}$. Da die Elementarteiler eines Fundamentalsystems alle ganze reduzierte Wurzelfunktionen sind, enthält der Nenner nur ganze reduzierte Wurzelfunktionen und die $\overline{\eta}^{(i)}$ und damit auch $\overline{\eta} = u_1\overline{\eta}^{(1)} + \cdots + u_n\overline{\eta}^{(n)}$ sind Formen erster Gattung, wenn die $u_i$ ganze rationale Formen geeigneter Dimension sind.
Ist umgekehrt $\overline{\eta}$ eine homogene Form erster Gattung, so ist zu zeigen, daß die Koeffizienten bei der Darstellung mit dem System der $\overline{\eta}^{(i)}$ ganz sind. Durch Konjugieren erhält man die Gleichungen
$\overline{\eta}_i = u_1\overline{\eta}_i^{(1)} + \cdots + u_n\overline{\eta}_i^{(n)}$. Multipliziert man jeweils die Gleichung für $\overline{\eta}_i$ mit $\eta_i^{(h)}$ $(h = 1, \ldots, n)$ und addiert alle diese Gleichungen, so erhält man durch Koeffizientenvergleich
$u_h = \overline{\eta}_1\eta_1^{(h)} + \overline{\eta}_2\eta_2^{(h)} + \cdots + \overline{\eta}_n\eta_n^{(h)}$. Also sind die $u_h$ Formen erster Gattung und da sie rational sind, müssen sie auch ganze algebraische Formen sein, was zu zeigen war.[162]
Damit folgt aus der Existenz eines Fundamentalsystems für die ganzen Formen auch die Existenz eines Fundamentalsystems für die Formen erster Gattung und:

> Ein System ist dann und nur dann ein Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung, wenn sein reciprokes ein Fundamentalsystem für die ganzen Formen desselben Bereiches ist.[163]

An dieser Stelle wies Hensel darauf hin, daß auch [Dedekind/Weber, 1882] die Beziehungen reziproker Systeme behandelten.[164] Da sie aber weder Elementarteiler noch homogene Formen betrachteten, konnten sie die Ergebnisse von Hensels Arbeit nicht ableiten:

> [D]ies war schon deshalb nicht möglich, weil die Herren Verfasser überhaupt die Elementartheiler algebraischer Systeme nicht in Betracht gezogen haben, und weil sie von vornherein nur die algebraischen *Functionen* und nicht die homogenen *Formen* betrachten, deren Hinzuziehung für die ausnahmslose Gültigkeit jenes Satzes unerlässlich ist.[165]

### Schlußfolgerungen

Hensel nannte eine homogene Form *gebrochene reduzierte Wurzelform*, wenn jeder Linearfaktor einen negativen Bruch $> -1$ als Exponenten hat. Es folgt unmittelbar, daß ein System $(\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(n)})$ genau dann ein Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung ist, wenn seine Elementarteiler reduzierte gebrochene Wurzelformen sind.[166] Weiter ordnete Hensel einem System von homogenen Formen wiederum

[161] [24, 1896, 34].
[162] [24, 1896, 34f].
[163] [24, 1896, 35].
[164] Da sie ohne Konjugierte arbeiten, invertieren sie die Matrix, die die Spuren der Produkte der Elemente enthält. Hensel hatte diese Vorgehensweise in seiner Arbeit [9, 1891] übernommen.
[165] [24, 1896, 36]. Die Worte "jenes Satzes" beziehen sich auf die Charakterisierung im nächsten Abschnitt. Die Betrachtung einer Normalbasis entspricht bis zu einem gewissen Grad den homogenen Formen. Wie bei der Besprechung der Arbeit [9, 1891] erläutert wurde, ergeben sich die Integrale erster Gattung auch bei Dedekind und Weber unmittelbar aus dem *reziproken System* zu einer Normalbasis. Dabei wird die Bedingung an der Stelle $\infty$ genauso direkt durch die Wahl der Koeffizienten erreicht, wie bei Hensel die erforderliche Dimension.
[166] [24, 1896, 37].

äquivalente Diagonalsysteme aus Wurzelformen zu.[167]

Bezeichnet man für rationales $\delta_i$ mit $[\delta_i]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich und mit $\{\delta_i\}$ die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich $\delta_i$ ist, so nannte Hensel für $D(x_1, x_2) = \prod \xi_i^{\delta_i}$ die Form $[D(x_1, x_2)] = \prod \xi_i^{[\delta_i]}$ den *größten rationalen Teiler von* $D$ und $\{D(x_1, x_2)\} = \prod \xi_i^{\{\delta_i\}}$ das *kleinste rationale Vielfache von* $D$.[168] Aus einem beliebigen linear unabhängigen System kann das Wurzeldiagonalsystem abgeleitet werden, zu dem ein Fundamentalsystem der ganzen Formen äquivalent ist, sowie das, zu dem ein Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung äquivalent ist: Sind $E_1, \ldots, E_n$ die Elementarteiler des gegebenen Systems, so sind $\frac{E_I}{[E_i]}$ die Wurzelformen, denen das Fundamentalsystem für die ganzen Formen und $\frac{E_I}{\{E_i\}}$ die Wurzelformen, denen das Fundamentalsystem der Formen erster Gattung äquivalent ist. Man kann dann die Elementarteiler dieser beiden Systeme bestimmen

> und hierdurch hat man ein directes und sehr elegantes Verfahren, um aus den Elementartheilern eines ganz beliebig gegebenen algebraischen Systems $(Y^{(1)}, \ldots Y^{(n)})$ z.B. von $(1, y, y^2, \ldots, y^{n-1})$ die Elementartheiler des Fundamentalsystemes für die ganzen Grössen, sowie für die algebraischen Grössen erster Gattung abzuleiten.[169]

Integranden erster Gattung sind alle Formen $Y = x_2^2 \overline{\eta} = x_2^2(u_1 \overline{\eta}^{(1)} + \ldots u_n \overline{\eta}^{(n)})$ der Dimension $-2$. Dazu müssen die $u_i$ ganze rationale Formen der Dimension $\mu_i - 2$ sein, falls $\mu_i \geq 2$. Da eine rationale Form der Dimension $\mu_i - 2$ genau $\mu_i - 1$ Glieder hat,

> so erkennt man leicht, dass die Anzahl $p$ der linear unabhängigen Integrale erster Gattung, oder das Geschlecht des Bereiches $\mathcal{G}(x)$ durch die Gleichung $p = N - n + 1$ gegeben ist, wenn $N = (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n)$ die Gesammtdimension des Fundamentalsystems $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ für die ganzen Formen bedeutet.[170]

Hensel setzte anschließend die am Ende von [20, 1895] begonnene Diskussion der allgemeinen reinen Gleichung $n$-ten Grades $y^n = a(x) = \prod \xi_i^{n_i}$ fort. Da $(1, y, \ldots, y^{n-1})$ ein kanonisches Fundamentalsystem für die ganzen Formen ist, kann man die Elemente des Fundamentalsystems für die Formen erster Gattung explizit angeben und die Darstellung aller Integrale erster Gattung ableiten (wobei $\varrho_i$ die Dimension von $\{a^{\frac{i}{n}}\}$ bezeichne) :

$$\frac{y^i}{\{a^{\frac{i}{n}}\}} \quad \text{bzw.} \quad J = \sum_{i,h_i} c_{ih_i} \int \frac{x^{h_i} y^i}{\{a^{\frac{i}{n}}\}} dx, \qquad \left({}^{i=0,1,\ldots,n-1}_{h_i=0,1,\ldots,\varrho_i-2}\right).$$

Die Gesamtdimension $N$ des Fundamentalsystems ist die Hälfte der Dimension der Diskriminante und daher ist nach [20, 1895] $N = \frac{1}{2} \sum_a (n - (n, n_a))$.[171]

Für das Geschlecht erhielt Hensel somit $p = \frac{1}{2} \sum_a (n - (n, n_a)) - n + 1$. Ist $a(x)$ noch spezieller ein Quotient aus Polynomen gleichen Grades $r$, die keine mehrfachen Linearfaktoren enthalten, so ist wegen $(n, n_a) = 1$ das Geschlecht $p = \frac{1}{2} \sum_1^{2r} (n - 1) - n + 1 = (r - 1)(n - 1)$.[172]

---

[167] [24, 1896, 37]. Zur Erinnerung: Ein solches ist das System der Elementarteiler. Die Menge der vorkommenden Linearfaktoren ist konstant und jedes Element des Wurzelsystems enthält zu jedem vorkommenden Linearfaktor $\xi_i$ genau einen Faktor $\xi_i^{\delta_j}$.

[168] [24, 1896, 38]. D.h. das kleinste Vielfache, das rational ist.

[169] [24, 1896, 38].

[170] [24, 1896, 40]. Aus der Betrachtung der Elementarteiler folgt übrigens auch, daß die Gesamtdimension eines Fundamentalsystems für die ganzen Formen tatsächlich eine Invariante ist, auch wenn Hensel das nirgends thematisierte.

[171] Dabei ist $(n, n_a)$ der ggT von $n$ und $n_a$.

[172] [24, 1896, 41].

### 3.3.2 Die Bestimmung eines äquivalenten kanonischen Systems

Einen vorläufigen Abschluß von Hensels Beschäftigung mit den algebraischen Funktionen einer Veränderlichen stellte die Arbeit *Ueber die Reduction algebraischer Systeme auf die kanonische Form* dar. Sie ist auf den 12.11. 1895 datiert, erschien jedoch erst 1897. In ihr erläuterte Hensel zunächst noch einmal, was ein kanonisches System ist. Anschließend modifizierte er die Konstruktion für den Übergang von einem beliebigen System zu einem für den Linearfaktor $(x-a)$ kanonischen dahingehend, daß er zusätzlich forderte, daß die Lösung des homogenen Gleichungssystems möglichst niedrige Dimension hat. Durch einen zusätzlichen Faktor konnte Hensel dann sichern, daß das System an allen bereits bearbeiteten Stellen kanonisch bleibt und er hatte damit ein Verfahren gewonnen, um von einem beliebigen System zu einem äquivalenten kanonischen zu gelangen.

Den zweiten Teil der Arbeit bildet die Anwendung dieses Verfahrens auf das spezielle System $1, y, \dots, y^{n-1}$ und die Interpretation der so erhaltenen Ergebnisse.

#### Konstruktion eines kanonischen Systems

Hensel begann damit

> aus dem früher gegebenen Beweise diejenigen Schlüsse in einer einfacheren und weitergehenden Weise [zu] recapituliren, welche für das Folgende von Wichtigkeit sind.[173]

Seien dazu $Y^{(1,)} \dots, Y^{(n)}$ rationale Funktionen von $x$ und $y$ und sei $(x-a)^{\delta_i}$ der $(x-a)$-Anteil des größten gemeinsamen Teilers der $i$-ten Spalte von $(Y_k^{(i)})$, also des ggTs der Konjugierten zu $Y^{(i)}$. Im folgenden sollen die $Y^{(i)}$ stets so angeordnet werden, daß $\delta_i \leq \delta_{i+1}$ ist. Ist $\Delta_l$ der Exponent von $x-a$ im größten gemeinsamen Teiler aller $l \times l$-Unterdeterminanten, so gilt offenbar $\Delta_l \geq \delta_1 + \dots + \delta_l$. Ist $\Delta_l = \delta_1 + \dots \delta_l$, so nannte Hensel das *Teilsystem* $(Y^{(1)}, \dots, Y^{(l)})$ *kanonisch*, denn es

> hat die so sich ergebende Matrix
>
> $$\left( \frac{Y_k^{(1)}}{(x-a)^{\delta_1}}, \dots, \frac{Y_k^{(l)}}{(x-a)^{\delta_l}} \right) \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\dots,n)}$$
>
> für die Stelle $a$ den Charakter eines Einheitssystems, weil ihre Elemente in Bezug auf jene Stelle ganz, und weil ihre Unterdeterminanten der höchsten Ordnung nicht mehr sämmtlich durch eine positive Potenz von $(x-a)$ theilbar sind.[174]

Ist hingegen $r$ minimal mit $\Delta_r > \delta_1 + \dots \delta_r$, so kann man ein $\overline{Y}^{(r)} = a_1(x)Y^{(1)} + \dots a_{r-1}(x)Y^{(r-1)} + Y^{(r)}$ konstruieren, das nebst seinen Konjugierten durch $(x-a)^{\overline{\delta_r}}$ mit $\overline{\delta_r} > \delta_r$ teilbar ist.[175] Setzt man nun $\overline{Y}^{(r)}$ statt $Y^{(r)}$ in das System ein, so kann man das Verfahren fortsetzen, nachdem man die Exponenten $\delta_i$ neu sortiert hat. Dabei wird stets an dem ersten Element $Y^{(r)}$ gearbeitet, so daß $(Y^{(1)}, \dots, Y^{(r)})$ noch nicht kanonisch ist.

Nach dieser leicht modifizierten Wiederholung kam Hensel zu seinem eigentlichen Ziel, das neue Element so zu bilden, daß das System an den Stellen $a', \dots a^{(\varrho)}$, an denen es schon kanonisch war, auch kanonisch bleibt. Dazu betrachtete er ein System $(Y^{(1)}, \dots, Y^{(\nu)})$ von $\nu$ Funktionen, das schon kanonisch

[173] [25, 1897, 131].
[174] [25, 1897, 131].
[175] [25, 1897, 132]. Dies folgt aus dem Beweis in [20, 1895]. Dort war noch nicht gefordert worden, daß $\overline{Y}^{(r)}$ nur Funktionen minimalen Teilers benutzt.

bezüglich der Stellen $a', \dots a^{(\varrho)}$ ist. Sind dann $E_1(x)$ bzw. $E_\nu(x)$ die Elementarteileranteile des Systems bezüglich dieser Stellen, so bezeichnete er mit $\mathcal{E}(x)$ "eine rationale *ganze* Function von $x$, welche ein Vielfaches des Quotienten $\frac{E_\nu(x)}{E_1(x)}$ jener beiden Elementartheiler ist und nur an den Stellen $a', a'', \dots, a^{(\varrho)}$ verschwindet."[176] Ersetzt man dann $Y^{(l)}$ durch

$$\overline{Y}^{(l)} = Y^{(l)} + \mathcal{E}(x)(a_1 Y^{(1)} + \dots a_{l-1} Y^{(l-1)}) + a_{l+1} Y^{(l+1)} + \dots + a_\nu Y^{(\nu)},$$

wobei die $a_i(x)$ beliebig gewählte ganze Funktionen von $x$ sind, so ist das entstehende System zu dem alten äquivalent und ebenfalls in Bezug auf die Stellen $a', a'', \dots, a^{(\varrho)}$ kanonisch.[177] Dies folgt daraus, daß $\overline{Y}^{(l)}$ dieselben gebrochenen Potenzen von $(x-a'), \dots, (x-a^{(\varrho)})$ enthält wie $Y^{(l)}$.[178] Seien dazu $d_1, \dots d_\nu$ die Anteile bezüglich der Stellen $a', \dots, a^{(\varrho)}$ der Teiler von $Y^{(1)}, \dots, Y^{(\nu)}$. Dann ist $\mathcal{E}(x)Y^{(i)}$ durch $d_l$ teilbar, denn es ist

$$\frac{\mathcal{E}(x)Y^{(i)}}{d_l} = \frac{E_\nu(x) d_i(x)}{E_1(x) d_l(x)} G = \frac{E_\nu}{d_l} \cdot \frac{d_i}{E_1} \cdot G$$

mit einer ganzen Größe G und hier sind alle drei Faktoren ganz.

Um dies anzuwenden, wählte Hensel wiederum $r$ minimal mit $\Delta_r > \delta_1 + \dots \delta_r$. Dann verschwinden nicht nur alle Unterdeterminanten $r$-ter Ordnung der Matrix

$$\left( \frac{Y_k^{(1)}}{(x-a)^{\delta_1}}, \dots, \frac{Y_k^{(r)}}{(x-a)^{\delta_r}} \right) \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\dots,n),}$$

sondern auch die der Matrix

$$\left( \mathcal{E}(x) \cdot \frac{Y_k^{(1)}}{(x-a)^{\delta_1}}, \dots, \mathcal{E}(x) \cdot \frac{Y_k^{(r-1)}}{(x-a)^{\delta_{r-1}}}, \frac{Y_k^{(r)}}{(x-a)^{\delta_r}} \right) \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\dots,n),}$$

und es ist daher möglich, ein $\overline{Y}^{(r)} = Y^{(r)} + \mathcal{E}(x)(a_1 Y^{(1)} + \dots a_{r-1} Y^{(r-1)})$ zu finden, daß durch eine höhere Potenz als $(x-a)^{\delta_r}$ teilbar ist und in Bezug auf die Stellen $a', a'', \dots, a^{(\varrho)}$ kanonisch bleibt. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man zu einem kanonischen System:

> Formt man also das System in der hier dargelegten Weise in Bezug auf alle Stellen um, für welche es noch nicht kanonisch ist, und beachtet dabei, dass die Anzahl jener Stellen offenbar endlich ist, so erhält man zuletzt ein für jede Stelle kanonisches System.[179]

### Schlußfolgerungen für das spezielle System $(1, y, \dots, y^{n-1})$

Sei jetzt das Ausgangssystem speziell $(1, y, \dots, y^{n-1})$, wobei $y$ eine ganze algebraische Funktion von $x$ ist und seien $E_0, \dots, E_{n-1}$ die Elementarteiler dieses Systems.[180] Hensel behauptete, man könne Funktionen

$$\begin{aligned} f_0 &= 1, \\ f_1 &= a_{10} + y, \\ &\vdots \\ f_{n-1} &= a_{n-1,0} + a_{n-1,1} y + a_{n-1,2} y^2 + \dots + y^{n-1} \end{aligned}$$

[176] [25, 1897, 133].
[177] [25, 1897, 133].
[178] Definiert weiterhin über den ggT der Konjugierten.
[179] [25, 1897, 134]. Der Punkt ist, daß für alle Stellen, die nicht in der Diskriminante des Ausgangssystems vorkommen, auch nichts geprüft werden muß, damit es an diesen Stellen kanonisch bleibt.
[180] Die andere Numerierung ist Absicht.

finden, so daß $E_i | f_i$, woraus folgt, daß sich die Determinante von

$$\left( \frac{f_0(y_i)}{E_0}, \frac{f_1(y_i)}{E_1}, \ldots, \frac{f_{n-1}(y_i)}{E_{n-1}} \right) \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)}$$

auf eine Konstante reduziert. Dies gilt für $i = 0$. Sind aber bereits die Funktionen $f_0, \ldots, f_{r-1}$ entsprechend gefunden, so kann man auf die Funktionen $f_0, \ldots, f_{r-1}, yf_{r-1}, \ldots, y^{n-r}f_{r-1}$ das obige Verfahren anwenden und erhält das gesuchte $f_r$, so daß $f_0, \ldots, f_r$ kanonisch ist. Durch Fortsetzen dieses Verfahrens erhält man ein zu $1, y, \ldots, y^{n-1}$ äquivalentes kanonisches System $f_0, \ldots, f_{n-1}$. Die Bedeutung des so gefundenen Systems beschrieb Hensel folgendermaßen:

> Das so gefundene System von algebraischen Functionen eines Gattungsbereiches ist von fundamentaler Bedeutung für alle Fragen in der Theorie der algebraischen Curven und algebraischen Functionen, denn mit seiner Hülfe kann die Untersuchung der Singularitäten aller Curven jener Klasse, sowohl die der Doppelpunkte als die der Verzweigungspunkte ohne jede weitere Ueberlegung allein auf die trivialen Singularitäten jener $n$ Wurzelfunctionen $E_0(x), E_1(x), \ldots, E_n(x)$ reducirt werden.[181]

Offenbar ist das System $(\frac{f_i}{[E_i]})$ ein kanonisches Fundamentalsystem. Weiter kann man den Elementarteiler $E_r$ des Systems $1, y, \ldots, y^{n-1}$ als das kleinste gemeinsame Vielfache der Wurzelfunktionen, "welche in allen Functionen $r$ten Grades $y^r + b_1(x)y^{r-1} + \cdots + b_r(x)$ mit ganzen oder gebrochenen Coefficienten enthalten sind," charakterisieren.[182] Hier wird ein Zusammenhang zu Kroneckers Arbeit *Ueber die Discriminante algebraischer Functionen* [Kronecker, 1881] deutlich. In dieser stellte Kronecker nämlich ein System $(f_i)$ auf, so daß $f_i$ durch eine rationale Funktion $N_i(x)$ möglichst hohen Grades teilbar ist.[183] Das Quadrat des Produktes dieser Nenner ist der außerwesentliche Anteil der Diskriminante des Systems $1, y, \ldots, y^{n-1}$ und seine Linearfaktoren $(x - a)$ beschreiben die Doppelpunkte $x = a$ der Kurve. Hensel schrieb dazu, daß das System $(\frac{f_i}{N_i})$ ein Fundamentalsystem für den Bereich $\mathcal{G}(x, y)$ ist,

> dessen Discriminante also die Gattungsdiscriminante von $G(x, y)$ ist, und hierdurch gelingt es ihm zwar, die Untersuchung der Doppelpunkte von der der Verzweigungspunkte der zugehörigen *Riemann*schen Fläche zu trennen, aber er erledigt nicht die Frage nach jenen Verzweigungspunkten selbst, denn diese fällt eben mit derjenigen nach den Elementartheilern $\frac{E_i(x)}{[E_i(x)]}$ der Gattungsdiscriminante zusammen, welche bei der *Kronecker*schen Auffassung gar nicht aufgeworfen werden konnte.[184]

Die hierin enthaltene Behauptung, daß die Elementarteiler etwas über die Verzweigung aussagen, hatte Hensel schon bei Abschluß (und nicht erst bei Veröffentlichung) dieser Arbeit durch seine Veröffentlichung [21, 1895] eingelöst.[185]

## 3.4 Der Zusammenhang zur Verzweigung - zwei Noten 1895

Die Schlußfolgerungen aus seinen Ergebnissen zog Hensel ebenfalls zunächst in einem elementaren Rahmen (also ohne Primdivisoren), wobei er diemal die Theorie der Riemannschen Flächen, deren Verzweigungs- bzw. Windungspunkte und die lokalen Potenzreihenentwicklungen voraussetzte.

---

[181] [25, 1897, 136].

[182] [25, 1897, 137]. Daraus folgt $E_{k+i} | E_k E_i$.

[183] Hensel merkte zu Recht an, daß Kronecker "nur die Existenz" dieser Funktionen zeigt, sein Beweis also nicht konstruktiv ist, [25, 1897, 139].

[184] [25, 1897, 139]. Diese Auffassung kann man so charakterisieren: "*Kronecker* kennt und betrachtet nur die algebraische Theilbarkeit einer algebraischen Function $f(y, x)$ durch eine *rationale* ganze Function $N(x)$ allein, aber nicht ihre Theilbarkeit durch eine *Wurzelfunction* von $x$," [25, 1897, 138].

[185] Die Tatsache, daß auch bei ihm die $[E_i]$ die Doppelpunkte beschreiben, erschien Hensel hingegen so klar, daß er sie nicht noch einmal ausdrücklich erwähnt.

In zwei kurzen Arbeiten, die im Oktober bzw. November 1895 (von Frobenius) der preußischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt wurden, zeigte er zunächst, daß die Exponenten der Linearfaktoren der Elementarteiler nicht beliebig sein können, sondern Bruchsequenzen bilden, die den Verzweigungspunkten entsprechen.
Daraus folgt nicht nur, daß man durch Bestimmung der Elementarteiler die Verzweigung bestimmen kann, sondern es vereinfacht sich auch die konkrete Berechnung der Verzweigung in leichten Fällen, in denen es nur wenige Möglichkeiten für diese Sequenzen gibt, die einzeln diskutiert werden können.

### 3.4.1 Die Bedeutung der Elementarteiler

Die Arbeit *Über die Ordnungen der Verzweigungspunkte einer* RIEMANN*'schen Fläche* [21, 1895] wurde am 17.10.1895 von Frobenius der Berliner Akademie vorgelegt. Nachdem Hensel in [20, 1895] gezeigt hatte, daß es möglich ist, aus einem beliebigen linear unabhängigen System Informationen über die Elementarteiler eines Fundamentalsystems zu gewinnen, konstruierte er jetzt ein sehr spezielles Fundamentalsystem, um die Bedeutung der Elementarteiler zu erweisen. Entscheidend dabei ist, daß die zu einem Verzweigungspunkt, an dem $\alpha$ Blätter zusammenhängen, gehörenden konjugierten Entwicklungen durch Multiplikation mit $\alpha$-ten Einheitswurzeln zusammenhängen. Richtet man es so ein, daß die übrigen Konjugierten für $x = a$ verschwinden, kennt man dann alle Konjugierte für $x = a$ explizit. Das Ziel seiner Arbeit stellte Hensel folgendermaßen dar:

> In der vorliegenden Abhandlung will ich nunmehr zeigen, wie mit Hülfe jener rational bestimmbaren Elementartheiler unmittelbar die Verzweigung der zu einer gegebenen Gleichung $f(x, y) = 0$ gehörigen RIEMANN'schen Fläche $\mathcal{R}$ gefunden werden kann. Bekanntlich ist das eine von denjenigen Aufgaben, welche man z.B. in der Theorie der algebraischen Curven und der ABEL'schen Functionen als gelöst anzusehen pflegt, ohne doch jene Lösung in anderen als ganz trivialen Fällen wirklich angeben zu können.[186]

Hensel stellte zunächst die Ergebnisse der Arbeit [20, 1895] zusammen, wobei er sich auf eine Stelle $x = a$ konzentrierte. Sei dazu wieder $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ ein linear unabhängiges System und $(Y_k^{(i)})$ das aus deren Konjugierten gebildete System, dessen Elementarteiler betrachtet werden. Da es genüge, "die algebraischen System und ihre Elementarteiler allein in der Umgebung einer beliebig gegebenen Stelle (x=a) zu untersuchen",[187] nannte Hensel die Potenzen $(x - a)^{\delta_i}$, die in den Elementarteilern eines linear unabhängigen Systems auftreten, die *Elementarteiler des Systems für die Stelle* $a$. Die kleinsten positiven Reste der Exponenten $\delta_i$ sind unabhängig vom gewählten System, also Invarianten des Bereiches $\mathcal{G}(x, y)$, und "wohl die wichtigsten Invarianten, welche überhaupt in der Theorie der algebraischen Grössen auftreten."[188]
Um mit Hilfe der reduzierten Elementarteiler die Verzweigung bestimmen zu können, zeigte Hensel zunächst umgekehrt, was für Elementarteiler aus der gegebenen Verzweigung eines Punktes folgen. Dazu stellte er ein an die Verzweigung angepaßtes linear unabhängiges System auf, dessen Elementarteiler für $x = a$ einfach bestimmt werden können.[189] Die Zusammensetzung des Systems beschrieb Hensel

[186] [21, 1895, 933].
[187] [21, 1895, 934].
[188] [21, 1895, 935].
[189] Da bei Benutzung der Potenzreihenentwicklungen die ggTs der Konjugierten eines Elements direkt abgelesen werden können, geht es dabei darum, daß das konstruierte System kanonisch ist. Diese Terminologie benutzte Hensel jedoch in dieser Arbeit nicht.

folgendermaßen:

> Ich stelle nun für die Stelle $x = a$ ein System $(Y^{(1)} \dots Y^{(n)})$ von $n$ Functionen auf, deren auf jene Stelle bezüglichen Elementartheiler aus den in $a$ über einander liegenden Windungspunkten unmittelbar gefunden werden können, und ich bediene mich zu diesem Zwecke eines in der Zahlentheorie sehr bekannten Verfahrens, durch das man die für eine zusammengesetzte Zahl $m = a^\alpha b^\beta \dots k^\kappa$ inkongruenten Zahlen vermittelst eines Fundamentalsystems darstellt, dessen Elemente aus den in $m$ aufgehenden Primzahlpotenzen $a^\alpha, b^\beta, \dots k^\kappa$ geeignet zusammengesetzt sind.[190]

Seien nun $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots, \mathcal{K}$ die Punkte der Riemannschen Fläche, die über $x = a$ liegen und an denen $\alpha, \beta, \dots, \kappa$ Blätter zusammenhängen. Aus der Theorie der Riemannschen Flächen benutzte Hensel einerseits den folgenden "fast selbstverständlichen Satz",[191] der die Existenz einer Funktion mit gewünschten Eigenschaften sichert:

> Ist $\mathcal{A}$ irgend ein Punkt der RIEMANN'schen Fläche, so kann man stets eine Function $Y(x, y)$ des Bereiches finden, welche in $\mathcal{A}$ von vorgeschriebener Ordnung Null oder unendlich wird, während sie an einer beliebigen Anzahl vorgeschriebener Stellen $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots \mathcal{K}$ endlich und von Null verschieden ist.[192]

Andererseits benutzte er Aussagen über die Potenzreihenentwicklungen an einem Verzweigungspunkt, nämlich daß die Entwicklung einer Funktion $Y_1$, die in $\mathcal{A}$ eine einfache Nullstelle hat, in einem der $\alpha$ zu $\mathcal{A}$ gehörenden Blätter mit $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$ beginnt, während man die konjugierten Entwicklungen, die ebenfalls zu $\mathcal{A}$ gehören, erhält, indem man "für $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$ bez.

$$(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}, \omega(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}, \omega^2(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}, \dots \omega^{\alpha-1}(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$$

setzt, wo $\omega$ irgend eine primivite $\alpha^{\text{te}}$ Wurzel der Einheit, also etwa $e^{\frac{2\pi i}{\alpha}}$ bedeutet."[193]

Sei jetzt $Y$ eine Funktion, die in $\mathcal{A}$ eine einfache Nullstelle hat und in den übrigen über $x = a$ liegenden Windungspunkten weder verschwindet, noch unendlich wird. Dann kann man diese so normieren, daß die zu $\mathcal{A}$ gehörenden Entwicklungen die Gestalt $Y_i = \omega^{i-1}(x-a)^{\frac{1}{\alpha}} + \dots$ haben, während alle übrigen mit einer Konstante beginnen. Da gilt $Y_i^\lambda = \omega^{\lambda(i-1)}(x-a)^{\frac{\lambda}{\alpha}} + \dots$, beginnen die zu $\mathcal{A}$ gehörenden Entwicklungen von $A^{(0)} = \frac{x-a}{Y^\alpha}$ mit Eins, die zu den übrigen über $x = a$ liegenden Stellen gehörigen hingegen mit $(x-a)$. Hensel setzte $A = YA^{(0)}$ und betrachtete das System $A^{(0)}, A, A^2, \dots, A^{\alpha-1}$. Dessen Entwicklungen in $\mathcal{A}$ beginnen dann mit $1, (x-a)^{\frac{1}{\alpha}}, \dots, (x-a)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$, während sie in den übrigen Windungspunkten mindestens mit $(x-a)$ beginnen. Aus diesen Entwicklungen las Hensel den $(x-a)$-Anteil des größten gemeinsamen Teilers der Funktion $A^i$ mit ihren Konjugierten als $(x-a)^{\frac{i}{\alpha}}$ ab. Teilt man dann in der Matrix $(A_i^\lambda)$ $\left({\lambda=0,1\dots,\alpha-1 \atop i=1,\dots,n}\right)$ jede Spalte durch ihren ggT, so ist das entstehende System

$$\left(\frac{A_i^\lambda}{(x-a)^{\frac{\lambda}{\alpha}}}\right)$$

ein Einheitssystem in Bezug auf den Linearteiler $(x-a)$, denn für $x = a$ ist nur die Unterdeterminante von Null verschieden, die aus den ersten $\lambda$ Zeilen besteht, diese "$|\omega^{\lambda(i-1)}|$ ist aber bekanntlich gleich einer Potenz von $\alpha$, also von Null verschieden."[194] Daher stimmen die Elementarteiler des Systems $A^i$ mit den

[190] [21, 1895, 936]. In einer Fußnote zitierte Hensel auch [Dedekind/Weber, 1882, §16] und seine Aufstellung eines speziellen Fundamentalsystems in [5, 1889]. In beiden Fällen wird eine explizite Primdivisorzerlegung von $x-a$ bzw. $P$ benutzt. Schon hier wird deutlich, was sich im Exkurs dieses Kapitels noch verstärkt, daß Hensel die allgemeine Theorie von 1889 und die hier dargestellte elementarisierte Theorie noch zusammen denkt.

[191] [21, 1895, 936].

[192] [21, 1895, 936].

[193] [21, 1895, 937].

[194] [21, 1895, 939].

Spaltenteilern überein und sind $1, (x-a)^{\frac{1}{\alpha}}, \dots, (x-a)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$.
Hensel bildete anschließend entsprechende Systeme von $\beta, \dots, \kappa$ Funktionen für die anderen Windungspunkte und erhielt ein (linear unabhängiges) System von $n$ Funktionen, für das die Exponenten von $(x-a)$ in den Elementarteilern aus den Bruchsequenzen

$$\frac{0}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}, \dots, \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{0}{\beta}, \dots, \frac{\beta-1}{\beta}, \dots, \frac{0}{\kappa}, \dots, \frac{\kappa-1}{\kappa}$$

bestehen. (Die Matrix, die entsteht, nachdem jede Spalte durch ihren ggT geteilt wurde, ist dann für $x = a$ eine Blockdiagonalmatrix, deren Blöcke alle die Gestalt $(\omega^{\lambda(i-1)})$ haben.)
Mit dem Hauptergebnis der vorherigen Arbeit folgerte Hensel daraus:

> Ist $(Y^{(1)} \dots Y^{(n)})$ ein beliebiges rational unabhängiges System und sind $(x-a)^{\delta_1}, (x-a)^{\delta_2}, \dots (x-a)^{\delta_n}$ die Elementartheiler des zugehörigen Systems $(Y_\kappa^{(i)})$ für die Stelle $a$, so lassen sich die kleinsten positiven Reste der gebrochenen Exponenten stets in Bruchsequenzen
>
> $$\left[\frac{1}{\lambda}\right] = \left(0, \frac{1}{\lambda}, \frac{2}{\lambda}, \dots \frac{\lambda-1}{\lambda}\right)$$
>
> anordnen; ergeben sich hierbei die $h$ (gleichen oder verschiedenen)Bruchsequenzen
>
> $$\left[\frac{1}{\alpha}\right], \left[\frac{1}{\beta}\right], \dots \left[\frac{1}{\kappa}\right]$$
>
> so liegen in der zugehörigen RIEMANN'schen Fläche an jener Stelle genau $h$ Verzweigungspunkte über einander, in denen beziehungsweise $\alpha, \beta, \dots \kappa$ Blätter derselben zusammenhängen.[195]

Zum Abschluß nutzte Hensel das angegebene Verfahren noch, um die Verzweigung der durch $y^n = a(x)$ gegebenen Riemannschen Fläche zu berechnen. Das Ergebnis ist:

> Ist $y^n = a(x)$ und ist der Linearfactor $x - a$ $r$ Male in $a(x)$ enthalten, so ist die Anzahl der in $a$ über einander liegenden Verzweigungspunkte gleich dem grössten gemeinsamen Theiler von $n$ und $r$, und diese sind sämmtlich von gleicher Ordnung.[196]

### 3.4.2 Einige Berechnungen

Die am 14. 11. 1895 der preußischen Akademie vorgelegte Arbeit *Über die Verzweigung der drei- und vierblättrigen* RIEMANN*'schen Flächen* hat das Ziel "ein einfaches und praktisch brauchbares Verfahren" zur Berechnung der Elementarteiler vorzustellen und dieses für $n = 3, 4$ anzuwenden.[197] Dazu ging Hensel von dem System $(1, y, \dots, y^{n-1})$ aus und zeigte zuerst, daß man zur Berechnung des ggTs aller $\lambda \times \lambda$-Unterdeterminanten von $(y_i^k)$ nur die ersten $\lambda$ Spalten berücksichtigen muß. Bezeichnet man diesen mit $D(1, y, \dots, y^{\lambda-1})$, so ist nach [20, 1895] für die Stellen, an denen $y$ ganz ist, klar, daß die gesuchten Elementarteiler eines Fundamentalsystems die Gestalt

$$\mathcal{E}_\lambda = R\left(\frac{D(1, y, \dots, y^{\lambda-1})}{D(1, y, \dots, y^{\lambda-2})}\right)$$

haben. Diese Formel bleibt erhalten, auch wenn $y$ nicht ganz ist. Zum Beweis führte Hensel eine homogene ganze Größe $\eta = a_0(x_1, x_2)y$ ein und zeigte, daß deren Elementarteiler sich von denen von $y$ nur um Potenzen von $a_0$, also um ganze rationale Funktionen von $x$ unterscheiden und damit den gleichen Rest

195 [21, 1895, 941].
196 [21, 1895, 943].
197 [22, 1895, 1103].

ergeben.

Hensel zeigte weiter, daß sich vier der Elementarteiler, nämlich die beiden ersten und die beiden letzten, relativ leicht direkt berechnen lassen, nachdem die Gleichung so linear transfomiert wurde, daß der Koeffizient von $y^{n-1}$ verschwindet. Er behandelte dann mit den Gleichungen dritten und vierten Grades die Fälle, in denen keine weiteren Elementarteiler auftreten.

Im Fall der Gleichung 3. Grades, die (nach evtl. linearer Transformation) die Form $y^3 + \alpha y + \beta = 0$ hat, konnte Hensel die entscheidende Diskussion komplett auf $E(x) = \frac{E_2(x)}{E_3(x)} = \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{(\alpha, \beta^{\frac{2}{3}})}$ zurückführen, wobei $\Delta$ die Diskriminante und $(\alpha, \beta^{\frac{2}{3}})$ den ggT bezeichne. Er erhielt das Ergebnis, daß man den Rest $R(E(x))$ eindeutig in der Form $R(E(x)) = A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{3}}$ darstellen kann, wobei $A$ eine ganze und $B$ eine gebrochene homogene Form ist.

> Dann entsprechen allen Linearfactoren $(x_1 - ax_2)$ von $A$ und $B$, und nur ihnen, Verzweigungspunkte der zu $y^3 + \alpha y + \beta = 0$ gehörigen RIEMANN'schen Fläche, und zwar gehören zu den Linearfactoren von $A$ die einfachen, zu denen von $B$ die doppelten Verzweigungspunkte.[198]

Entsprechende Bedingungen ergeben sich auch für $n = 4$, nur daß Hensel dabei für jede Art von Verzweigungspunkt eine i.A. mehrteilige Bedingung erhielt.

## 3.5 Exkurs: Elementarteiler in der allgemeinen Situation

In der im letzten Abschnitt vorgestellten Arbeit [21, 1895] hatte Hensel ein System aufgestellt, das an die Verzweigungspunkte angepaßt war und für das sich der $(x - a)$-Anteil der Elementarteiler aus den Potenzreihenentwicklungen ablesen ließ. Das Ergebnis war, daß in den Exponenten für jeden Verzweigungspunkt der Ordnung $\alpha$ einmal die Sequenz $\left[\frac{1}{\alpha}\right] = \left(0, \frac{1}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}, \ldots \frac{\alpha-1}{\alpha}\right)$ auftritt.

In der allgemeinen Situation entspricht dem das Aufstellen eines Fundamentalsystems für den Modul $P$ und wenn dieses an die Primdivisorzerlegung von $P$ angepaßt ist, erhält man ganz analog die Aussage, daß die Exponenten von $P$ in den Elementarteilern Sequenzen $\left[\frac{1}{\delta}\right]$ enthalten, wenn ein Primdivisor $P_j$ von $P$ mit dem Exponenten $\delta$ in der Primdivisorzerlegung vorkommt.

Hensel veröffentlichte drei Arbeiten zu diesem Themenkreis. In der ersten leitete er den angedeuteten Zusammenhang zwischen Exponenten der Primdivisoren und Exponentensequenzen der Elementarteiler (präziser) ab, in der zweiten zog er Schlußfolgerungen für die unter einer Gattung enthaltenen Gattungen und in der dritten behandelte er den Fall, daß der zu untersuchenden Gattung ein neuer Rationalitätsbereich adjungiert wird.

### 3.5.1 Herleitung der Bruchsequenzen

#### Voraussetzungen

Der erste Teil der Arbeit *Ueber die Fundamentaltheiler algebraischer Gattungsbereiche* stellt die Voraussetzungen zusammen. Hensel arbeitete über einem natürlichen oder algebraischen Gattungsbereich. Der Gattungsbereich $\mathcal{G}$ sei algebraisch vom Grad $n$ über diesem Grundbereich.[199] Er schrieb lapidar, jede

[198] [22, 1895, 1110].

[199] Das heißt, der Grundbereich kann algebraisch über einem Bereich sein, der Unbestimmte enthalten darf. Letzterer ist also ungefähr $Q(x_1, \ldots, x_k)$.

Größe des Bereichs lasse sich dann "bekanntlich auf eine und nur auf eine Art in ein Product von Primfactoren, d.h. von solchen Grössen zerlegen, welche ihrerseits nicht innerhalb desselben Bereichs zerfällt werden können."[200]

Hierbei ergibt sich wieder das bei der Analyse der Arbeit [5, 1889] ausführlich begesprochene Problem, daß die von Kronecker in den Grundzügen für diese Situation konstruierten Primdivisoren eben nicht im selben Bereich liegen, sondern weitere Unbestimmte enthalten.

Es ist offensichtlich, daß Hensel glaubte, mit den Primdivisoren operieren zu können. Welche Vorstellung er damit verband, insbesondere also auch, ob überhaupt eine über die speziellen Fälle hinausgehende konkrete, läßt sich aus den Quellen nicht rekonstruieren. Kronecker schrieb an einer Stelle der Grundzüge, es gäbe die Möglichkeit, die Primdivisoren als gebrochene Elemente zu realisieren.[201] Andererseits schrieb er ebenfalls dort, man müsse die verschiedenen Typen von Unbestimmten begrifflich auseinanderhalten.[202] Möglicherweise hielt Hensel diese letztere Einschätzung für falsch.

Hensel berücksichtigte in dieser Arbeit, daß ein Fundamentalsystem $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}$ für die ganzen Größen $m > n$ Elemente haben kann und definierte die Diskriminante der Gattung als Quadrat des größten gemeinsamen Teilers der $n \times n$-Unterdeterminanten der Matrix $(x_l^{(i)})$ der Konjugierten der $x^{(i)}$. Er wies darauf hin, daß diese auch Divisorensysteme höherer Ordnung enthält, er diese jedoch nicht betrachtet.

Weiter setzte er (diesmal explizit) ein Resultat über die Diskriminante voraus, das er in einer späteren Arbeit herleiten wolle. Sei $P \sim P_1^{d_1} \ldots P_h^{d_h}$, wobei in $P_i$ alle Primdivisoren von $P$ vereinigt sind, die in der Primzerlegung in Divisoren erster Ordnung mit dem Exponenten $d_i$ vorkommen. Sei $k_i$ die Ordnung von $P_i$, d.h. $Nm(P_i) \sim P^{k_i}$ und $k = k_1 + \cdots + k_h$. Dann ist $n = k_1 d_1 + \cdots + k_h d_h$ und die Gattungsdiskriminante ist genau durch $P^{n-k}$ teilbar, außer, wenn $P | d_1 \ldots d_h$. Diesen letzteren Fall, der nur vorkommen kann, wenn $P$ eine Zahl und kleiner als die Ordnung der Gattung ist, schloß Hensel aus.

Er behauptete weiter, die Ordnung von $P_1$ könne man bestimmen, indem man unter den $m$ Elementen des Fundamentalsystems schrittweise diejenigen Elemente wegläßt, die durch die übrigen modulo $P_1$ linear mit ganzen Koeffizienten dargestellt werden können. Man komme so

> zuletzt zu einem Systeme von Elementen, welche modulo $P_1$ rational unabhängig sind, und durch welche dann modulo $P_1$ betrachtet jede Grösse des Bereiches in der eben angegebenen Weise dargestellt werden kann. Ein solches System nenne ich ein *Fundamentalsystem modulo $P_1$*, und die andere Bedeutung der Ordnungszahl ist die, dass $k_1$ die Anzahl der modulo $P_1$ rational unabhängigen ganzen Grössen oder die Anzahl der Elemente eines Fundamentalsystems modulo $P_1$ angibt.[203]

Hensel betrachtete anschließend die Elementarteiler der rechteckigen Matrix $(x_l^{(i)})$, die auch hier reduzierte Wurzelfunktionen mit positiven Exponenten sind. Er schrieb, das Prinzip seiner Herleitung habe er bereits in einer früheren Arbeit benutzt, allerdings dabei noch keine Elementarteiler betrachtet.[204]

---

[200] [26, 1897, 333].
[201] [Kronecker, 1882, 356].
[202] [Kronecker, 1882, 277 u. 355].
[203] [26, 1897, 336]. Das Problem, daß der betrachtete Modul nicht frei sein muß und damit die Anzahl $k_1$ von der Reihenfolge der $x^{(i)}$ abhängen kann, wurde schon im Zusammenhang mit der Arbeit [5, 1889] erwähnt. Es bleibt natürlich bestehen.
[204] Dies bezieht sich auf die Arbeit [5, 1889].

### Die Konstruktion eines Fundamentalsystems modulo $P$

Für die Betrachtung des $P$-Anteils der Elementarteiler kann aus dem Fundamentalsystem mit $m$ Elementen ein Teilsystem ausgesondert werden, das die gleichen Elementarteiler hat. Dazu wählt man aus der $m \times n$-Matrix $(x_l^{(i)})$ die $n$ Elemente bzw. Spalten aus, deren Determinante die minimale Potenz von $P$ enthält. Sind diese $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$, so sind die Elementarteiler dieses Untersystems Teiler der Elementarteiler des ursprünglichen Systems,[205] gleichzeitig ist aber der $P$-Anteil des Produktes der Elementarteiler gleich, also muß auch der $P$-Anteil der einzelnen Elementarteiler übereinstimmen.

Ein solches System, für das der $P$-Anteil der Elementarteiler mit demjenigen eines Fundamentalsystems übereinstimmt, nannte Hensel ein *Fundamentalsystem modulo $P$*. Er zeigte zwei Eigenschaften eines solchen: Zum einen kann jede ganze Größe des Bereichs eindeutig in der Form $X = u_1 x^{(1)} + \ldots u_n x^{(n)}$ “mit modulo $P$ ganzen, d.h. mit solchen rationalen Coeffizienten dargestellt werden, welche $P$ nicht im Nenner enthalten.”[206] Zum anderen sind

> [d]ie Elemente $(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ eines Fundamentalsystems modulo $P$ ... somit für diesen Modul in der Weise rational unabhängig, dass eine Congruenz mit ganzen rationalen Coeffizienten $u_1 x^{(1)} + \ldots u_n x^{(n)} \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, P)$ dann und nur dann erfüllt ist, wenn alle Coefficienten durch $P$ teilbar sind und umgekehrt erkennt man leicht, dass jedes System von $n$ modulo $P$ rational unabhängigen ganzen Grössen ein Fundamentalsystem für $P$ ist.[207]

Hensel setzte exakt so wie schon in [5, 1889] ein Fundamentalsystem modulo $P$ aus den Fundamentalsystemen $(z_i)$ modulo $P_i$ zusammen. Die Elemente sind $\frac{P}{P_i^{d_i - j}} z_i^{(k)} (i = 1, \ldots, h; j = 0, \ldots d_i - 1, k = 1, \ldots, k_h)$ und der Unterschied, daß die Primfaktoren mit gleichem Exponenten hier schon zusammengefaßt wurden, ist unwesentlich.

Aus der Betrachtung der gebrochenen Exponenten folgt, daß $\frac{P}{P_1^{d_1 - j}} = P_1^j P_2^{d_2} \ldots P_h^{d_h}$ nebst seinen Konjugierten durch $P^{\frac{j}{d_1}} = P_1^j P_2^{\frac{j}{d_1} \cdot d_2} \ldots P_h^{\frac{j}{d_1} \cdot d_h}$, aber nicht durch eine höhere Potenz von $P$ teilbar ist. Damit ist $P^{\frac{j}{d_i}}$ der größte gemeinsame Teiler von $\frac{P}{P_i^{\delta_i - j}}$ mit seinen Konjugierten und weil diese größten gemeinsamen Teiler bereits den ganzen $P$-Anteil der Wurzel aus der Diskriminante $P^{\frac{n-k}{2}}$ umfassen,[208] muß das so gebildete System für den Modul $P$ äquivalent zu dem Diagonalsystem sein, in dem je $k_i$ mal die Potenzen von $P$ mit den Exponenten $\left[\frac{1}{d_i}\right] = (\frac{0}{d_i}, \frac{1}{d_i}, \ldots, \frac{d_i - 1}{d_i})$ vorkommen und diese Sequenzen sind damit die Exponenten von $P$ in den Elementarteilern des Systems.[209] Dies formulierte Hensel folgendermaßen:

> Ist ferner $P = P_1^{d_1} P_2^{d_2} \ldots P_h^{d_h}$ die Zerlegung von $P$ in seine mehrfachen Factoren innerhalb $\mathcal{G}$ und sind $k_1, k_2, \ldots, k_h$ die Ordnungszahlen der Factoren $P_1, \ldots, P_h$, so lassen sich die Exponenten der in den $n$ Elementartheilern von $\mathcal{G}$ enthaltenen Potenzen von $P$ in die Sequenzen $\left[\frac{1}{d_1}\right], \left[\frac{1}{d_2}\right], \ldots, \left[\frac{1}{d_h}\right]$ anordnen, welche bezw. $k_1-, k_2-, \ldots, k_h-$ mal auftreten. Endlich ist die Gattungsdiscriminante durch $P^{n-k}$ theilbar, wenn $k = k_1 + \cdots + k_h$ die Anzahl der zu $P$ gehörigen Sequenzen bedeutet.[210]

Im Spezialfall einer galoisschen Gattung sind alle $d_i$ gleich und man erhält $k$ Sequenzen $\left[\frac{1}{d}\right]$ mit $n = k \cdot d$. Das so konstruierte spezielle Fundamentalsystem nannte Hensel anschließend (analog zur Theorie der

[205] Das ist ein Satz über Elementarteiler, den Hensel “bekannt” nennt und für den er seine Arbeit [17, 1894] zitiert.
[206] [26, 1897, 340]. Der Beweis wurde bereits mehrfach dargestellt. Ein Element, in dessen eindeutiger Darstellung ein $u_i$ eine Potenz von $P$ als Nenner hätte, stände im Widerspruch zu der Minimalitätsforderung an $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$.
[207] [26, 1897, 340].
[208] Wie man ebenso wie in [5, 1889] leicht nachrechnet.
[209] Das Argument beruht also wie schon 1889 auf einem nicht bewiesenen Ergebnis über die Diskriminante, aus dem folgt, daß die $z_i$ keinen Beitrag leisten können.
[210] [26, 1897, 343f].

algebraischen Funktionen einer Variablen) ein *kanonisches System modulo $P$*, weil der $P$-Anteil der Spalteteiler von $(x_k^{(i)})$ mit dem $P$-Anteil der Elementarteiler übereinstimmt. Er hielt fest, daß ein kanonisches System modulo $P$ ein solches bleibt, wenn es mit einem Einheitssystem modulo $P$ komponiert wird.[211]

### 3.5.2 Anwendung auf Untergattungen

Die Arbeit *Ueber die Elementartheiler zweier Gattungen, von denen die eine unter der anderen enthalten ist* [27, 1897] steht auf den unmittelbar folgenden Seiten des Crelle-Journals. Die Ergebnisse beruhen wesentlich darauf, daß Hensel durch Symmetrisierung von einem Fundamentalsystem für die Gattung zu einem für die Untergattung kommt.

Sei dazu $\mathcal{G}_1$ eine Gattung $n$-ten Grades über dem Rationalitätsbereich $\Gamma$ und $G_1$ eine Untergattung $\nu$-ten Grades, die also von einem Element aus $\mathcal{G}_1$ erzeugt wird, dessen Minimalpolynom über $\Gamma$ Grad $\nu$ hat. Hensel betrachtete dann eine Spurabbildung von $\mathcal{G}_1$ nach $G_1$, die einer Funktion $Y \in \mathcal{G}_1$ die Summe ihrer Konjugierten über $G_1$ zuordnet. Für ein Fundamentalsystem von $\mathcal{G}_1$ gilt:

> Dann besteht mit einer gleich zu erwähnenden sehr speciellen Ausnahme der folgende wichtige Satz: Die Spur eines jeden Fundamentalsystemes für den Gattungsbereich $\mathcal{G}_1$ bildet ein Fundamentalsystem für den unter $\mathcal{G}_1$ enthaltenen Gattungsbereich $G_1$.[212]

Besagte Ausnahme ist, daß bei der Darstellung von ganzen Zahlen aus $G_1$ durch dieses Fundamentalsystem die Koeffizienten noch Teiler von $\mu = \frac{n}{\nu}$ als Nenner enthalten können. Die Primdivisoren, die Teiler vom $\mu$ sind, werden explizit von der Behandlung ausgeschlossen. Hensel leitete für die übrigen Primdivisoren den folgenden Satz über Elementarteileranteile ab:

> Die Elementartheiler einer beliebigen Gattung sind in den entsprechenden Theilern einer jeden unter ihr enthaltenen Gattung enthalten.[213]

Sei dazu $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$ ein Fundamentalsystem für $\mathcal{G}_1$. Dann ist das System $\binom{\eta}{y}$, das entsteht, wenn man in den ersten $\nu$ Zeilen von $(y) = (y_k^{(i)})$ $(i = 1, \dots m; k = 1, \dots, n)$ die $y_k^{(i)}$ durch ihre Spur ersetzt, äquivalent zu $(y)$ ist. Daher hat das System $(\eta)$, das nur aus den $\nu$ Zeilen mit den Spuren $\eta_k^{(i)}$ besteht, als Teilsystem von $\binom{\eta}{y}$ Vielfache von dessen Elementarteilern als Elementarteiler.

Hensel hob hervor, daß die Elementarteiler "viel wichtigere und wesentlichere" Invarianten sind, als die Determinantenteiler "im Gegensatz zu einer Bemerkung *Leopold Kroneckers*, welche sich in seinem Nachlasse vorgefunden hat."[214] Während nämlich die Determinantenteiler der Untergattung nur Teiler der entsprechenden Determinantenteiler der Gattung sind, stimmen die Elementarteiler der Untergattung mit gewissen der Elementarteiler der Gattung überein.

Um dies zu zeigen, schloß Hensel zusätzlich wilde Verzweigung, also den Fall, daß $P$ eine Zahl kleiner als $n$ ist, aus und betrachtete ein kanonisches Fundamentalsystem $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$ für den Modul $P$. Dann ist auch $\binom{\eta}{y}$ ein kanonisches System,[215] und aus dem System $(\eta)$ lassen sich $\nu$ Funktionen $\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(\nu)}$ auswählen, die ein kanonisches Fundamentalsystem für den Modul $P$ bilden. Teilt man nämlich in $(\eta)$ jede Spalte

[211] [26, 1897, 345].
[212] [27, 1897, 347].
[213] [27, 1897, 347]. Die Diskriminante von $\mathcal{G}_1$ setzt sich aus mehr Elementarteilern zusammen als die von $G_1$ und enthält daher im allgemeinen trotzdem eine höhere Potenz von $P$.
[214] [27, 1897, 350f]. Der $k$te Determinantenteiler ist der ggT aller $k \times k$-Unterdeterminanten, die Elementarteiler sind Quotienten der Determinantenteiler.
[215] Das wie oben entstehe, indem die ersten $\nu$ Zeilen durch ihre Spuren ersetzt werden.

durch den entsprechenden Spaltenteiler von $(y)$, so zeigte Hensel, daß eine der $\nu \times \nu$-Unterdeterminanten der entstehenden Matrix $\frac{\eta_k^{(i)}}{P^{r_i}}$ nicht durch $P$ teilbar ist. Das Fundamentalsystem für den Modul $P$ besteht dann aus den diesen Spalten entsprechenden Elementen und der $P$-Anteil der Elementarteiler dieses Systems ist gleich dem $P$-Anteil von $\nu$ der Elementarteiler des Systems $(y)$, d.h. die $P$-Elementarteiler der Gattung $G_1$ sind $\nu$ bestimmte unter denjenigen von $\mathcal{G}_1$.[216]

Da die Exponenten der Elementarteiler der Untergattung ebenfalls in Bruchsequenzen angeordnet werden können, ergibt sich noch eine genauere Beziehung. Ist $\left[\frac{1}{\delta_i}\right]$ eine der auftretenden Bruchsequenzen für die Exponenten des $P$-Anteils der Elementarteiler von $G_1$, so gibt es eine Bruchsequenz $\left[\frac{1}{d_j}\right]$ in den Exponenten des $P$-Anteils der Elementarteiler von $\mathcal{G}_1$, so daß $d_i | \delta_j$. Außerdem teilt das Produkt aller $\delta_i$ das Produkt aller $d_j$. Da der Exponent des $P$-Anteils der Diskriminante von $\mathcal{G}_1$ gerade $\sum d_i - 1$ und der der Diskriminante von $G_1$ gerade $\sum \delta_j - 1$ ist, ergibt sich

> als ganz specielles Corollar der bekannte Satz: Die Discriminante einer Gattung ist ein Vielfaches der Discriminante einer jeden unter ihr enthaltenen Gattung.[217]

Kommt $P^{n-s}$ in der Diskriminante der Gattung $\mathcal{G}_1$ vor, so muß die Diskriminante jeder Untergattung $G_1$, deren Ordnung größer als $s$ ist, ebenfalls eine Potenz von $P$ enthalten, da dann nicht alle Sequenzen nur ein Element enthalten können.[218]

### 3.5.3 Anwendung auf die Komposition

Sehr ähnliche Techniken wendete Hensel auch in der Arbeit *Ueber die Fundamentaltheiler eines Gattungsbereiches in Bezug auf zwei verschiedene Rationalitätsbereiche* [28, 1897] an. Sei dazu $(\mathcal{G}_1; \Gamma)$ die ursprüngliche Gattung $n$-ten Grades und $(\mathcal{G}_1; \overline{\Gamma})$ die Gattung über dem erweiterten Rationalitätsbereich $\overline{\Gamma}$. Hensel schrieb, die Ordnung könne sich reduzieren, weil nicht alle zuvor konjugierten Bereiche $\mathcal{G}_i$ konjugiert bleiben müssen, bezeichnete mit $\nu$ die Ordnung von $(\mathcal{G}_1; \overline{\Gamma})$ und

> die Bezeichnung sei so gewählt, dass die $\nu$ Bereiche $(\mathcal{G}_1), (\mathcal{G}_2), \ldots, (\mathcal{G}_\nu)$ conjugirt bleiben.[219]

Der Übergang von den Elementarteilern über dem einen zu denen über dem anderen Rationalitätsbereich wird durch ein kanonisches Fundamentalsystem ermöglicht. Sei dazu $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$ ein kanonisches Fundamentalsystem für den Primdivisor $P$ für $(\mathcal{G}_1; \Gamma)$. (Dabei ist $P$ ein Primdivisor in $\Gamma$.) Ist dann $\overline{P}$ einer der Primdivisoren von $P$ in $\overline{\Gamma}$ und $\overline{P}^d$ die maximale Potenz von $\overline{P}$, die in $P$ enthalten ist, so zeigte Hensel, daß man aus dem kanonischen Fundamentalsystem modulo $P$ ein kanonisches System für den Modul $\overline{P}$ aussondern kann. Dazu teilte er in dem System $(y_k^{(i)})$ jede Spalte durch ihren Spaltenteiler $P^{r_i}$, betrachtete nur die ersten $\nu$ Zeilen und zeigte, daß mindestens eine der $\nu \times \nu$-Unterdeterminanten prim zu $P$ ist und damit auch $\overline{P}$ nicht enthält. Das aus den entsprechenden $y^{(j)}$ gebildete System ist dann kanonisch für $\overline{P}$ und daher nach Division durch eine geeignete Potenz von $\overline{P}$ ein kanonisches Fundamentalsystem

[216] [27, 1897, 353].
[217] [27, 1897, 354].
[218] [27, 1897, 355]. Denn $s$ ist die Anzahl der Sequenzen in $\mathcal{G}_1$ und die Anzahl der Sequenzen in jeder Untergattung ist dann kleiner oder gleich $s$.
[219] [28, 1897, 174]. Da Hensel die Gattungsbereiche über dem neuen Rationalitätsbereich nicht anders bezeichnete als über dem alten, würde der moderne Leser hier davon ausgehen, daß er implizit annahm, der neue Rationalitätsbereich sei unter dem alten Gattungsbereich enthalten, da der "neue" Gattungsbereich ja sonst neue Elemente enthielte. Dies kann aber nicht der Fall sein, da Hensel später den Fall $n = \nu$ noch diskutierte.

für den Modul $\overline{P}$. Die Elementarteiler des Teilsystems sind dann $\nu$ der Elementarteiler des ursprünglichen Systems, nur muß man diese, um zu den Elementarteilern eines Fundamentalsystems zu gelangen, noch auf $\overline{P}$ umrechnen. Man erhält:

> Sind $(P^{r_1}, P^{r_2}, \ldots, P^{r_n})$ die $n$ auf $P$ bezüglichen Elementartheiler von $(\mathcal{G}; \Gamma)$, ist ferner $\overline{P}$ ein $d$-facher Primtheiler von $P$ für den Bereich $\overline{\Gamma}$ und $\overline{P}^{\varrho_1}, \ldots, \overline{P}^{\varrho_\nu}$ die auf $\overline{P}$ bezüglichen Elementartheiler von $(\mathcal{G}; \overline{\Gamma})$, so ist allgemein:
>
> $$\varrho_i = R(dr_{h_i}), \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$
>
> wo $r_{h_1}, r_{h_2}, \ldots, r_{h_\nu}$ gewisse $\nu$ unter den $n$ Exponenten $(r_1, \ldots r_n)$ sind und die $R(dr_{h_i})$ die kleinsten nicht-negativen Reste der Brüche $dr_i$ bedeuten.[220]

Genauere Schlußfolgerungen erhielt Hensel im Fall $\nu = n$. Sind $\left[\frac{1}{d_i}\right]$ $(i = 1, \ldots, s)$ die Sequenzen, die in den Exponenten des $P$-Anteils der Elementarteiler von $(\mathcal{G}; \Gamma)$ auftreten, bezeichnet $(d, d_i)$ den größten gemeinsamen Teiler von $d$ und $d_i$ und ist $D_i = \frac{d}{(d,d_i)}$, so kommen in den Exponenten des $P$-Anteils der Elementarteiler von $(\mathcal{G}; \overline{\Gamma})$ je $(d, d_i)$-mal die Sequenzen $\left[\frac{1}{D_i}\right]$ vor.[221]
Die Gesamtzahl der Sequenzen ist $\overline{s} = (d, d_1) + \cdots + (d, d_s) \geq s$ und $\overline{s} = s$ gilt nur dann, wenn $d$ zu allen $d_i$ teilerfremd ist. Die Diskriminante $D$ von $(\mathcal{G}; \Gamma)$ ist durch $P^{n-s}$, also durch $\overline{P}^{d(n-s)}$ teilbar, die Diskriminante $\overline{D}$ von $(\mathcal{G}; \overline{\Gamma})$ durch $\overline{P}^{n-\overline{s}}$. Die Diskriminante wird also durch die Adjunktion von $\overline{\Gamma}$ nur dann nicht reduziert, wenn für jeden Teiler $\overline{P}$ von $P$ $d = 1$ gilt und dies ist genau dann der Fall, wenn die Diskriminante der Gattung $(\overline{\Gamma}; \Gamma)$ nicht durch $P$ teilbar ist. Damit erhielt Hensel:

> Adjungirt man dem Gattungsbereiche $(\mathcal{G}_1; \Gamma)$ den Rationalitätsbereich $\overline{\Gamma}$, so reducirt sich die Discriminante jener Gattung für alle die und nur die Primfactoren $P$, welche in der Discriminante des adjungirten Gattungsbereiches $\overline{\Gamma}$ enthalten sind.[222]

Aus der obigen Formel erkennt man, daß $\overline{P}$ genau dann nicht in der Diskriminante vorkommt, wenn $\overline{s} = n$ ist, wofür $(d, d_i) = d_i$ sein muß. Diesen Fall kann man erreichen, wenn $m$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Sequenznenner $d_i$ des Bereichs $(\mathcal{G}; \Gamma)$ für $P$ ist und $P^{\frac{1}{m}}$ adjungiert wird.[223] Hensel behauptete, mit Hilfe dieses Verfahrens könne man die Diskriminante schrittweise auf 1 reduzieren und

> man erhält so eine Präcisierung und eine Erweiterung der Bemerkung Kroneckers, dass man Gattungen $\mathcal{G}_1$ finden kann, welche in einem algebraischen Rationalitätsbereiche $\Gamma$ keine Discriminante haben, eine Thatsache, welche bei natürlichen (nicht algebraischen) Bereichen niemals vorkommt.[224]

Ist hingegen $\nu \neq n$, so sind die auftretenden Sequenzen Teilsequenzen der obigen, d.h. sie haben die Gestalt $\left[\frac{1}{\delta_i}\right]$ mit $\delta_i | D_j$ für ein $j$ und einer Sequenz $\left[\frac{1}{D_j}\right]$ entsprechen maximal $(d, d_j)$ Sequenzen.
Um auch diese Aussage noch zu präzisieren, betrachtete Hensel, welche der ursprünglich konjugierten Gattungen $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n$ bezüglich $\overline{\Gamma}$ konjugiert sind. Ist $(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})$ ein kanonisches Fundamentalsystem modulo $P$ für $(\mathcal{G}; \Gamma)$, so teilte Hensel dieses System in soviele kanonische Systeme modulo $\overline{P}$, wie es Gruppen konjugierter Gattungen gibt. Nach Übergang zu Fundamentalsystemen stimmen die insgesamt $n$ echt gebrochenen Exponenten der Elementarteiler bezüglich $\overline{P}$ für alle konjugierten Gattungen mit den

[220] Hensel schrieb einmal fälschlich $\overline{\Gamma}$ statt $\Gamma$, [28, 1897, 177].
[221] [28, 1897, 178].
[222] [28, 1897, 179].
[223] [28, 1897, 179]. Es gibt auch kein Problem, wenn sich die Ordnung der Gattung durch diese Adjunktion reduziert.
[224] [28, 1897, 180]. Im Fall der algebraischen Funktionen erläuterte Hensel weiter, daß man mit einer reinen Gleichung auskommt, indem man bei mehreren Primdivisoren in der Diskriminante das kleinste gemeinsame Vielfache aller auftretenden Sequenznenner als $m$ benutzt und die $m$-te Wurzel aus dem Produkt der Primdivisoren adjungiert, [28, 1879, 180].

kleinsten Resten der $n$ Brüche $(dr_1, dr_2, \ldots, dr_n)$ überein, wenn $r_i$ die Exponenten der Elementarteiler bezüglich $P$ und $\Gamma$ sind. Die auftretenden Sequenzen können daher aus Kardinalitätsgründen nur

$$\left[\frac{1}{\frac{d_i}{(d,d_i)}}\right]$$

sein, jede von ihnen tritt $(d, d_i)$fach auf und da zu jedem von den oben gefundenen Teilsystemen vollständige Sequenzen gehören, tritt jede der $\sum_{i=1}^{s}(d, d_i)$ Sequenzen "in einer und nur einer der $g$ Gattungsdiscriminanten $D_1, D_2, \ldots, D_g$ auf, in welche $D$ unter Adjunction von $\overline{\Gamma}$ zerfällt."[225]

[225] [28, 1897, 185].

# Kapitel 4

# Die Vorteile der Potenzreihenentwicklungen

Die Hauptfragen dieses Kapitels sind: "Wofür benutzte Hensel die Potenzreihenentwicklungen in der Theorie der algebraischen Zahlen?" und "Welche ihrer Vorteile führten dazu, daß Hensel sie anschließend auch in seine Theorie der algebraischen Funktionen einführte?"

Zunächst sei ein Überblick über die in diesem Kapitel behandelten Quellen und Zeiträume gegeben:
Hensel trug über seine neue Theorie der algebraischen Zahlen erstmals im September 1897 auf der DMV-Tagung in Braunschweig vor. Die knappe Ausarbeitung dieses Vortrags erschien erst 1899, noch im Oktober 1897 veröffentlichte Hensel jedoch zwei kurze Abhandlungen, die illustrieren sollten, welche Vorteile die Arbeit mit den Potenzreihen bietet.
Im Juni 1900 schloß Hensel die lang geplante Arbeit [41, 1902] ab, in der er die benutzten Potenzreihenentwicklungen erstmals auch herleitete. Unmittelbar zuvor (bis März 1900) verfaßte er eine Arbeit [39] zur Theorie der algebraischen Funktionen, in der er ebenfalls die (in diesem Zusammenhang altbekannten) Potenzreihenentwicklungen als Grundlage wählte. Die Arbeiten enthalten analoge Aussagen und erschienen als [39, 1901] bzw. [41, 1902] in den *Mathematischen Annalen*.[1]

Hensels Vertrauen in die Kraft der Potenzreihenentwicklungen führte dazu, daß er eine solche Theorie auch für die algebraischen Funktionen zweier Variablen entwickelte. Er trug darüber 1898 und 1899 auf den DMV-Tagungen vor und veröffentlichte 1900 in den *Acta Mathematica* eine Ausarbeitung von Teilen der Vorlesung, die er darüber im Wintersemester 1898/99 in Berlin gehalten hatte.[2]

Diese Theorie wird hier nur knapp in einem Exkurs vorgestellt, da sie zwar illustriert, in welchem Rahmen

[1] [39, 1901] bzw. [41, 1902]. Nach Peter Ullrich machte Hensel die Analogie zwischen Zahl- und Funktionenkörpern "zur Basis einer eigenständigen mathematischen Teildisziplin," [Ullrich, 1999a, 127]. Hier soll nicht genauer auf die Abgrenzung einer "Teildisziplin" eingegangen werden. Hensels Ziel war es jedochin der Tat, die Grundlagen für eine neue Theorie der algebraischen Zahlen zu entwickeln, die die bekannten Ergebnisse enthielt, durch die Analogie zur Theorie der Funktionenkörper aber zudem bereits einen Weg zu weiteren Ergebnissen wies.

[2] Dabei half ihm F. Hartogs, der 1903 (in München) über analytische Funktionen zweier Variablen promovierte, vgl. [38, 1900].

Hensel über seine Theorie der algebraischen Zahlen nachdachte, davon abgesehen aber keinen Bezug zur Entstehung der $p$-adischen Zahlen hat.[3]

## 4.1 Der Gedankengang

Dieser Abschnitt rekonstruiert zunächst einen möglichen Weg zu Hensels Theorie (von 1897) im Fall der wilden Verzweigung. Eine Rekonstruktion ist nötig, weil Hensels erste Darstellung der gesamten Theorie (und nicht nur ihrer Behauptungen) erst drei Jahre später veröffentlicht wurde. Hensel schickte zwar 1897 eine Ausarbeitung an Weber (vgl. den unten zitierten Brief vom 23.11.1897), diese ist jedoch nicht erhalten. Daher ist unbekannt, wie detailliert und abgeschlossen Hensels Überlegungen 1897 waren.
Hierbei wird nach den Motivationen und Gründen von Hensels Theorie gefragt, während Peter Ullrich nur konstatiert:

> Hensel kombinierte also die ihm bekannte Analogie des Zahlkörper- und des Funktionenkörperfalls mit der Methode der Reihenentwicklung aus der Funktionentheorie zu der Idee, algebraische Zahlen als "Potenzreihen" in einer gegebenen Primzahl $p$ zu schreiben. Wohlgemerkt, solche Reihen waren zuvor noch nirgendwo aufgetreten.[4]

Dabei bleibt jedoch (in Anlehnung an Dedekind formuliert) die Frage: Was sollen die Potenzreihenentwicklungen in der Theorie der algebraischen Zahlen?[5]

Anschließend werden die praktischen Aspekte der Arbeit mit den Potenzreihenentwicklungen in den Arbeiten von 1901 bzw. 1902 etwas expliziter aufgezeigt, als Hensel dies in seinen Texten tat.

### 4.1.1 Der Umgang mit der wilden Verzweigung

Der Fall der *wilden Verzweigung*, in dem in der Primfaktorenzerlegung von $p$ mindestens einer der Exponenten durch $p$ teilbar ist, war in Hensels Arbeiten zur allgemeinen Situation (also [5, 1889], [26 - 28, 1897]) stets explizit ausgeschlossen worden. Bereits in [5, 1889] hatte er geschrieben, der Fall besitze "ein besonderes Interesse"[6] und bei seiner Vorstellung der neuen Theorie hob er ausdrücklich die Einbeziehung dieses Falls hervor.
Daher wird hier die *Bestimmung der Diskriminante eines Zahlkörpers $K$ im wild verzweigten Fall* als das mathematische Problem angesehen wird, das Hensel lösen wollte.[7]

#### Zusammenschau der bisherigen Ergebnisse

Die Einführung von Wurzelfunktionen erlaubte es in der im vorigen Kapitel vorgestellten Theorie, den größten gemeinsamen Teiler der Konjugierten einer Funktion als Wurzelfunktion aus den Koeffizienten ihres Minimalpolynoms zu bestimmen. Hensel hatte ein Verfahren angegeben, um zu einem System zu

[3] Hensels Schüler Heinrich W.E. Jung entwickelte diese Theorie später weiter. Sie blieb aber isoliert, d.h. sie wurde kaum mit Arbeiten zum gleichen mathematischen Gegenstand (z.B. in der algebraischen Geometrie) in Verbindung gebracht.
[4] [Ullrich, 1999, 134].
[5] [Dedekind, 1888].
[6] [5, 1889, 333], in 2.5.2 bereits ausführlicher zitiert.
[7] Bestimmung meint dabei (im Sinne Hensels) ein konstruktives Verfahren. Seine Ergebnisse in der Theorie der algebraischen Funktionen hatten die Diskriminante in diesem Sinne recht einfach bestimmt, denn man mußte nur die Elementarteiler eines beliebigen Systems reduzieren, multiplizieren und quadrieren.

gelangen, aus dessen Minimalpolynomen die Diskriminante bestimmt werden konnte. Ein solches hieß ein kanonisches System.[8]
Potenzreihenentwicklungen waren nicht Objekte jener Theorie. Hensel benutzte sie jedoch zum Beweis eines Theorems, das die *Interpretation* seiner Ergebnisse erweiterte: Die Summanden, aus denen sich der Exponent von $(x-a)$ in der Diskriminante zusammensetzt, bestimmen die Verzweigung über $x=a$. (Da jedem Verzweigungspunkt eine *Sequenz* solcher Summanden entspricht, erleichtert dieses Theorem auch die Bestimmung der Summanden.)

Für den Beweis dieses Theorems hatte Hensel ein kanonisches Fundamentalsystem für den Modul $(x-a)$ konstruiert, das zu jedem Verzweigungspunkt, an dem $k$ Blätter zusammenhängen, eine modifizierte nullte und die erste bis $k-1$-te Potenz einer geeigneten Funktion enthielt. Alle diese Potenzen erfüllten die zusätzliche Bedingung, daß ihre Entwicklungen an den übrigen Verzweigungspunkten über $x=a$ mindestens mit der Potenz $(x-a)^1$ begann. Daher hat die Matrix, deren Determinantenquadrat die Diskriminante ist, für $x=a$ Blockdiagonalgestalt.
Das so konstruierte System entsprach dem speziellen normalen Fundamentalsystem, das Hensel in [5, 1889] eingeführt hatte: In der Sprache der Riemannschen Flächen entsprechen den Primdivisoren von $(x-a)$ die Verzweigungspunkte über $x=a$ und die verschiedenen Konjugierten eines Elements sind lokal an $x=a$ den verschiedenen Verzweigungspunkten und damit den verschiedenen Primdivisoren zugeordnet.
Da die Entwicklungen eines Elements dieses kanonischen Fundamentalsystems an den Verzweigungspunkten, denen es nicht zugeordnet ist, mindestens mit $(x-a)$ beginnen, sind diese Elemente mindestens durch die Potenz der zugeordneten Primdivisoren teilbar, die in $(x-a)$ vorkommt. Dem entspricht, daß Hensel in [5, 1889] aus $P$ (hier $(x-a)$) schrittweise die Potenzen von jeweils nur einem der $P$ teilenden $P_i$ herausdividiert hatte.

Für den zahm verzweigten zahlentheoretischen Fall kann man die Ergebnisse von [5, 1889] folgendermaßen zusammenfassen: Es gibt ein Fundamentalsystem für den Modul $p$ der Gestalt $v^{[i]}_{j_{(k)}}\alpha_{j_{(k)}}$, wobei die $\alpha_{j_{(k)}}$ jeweils ein Fundamentalsystem für den Modul $P_k$ bilden und zu jedem $\alpha_{j_{(k)}}$ eine bestimmte Sequenz von Vorfaktoren $v^{[i]}_{j_{(k)}}$ gehört. Diese Vorfaktoren erfüllen bestimmte Teilbarkeitsbedingungen bzgl. aller in $p$ enthaltenen Primdivisoren.
Das wesentliche Ergebnis von Hensels komplizierter Rechnung war, daß der $p$-Anteil der Diskriminante sowohl komplett von den Vorfaktoren $v^{[i]}_{j_{(k)}}$ herrührt, als auch durch Berechnung der größten gemeinsamen Teiler dieser Vorfaktoren mit ihren Konjugierten bestimmt werden kann.

[8] Weiter gelangte man durch einfach zu bestimmende Divisionen von einem kanonischen System zu einem Fundamentalsystem, das dann als *kanonisches Fundamentalsystem* bezeichnet wurde.

**Die allgemeine Situation**

Hensel wollte auch im allgemeinen Fall, der wilde Verzweigung zuläßt, ein Fundamentalsystem für den Modul $p$ so konstruieren, daß der $p$-Anteil seiner Diskriminante komplett von den Vorfaktoren kommt.[9] Hierzu übertrug er Aussagen und Ziele aus seiner Theorie der algebraischen Funktionen: Er behauptete, zu jedem Primdivisor gehöre eine bestimmte Gruppe von Konjugierten, die *lokal* (d.h. modulo $p^M$) durch Potenzreihen beschrieben werden können, die untereinander konjugiert sind.[10] Umgekehrt wollte er die Elemente des Fundamentalsystems so wählen, daß jeweils nur die zu einem Primdivisor gehörenden Konjugierten berücksichtigt werden müssen.

Das Zerfallen der Konjugierten eines Elements in Gruppen modulo eines Primdivisors war eine für Hensel spezifische Beobachtung, die dieser bereits während der Arbeit an seiner Dissertation gemacht hatte. Die Behauptung, zu jedem Primdivisor gehöre eine Gruppe von Konjugierten bzw. von Entwicklungen, ist hingegen kühn, neu und bereitete Hensel noch größere Probleme bei der Ausformulierung seiner Theorie. Um den Nutzen der lokalen Konjugation zu erläutern, sei $P$ einer der Primfaktoren von $p$ und $d \in \mathbb{N}$ maximal mit $P^d|p$. Dann wählte Hensel für die zu $P$ gehörenden Elemente des Fundamentalsystems für den Modul $p$ speziell die Gestalt $\pi^i\alpha^j$ $(i = 1, \ldots, d-1, j = 1, \ldots, k-1)$, wobei die Potenzen $1, \alpha, \ldots, \alpha^{k-1}$ ein Fundamentalsystem für den Modul $P$ bilden und $\pi \in K$ genau einmal durch $P$ teilbar ist. Diesem Teilsystem eines Fundamentalsystems für den Modul $p$ entspricht dann ein quadratischer Ausschnitt der Konjugiertenmatrix des gesamten Systems: Hensel betrachtete zu den $dk$ Elementen nur die $dk$ Zeilen, die dem Primdivisor $P$ entsprechen. In diesem Ausschnitt setzte er die konjugierten lokalen Darstellungen ein. Dann kommt der $p$-Anteil der Determinante dieses Ausschnitts nur von den Potenzen von $\pi$ und zwar ist er gleich der Wurzel aus der Diskriminante einer lokalen Gleichung für $\pi$.[11]

Um weiter zu erreichen, daß sich aus dem Produkt solcher Teildiskriminanten der Exponent von $p$ in der Diskriminante bestimmen läßt, muß man die Forderungen, die in der Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen an die Entwicklungen an den übrigen Verzweigungspunkten gestellt wurden, erheblich verstärken. Das Ziel ist in beiden Fällen, daß der Exponent von $p$ bzw. $(x-a)$ in der Determinante der Konjugiertenmatrix aus den Determinanten der gerade betrachteten Ausschnitte bestimmt werden kann. Im Fall der algebraischen Funktionen reichte es dazu aus, daß die Koeffizienten, die den übrigen Verzweigungspunkten entsprechen, für $x = a$ verschwinden, nachdem die minimal vorkommende Potenz von $(x-a)$ (also der Spaltenteiler) herausgeteilt wurde, denn die Determinanten der entsprechenden Ausschnitte waren Konstanten.

Da im Falle der wilden Verzweigung die Teildeterminante auch nach der Division aller Spalten durch ihren größten gemeinsamen Teiler mit $p$ noch durch eine (nicht abschätzbare) Potenz von $p$ teilbar ist, muß man fordern, daß die anderen Teildeterminanten, die aus den zu $P$ gehörigen Spalten gebildet werden können, alle durch eine ausreichend hohe Potenz von $p$ teilbar sind. Um dies zu erreichen, forderte Hensel, daß die Konjugierten, die zu den übrigen Primdivisoren von $p$ gehören, durch eine beliebig hohe Potenz

[9] Er läßt sich aber nicht mehr aus den einzeln betrachteten Vorfaktoren einer Spalte berechnen, d.h. das System ist i.A. nicht mehr kanonisch.

[10] "Lokal" ist mein Ausdruck für diesen Abschnitt, Hensel selbst benutzte für die Betrachtung modulo $p^M$ auch geometrische bzw. topologische Ausdrücke.

[11] Falls $p$ nur einen Primdivisor hat, gilt das automatisch, ansonsten muß man evtl. noch vor den anderen Primdivisoren "abschirmen".

von $p$ teilbar sind. Diese Formulierung korrespondiert zu Hensels konstruktiver Auffassung und bedeutet: Man hat einen Algorithmus zur Verfügung und für jedes konkret gegebene $M$ erreicht man nach endlich vielen Schritten, daß die Konjugierten alle durch $p^M$ teilbar sind.[12]
Man kann also nicht apriori abschätzen, durch welche Potenz von $p$ die übrigen Konjugierten teilbar sein müssen. Hat man aber die Diagonalblöcke bestimmt, so kann man aposteriori entscheiden, ob die Konjugierten durch eine genügend hohe Potenz von $p$ teilbar sind.[13]

Um die Teildiskriminante wirklich berechnen zu können, muß man noch die angesprochene lokale Gleichung für $\pi$ bestimmen: Ihr Grad ist $d$, wenn $p$ genau durch $P^d$ teilbar ist. Weil zum Primdivisor $P$ insgesamt $dk$ Konjugierte gehören, kommt $\alpha$ in den Koeffizienten der Gleichung für $\pi$ vor. Da ein Element des betrachteten Zahlkörpers $K$ im Allgemeinen keine Gleichung $d$-ten Grades mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}(\alpha)$ erfüllen kann, suchte Hensel eine Kongruenz für eine beliebig hohe Potenz $P^M$ als Modul.
Hensel gelangte in zwei Schritten zu einer solchen Kongruenz für $\pi$. In einem ersten Schritt entwickelte er den Quotienten $x = \frac{\pi^d}{p}$ nach Potenzen von $\pi$. Dazu bestimmte er den Rest $r_0$ von $x$ modulo $P$, bildete $y_1 = x - r_0$, teilte durch $\pi$ und erhielt damit $x_1 = \frac{y_1}{\pi}$, bestimmte den Rest von $x_1$ modulo $P$ usw. Er gelangte zu

$$\frac{\pi^d}{p} = r_0 + r_1\pi + r_2\pi^2 + \cdots + r_{d-1}\pi^{d-1} + R\pi^d.$$

Anschließend multiplizierte er diese Gleichung mit $p$, setzte den erhaltenen Ausdruck für $\pi^d$ auf der rechten Seite ein und erhielt einen neuen Ausdruck[14]

$$\frac{\pi^d}{p} = s_0 + s_1\pi + s_2\pi^2 + \cdots + s_{d-1}\pi^{d-1} + pR\pi^d,$$

also eine Kongruenz für $\pi$ für den Modul $P^{2d}$. Durch Fortsetzen dieser Schritte gelangte er zu der gewünschten Kongruenz für $\pi$. In einem zweiten Schritt zeigte Hensel, daß man nur ein Anfangsstück dieser Kongruenz braucht, wenn man anschließend $\pi$ schrittweise anpaßt.
Analog kann man $\alpha$ modifizieren, so daß es die Kongruenz $k$-ten Grades, die es zunächst für den Modul $p$ erfüllte, schrittweise für die Mouln $p^{k+1}$ und schließlich für den Modul $p^M$ erfüllt.

Aus der so erhaltenen Kongruenz für $\pi$ kann man die gesuchte Teildiskriminante berechnen. Die gewöhnlichen Wurzeln der Gleichungen, die den Kongruenzen für $\pi$ bzw. $\alpha$ entsprechen, sind die Bausteine der lokalen Konjugierten.[15] Damit sind für den Teil des Fundamentalsystems, der zu $P$ gehört, die $P$ entsprechenden lokalen Konjugierten wie gewünscht eingeführt. Für die übrigen Konjugierten kann man erreichen, daß sie wie gewünscht (modulo $p^M$) verschwinden, so daß die geplante Konstruktion eines angepaßten Fundamentalsystems zur Berechnung der Diskriminante im wild verzweigten Fall abgeschlossen ist.

[12] Für den schwachen Konstruktivismus der Berliner Schule vgl. z.B. 1.2.2.
[13] Eine sehr grobe aposteriori-Abschätzung wäre, daß es ausreicht, wenn die Konjugierten durch das Produkt des $p$-Anteils der Determinanten der Diagonalblöcke teilbar ist. Die Überlegungen zur Möglichkeit von Abschätzungen dienen nur der Illustration; Hensel äußerte sich dazu nicht.
[14] Während die $r_i$ aus einem vollständigen Restsystem modulo $P$ stammen, also Koeffizienten zwischen Null und $p-1$ haben, sind die $s_i$ im Allgemeinen nicht reduziert.
[15] Dabei ist die Gleichung für ein $\pi_i$ stets von der Wahl eines $\alpha = \alpha_j$ abhängig.

Hieraus leitete Hensel für ein beliebiges, durch das gesamte Fundamentalsystem für den Modul $p$ dargestelltes Element insgesamt $n$ Entwicklungen modulo $p^M$ ab. Dazu betrachtete er die lokalen Konjugierten zu den jeweiligen Primdivisoren $P$ und rechnete die noch auftretenden ganzzahligen Koeffizienten folgendermaßen um: Er schrieb sie in der Form $N = \sum_{i=0}^{k} a_i p^i$ mit $0 \leq a_i < p$ und ersetzte jedes vorkommende $p$ durch seine Entwicklung bezüglich $\pi$ und $\alpha$. Durch Ausmultiplizieren und Reduzieren mit Hilfe der Kongruenz für $\alpha$ erhielt er die gesuchte Potenzreihe in $\pi$ und $\alpha$, die offenbar $kd$ konjugierte Reihen hat.[16]

**Kurzzusammenfassung: Das spezielle Fundamentalsystem und die Diskriminante**

Ausgangspunkt von Hensels Überlegungen war der zahm verzweigte Fall, in dem bekannt war, wie die Diskriminante aus der Primdivisorzerlegung berechnet werden kann. Mit Hilfe dieser bekannten Diskriminante konnte Hensel nachweisen, daß ein von ihm konstruiertes spezielles Fundamentalsystem normal bzw. kanonisch ist.[17]

Die Betrachtung der Elementarteiler ermöglichte es zu überprüfen, ob ein gegebenes System kanonisch ist, und es gegebenenfalls in ein solches zu überführen. Unabhängig davon war es durch die Betrachtung der Elementarteiler jedoch auch möglich, den $p$-Anteil der Diskriminante zu bestimmen, ohne die Primdivisorzerlegung von $p$ zu kennen.[18] Insbesondere folgte daraus auch ohne die Theorie der Fundamentalgleichung, daß Hensels spezielles, der Primdivisorzerlegung angepaßtes System ein kanonisches Fundamentalsystem ist, mit dessen Hilfe man den $p$-Anteil der Diskriminante bestimmen kann.

Um die Diskriminante auch im wild verzweigten Fall berechnen zu können, hielt Hensel an der Betrachtung eines Systems fest, das genau an die Primdivisorzerlegung angepaßt ist. Da dieses System i.A. nicht kanonisch ist, muß die Konjugiertenmatrix des Systems nicht nur modulo $p$ Blockdiagonalgestalt haben sondern für eine ausreichend hohe Potenz von $p$ als Modul. Aufgrund dieser stärkeren Teilbarkeitsforderungen ist eine kompliziertere Konstruktion nötig. Die Determinanten der so konstruierten Diagonalblöcke bestimmte Hensel aus den Gleichungsdiskriminanten der Kongruenzen für die Grundbausteine der Fundamentalsysteme bezüglich des jeweiligen Primdivisors.

Während also im zahm verzweigten Fall das der Primdivisorzerlegung angepaßte kanonische System direkt hingeschrieben werden konnte, mußte im wild verzweigten Fall zur Berechnung des $p$-Anteils der Diskriminante ein ebenfalls der Primdivisorzerlegung angepaßtes, nicht kanonisches System erst konstruiert werden.

### 4.1.2 Algebraische Funktionen einer Variablen

In der ersten Jahreshälfte 1900 schrieb Hensel gleichzeitig an den auch inhaltlich parallel geführten Arbeiten [39, 1901] und [42, 1902]. In ihnen operierte er im Fall der algebraischen Funktionen einer Variablen

[16] Der Vorteil des modifizierten $\alpha$ ist, daß man bei der Reduktion mit Hilfe der Kongruenz für $\alpha$ keine Überträge berücksichtigen muß.

[17] Beide Begriffe beschreiben, daß der $p$-Anteil der Determinante der Konjugiertenmatrix eines Systems aus den Spaltenteilern bestimmt werden kann. Für "normal" hatte Hensel dies direkt gefordert, für "kanonisch" formulierte er eine äquivalente Bedingung mit Hilfe der Elementarteiler.

[18] Hensel veröffentlichte die entsprechende Theorie nur im Fall der algebraischen Funktionen, in dem es keine wilde Verzweigung gibt.

mit Potenzreihen bzw. im zahlentheoretischen Fall mit zugeordneten lokalen Konjugierten. Der einfachere Fall der algebraischen Funktionen einer Variablen wird hier zuerst dargestellt.

Hensel begann damit, die Bedingung an ein kanonisches System einfacher zu formulieren, indem er die Koeffizienten der Entwicklung benutzte. Zu einer algebraischen Erweiterung $n$-ten Grades und einem $n$-elementigen linear unabhängigen System betrachtete er die $n \times n$-Matrix $M$ der Entwicklungen an den verschiedenen Verzweigungspunkten. Das System ist genau dann kanonisch, wenn die Determinante der reduzierten Matrix $M_{red}$, die dadurch entsteht, daß man jede Spalte durch ihren Spaltenteiler[19] teilt, für $x = a$ nicht verschwindet, also nicht durch eine positive (gebrochene) Potenz von $(x - a)$ teilbar ist. Um dies zu überprüfen, muß man in $M_{red}$ nur die Absolutglieder berücksichtigen: Das System ist kanonisch, wenn die Determinante der aus den Absolutgliedern von $M_{red}$ gebildeten Matrix nicht verschwindet.
Diese Bedingung formulierte Hensel jetzt ohne die vorherige Division: In jeder Spalte sind die Anfangskoeffizienten die Koeffizienten des Spaltenteilers. Ein System heißt *regulär für $x = a$*, wenn die Determinante der aus den Anfangskoeffizienten gebildeten Matrix nicht verschwindet.

Hensel gab einen relativ einfachen Algorithmus an, um von einem beliebigen System zu einem regulären System an $x = a$ zu gelangen. Die $d$ Entwicklungen an einem der Verzweigungspunkte sind durch eine von ihnen mitbestimmt und Hensel betrachtete die rechteckige Matrix, die zu jedem Verzweigungspunkt genau eine Zeile enthält.
Aus der bekannten Verzweigung folgen die Reste der Spaltenteilerexponenten eines regulären Systems. Zu einem Verzweigungspunkt der Ordnung drei gehören zum Beispiel die Reste $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, während die Exponenten selbst auch $2, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}$ sein können. Ist das System nicht regulär, so kommt einer der vorgeschriebenen Reste nicht und stattdessen einer der kleineren Reste häufiger vor.
Die Betrachtung der Potenzreihen hat den Vorteil, daß man nicht nur erkennt, daß ein falscher Spaltenteiler vorkommt, sondern auch, an welchem Verzweigungspunkt das Problem auftritt. In seiner Arbeit [20, 1895] hatte Hensel durch Lösung eines linearen Gleichungssystems nur erreichen können, daß die Summe der Spaltenteiler irgendwie ansteigt.
Es gebe zum Beispiel nur einen Verzweigungspunkt der Ordnung drei und keinen, dessen Ordnung ein Vielfaches von drei ist. Wenn dann in einer Zeile zwei Entwicklungen mit $(x - a)^{\frac{1}{3}}$ beginnen und die Spaltenteiler der dazugehörigen Spalten beide $(x-a)^{\frac{1}{3}}$ sind, so kann das System nicht regulär sein.[20] Das Verfahren hält dann eine der beiden den Spalten zugeordneten Funktionen fest und zieht von der zweiten ein Vielfaches der ersten ab, so daß der Koeffizient von $(x-a)^{\frac{1}{3}}$ der zweiten Funktion in dieser Zeile Null wird, diese zweite Funktion also einen höheren Spaltenteiler hat.
Diese Umformungen werden mit Hilfe der zugeordneten Entwicklungen bestimmt (und verändern diese auf leicht auszurechnende Weise), aber an den Funktionen selbst durchgeführt und daher stört es nicht, daß die Ausdrücke $(x - a)^{\frac{1}{d}}$, nach denen entwickelt wird, nicht im betrachteten Körper algebraischer Funktionen liegen. Es müssen genaugenommen nur die Koeffizienten der Spaltenteiler berücksichtigt wer-

[19] Dies ist die in der Spalte minimal auftretende gebrochene Potenz von $(x - a)$.
[20] Es könnte trotzdem regulär sein, wenn ein zweiter Spaltenteiler $\frac{1}{3}$ sein dürfte, was daher ausgeschlossen wurde.

den - allerdings muß der Spaltenteiler neu berechnet werden, wenn alle Koeffizienten verschwunden sind. Ein wichtiger Vorteil dieses Verfahrens liegt darin, daß man nicht nur ein reguläres System bekommt, sondern darüberhinaus auch erreicht, daß jede Funktion des Systems genau einem Verzweigungspunkt zugeordnet wird, da der Spaltenteiler aus genau einer Zeile der rechteckigen Matrix stammt.

Nimmt man jetzt die Zeilen wieder hinzu, die aus den eben betrachteten folgen, so erhält man eine untere Blockdreiecksmatrix. Bei der Konstruktion eines Fundamentalsystems (für alle ganzen Funktionen oder ein Ideal) setzt man das Verfahren fort, bis man eine Blockdiagonalmatrix erreicht. Dazu werden wiederum Spaltenoperationen durchgeführt, die jeden Eintrag, der nicht den Spaltenteiler liefert, zu Null machen.
Mit Hilfe dieses Verfahrens kann man auch entscheiden, ob ein gegebenes System lokal ein Fundamentalsystem für irgendein Ideal ist, ohne daß dieses bekannt sein muß. Ein Ideal bilden dabei alle Funktionen, die vorgegebene Teilbarkeitsforderungen erfüllen und an den übrigen im Endlichen liegenden Punkten nicht singulär sind. Eine solche Forderung an den Verzweigungspunkten über $x = a$ könnte sein, daß die Funktionen durch $P_1^3$ und $P_2^{-4}$ teilbar sind.

Bei der Konstruktion eines Fundamentalsystems für alle an $x = a$ ganzen Funktionen ging Hensel von einem beliebigen $n$-elementigen, linear unabhängigen System an $x = a$ ganzer Funktionen aus und überführte es in ein reguläres. Dann teilte er die Elemente, deren Spaltenteiler $(x-a)^s$ mit $s > 1$ sind, durch $(x-a)^g$ mit $g \leq s \in \mathbb{Z}$ maximal und erhielt ein Fundamentalsystem. Sind zum Beispiel die Spaltenteiler der zu $P_1$ gehörenden Elemente $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 3$, so behält man das erste Element bei, teilt das zweite durch $(x-a)$ und das dritte durch $(x-a)^3$.
Will man überprüfen, ob ein gegebenes System ein Fundamentalsystem ist, so überführt man es in ein reguläres System und kontrolliert, ob die Exponenten der Spaltenteiler alle kleiner als Eins sind.
Will man jetzt aus dem oben konstruierten Fundamentalsystem eines für die ganzen Funktionen erhalten, die durch $P_1^4$ teilbar sind, so muß man noch zwei weitere Schritte machen. Zuerst muß man durch Spaltenoperationen erreichen, daß alle Elemente des Systems, die nicht zum Primdivisor $P_1$ gehören, durch $P_1^4$ teilbar sind, indem man ggf. die ersten Summanden der entsprechenden Entwicklungen beseitigt. Anschließend multipliziert man einige der Elemente des Fundamentalsystems, die zu $P_1$ gehören mit $(x-a)$, damit sie durch $P_1^4$ teilbar sind. Gehört zum Beispiel $P_1$ zu einem Verzweigungspunkt der Ordnung $d > 4$, so kann man zu einem für $x = a$ regulären System übergehen, erhält also $d$ Elemente, deren Entwicklungen an $P_1$ die Spaltenteiler $0, \frac{1}{d}, \frac{2}{d}, \ldots, \frac{d-1}{d}$ ergeben. Das gesuchte System erhält man, indem man die ersten vier dieser Funktionen mit $(x-a)$ multipliziert, wodurch man ein System erhält, dessen Spaltenteiler $\frac{4}{d}, \ldots, \frac{d-1}{d}, 1, \frac{d+1}{d}, \frac{d+2}{d}, \frac{d+3}{d}$ sind.
Will man jetzt überprüfen, ob ein gegebenes System ein Fundamentalsystem für ein Ideal sein kann, so überführt man es in ein reguläres und überprüft, ob die Spaltenteiler eine lückenlose Sequenz ergeben. In einem zweiten Schritt muß noch überprüft werden, ob die übrigen Elemente des Systems durch die Potenz von $P_i$ teilbar sind, die der Sequenz entspricht. Gehören also zum Beispiel zu $P_1$ drei Elemente des regulären Fundamentalsystems und bilden die dazugehörigen Spaltenteiler die Sequenz $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 3$, so kann

das gegebene System kein Fundamentalsystem für ein Ideal sein. Bilden die dazugehörigen Spaltenteiler hingegen die Sequenz $\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}$, so könnte das System ein Fundamentalsystem für die durch $P_1^2$ teilbaren Funktionen sein und es ist zu überprüfen, ob auch alle übrigen Elemente des Systems durch $P_1^2$ teilbar sind.

Hensel formulierte diese Bedingungen als verschiedene Möglichkeiten, die Matrix in Blockdiagonalgestalt umzuformen. Die Umformung ist genau dann möglich, wenn sie für eine bestimmte endliche, aber a priori nicht bestimmte Potenz $(x-a)^D$ als Modul möglich ist.[21] Fordert man nur eine bestimmte Genauigkeit, betrachtet man also die Matrix modulo $(x-a)^M$ mit $M > D$, so läßt sich die geforderte Blockdiagonalform, falls sie möglich ist, in endlich vielen Schritten erreichen, denn in jedem Schritt beseitigt man einen Summanden einer auftretenden Potenzreihe.
Für die tatsächliche Blockdiagonalform benötigt man im Allgemeinen unendlich viele Schritte und die so erhaltenen Elemente liegen nicht mehr im betrachteten Körper.[22] Man erkennt hier erstmals in Hensels Arbeiten die schwache Konstruktivitätsforderung der Berliner Schule: Das System kann in endlich vielen Schritten einer beliebig gegebenen Genauigkeitsforderung genügen.

Als Ergebnis dieses Algorithmus erhält man insbesondere Elemente, die genau einen der Primdivisoren über $x = a$ genau einmal enthalten, während sie durch beliebig hohe Potenzen der anderen teilbar sind.[23]
Die erhaltenen lokalen Ergebnisse lassen sich zusammensetzen. Somit konnte Hensel sowohl überprüfen, ob ein gegebenes System ein Fundamentalsystem für ein Ideal ist, weil er dazu nur eine endliche Anzahl kritischer Linearfaktoren betrachten mußte, als auch ein Fundamentalsystem für eine gegebene Teilbarkeitsbedingung konstruieren, da sich die erforderlichen Modifikationen zu verschiedenen Linearfaktoren gegenseitig nicht stören.

Der Aufbau des zweiten Teils der Arbeit orientierte sich stärker als Hensels vorige Arbeiten zu diesem Themenbereich an der Arbeit von Dedekind und Weber (1882). Der Grund ist vermutlich, daß er diesmal *alle* Aussagen ihrer Arbeit auch auf seine Weise erhalten wollte. Er betrachtete Divisoren mit positiven oder negativen Exponenten und definierte ihre Äquivalenz. Weiter führte er die Differentialklasse ein und arbeitete statt mit einer ausgezeichneten Variable mit der Ordnungszahl einer Funktion. Die Zulassung von Divisoren mit negativen Exponenten ermöglichte eine elegantere Ausdrucksweise und Vereinfachungen der Beweise im Vergleich zu [Dedekind/Weber, 1882].

### 4.1.3 Die Eingliederung in die Idealtheorie

Oben wurde versucht, Hensels Weg zu seiner neuen Theorie der algebraischen Zahlen nachzuzeichnen. Entscheidend dafür waren seine Behauptungen, daß (und wieviele) Konjugierte genau einem Primdivisor entsprechen bzw. lokal konjugiert sind. Ein wesentlicher Punkt der ausführlichen Darstellung der Theorie

[21] Dies ist analog zum Fall der algebraischen Zahlen, wo Hensel die Blockdiagonalgestalt auch für $p^M$ als Modul forderte, da er die Potenz, für die er sie brauchte, nicht apriori abschätzen konnte.
[22] Dies implizite Vervollständigung wurde von Hensel jedoch nicht thematisiert.
[23] Auch hier gilt: Führt man unendlich viele Schritte des Algorithmus durch, so sind die Elemente durch die übrigen Primdivisoren gar nicht mehr teilbar.

war es, diese Behauptungen zu beweisen. Hensel brauchte von Oktober 1897 bis Juni 1900, um zu einer relativ präzisen Formulierung dieses Sachverhalts zu kommen.
Geht man von der Primdivisorzerlegung von $p$ und einem der Primdivisoren $P$ aus, so ist es verhältnismäßig leicht, zu Entwicklungen modulo $P^M$ zu gelangen. Man braucht dazu ein Element $\alpha$, dessen Potenzen $1, \alpha, \ldots, \alpha^{k-1}$ ein Fundamentalsystem für den Modul $P$ bilden, und ein Element $\pi$, das genau einmal durch $P$ teilbar ist. Die Entwicklungen haben die Gestalt $x = \sum_{i=0}^{M-1} f_i(\alpha)\pi^i$, wobei die ganzen Funktionen $f_i$ mod $p$ reduzierte Koeffizienten und maximal Grad $k-1$ haben.

Hensel wollte über die Potenzreihenentwicklungen allgemeinere Aussagen treffen, die nicht mehr auf $P$ Bezug nehmen. Zunächst erfüllt die für $x$ bestimmte Entwicklung das Minimalpolynom von $x$ modulo $P^M$. Hensel zeigte, daß sie es auch modulo $p^{M'}$ erfüllt.[24]
Um die gesuchten $kd$ konjugierten Entwicklungen zu erhalten, ersetzte Hensel die Entwicklungselemente $\alpha$ und $\pi$ zunächst durch algebraisch einfachere Elemente und benutzte die Konjugierten der letzteren. Dazu ging er von der Kongruenz aus, die $\alpha$ modulo $P$ erfüllt, und zeigte, daß sich $\alpha$ schrittweise innerhalb des Körpers modifizieren läßt, bis es diese Kongruenz auch modulo $P^M$ erfüllt. Dann betrachtete er die entsprechende *Gleichung* und arbeitete mit ihren $k$ algebraischen Wurzeln $\alpha_i$. Analog ging Hensel für $\pi$ vor: Er bestimmte eine Kongruenz (in deren Koeffizienten $\alpha$ vorkommt), die $\pi$ für eine genügend große Potenz von $P$ als Modul erfüllt, zeigte dann, daß sich $\pi$ so modifizieren läßt, daß es diese Kongruenz auch für $P^M$ als Modul erfüllt, und betrachtete anschließend die Wurzeln der *Gleichungen*, die entstehen, wenn in den Koeffizienten die verschiedenen Werte $\alpha_i$ eingesetzt werden. Die $kd$ Konjugierten erhält man, indem man zu jedem gewählten $\alpha_i$ nacheinander die $d$ zugeordneten Werte $\pi_j$ einsetzt.
Sei $x$ ein Element des betrachteten Zahlkörpers, dessen Minimalpolynom $F(x)$ Grad $n$ hat. Jede Entwicklung, die man erhält, indem man in die ursprüngliche Entwicklung statt $(\alpha, \pi)$ eine der $kd$ zulässigen Kombinationen $(\alpha_i, \pi_j)$ einsetzt, erfüllt ebenfalls das Minimalpolynom $F(x)$ modulo $p^{M'}$. Die ursprüngliche Entwicklung mit $(\alpha, \pi)$ stimmt modulo $P^M$ mit genau einer der Entwicklungen mit $(\alpha_i, \pi_j)$ überein. Es bleibt die Aufgabe zu zeigen, in welchem Sinne die so erhaltenen Entwicklungen eindeutig sind.

Bisher wurden zu einem Primdivisor und einem Element $kd$ Entwicklungen konstruiert. Hensel erläuterte anschließend, wie die Konjugierten dieses Elements in Gruppen zerfallen.
Dazu ging er zur normalen Hülle über, bestimmte dort einen Primdivisor $P_1$ von $P$ und bezeichnete jeweils den konjugierten Divisor zu $P_1$ in dem entsprechenden konjugierten Körper mit $P_i$. Betrachtet man dann jeweils die (ursprüngliche) Entwicklung von $x_i$ modulo $P_i^M$, so erhält man insgesamt $n$ Potenzreihenentwicklungen, die alle das Minimalpolynom von $x$ modulo $p^{M'}$ erfüllen.
Hensels wesentliches Argument ist, daß die Kongruenz $F(x) \equiv 0 \bmod \wp^M$ genau $n$ modulo $\wp$ verschiedene Wurzeln hat, wobei $\wp$ jeweils einen Primdivisor von $p$ in dem normalen Körper bezeichnet, der alle gerade zu berücksichtigenden Größen enthält.
Sei also zunächst $\wp$ ein solcher Primdivisor, nachdem man alle $x_i, \alpha_j$ und $\pi_k$ hinzugenommen hat. Dann erfüllen die $kd$ konjugierten Entwicklungen zu $x_1$ die Kongruenz ebenso wie die $n$ Entwicklungen zu den

[24]Dabei wird $M' \in \mathbb{N}$ beliebig groß, wenn $M$ beliebig groß wird. Konkret ist $M'$ der ganze Anteil von $\frac{M}{d}$.

jeweiligen $x_i$. Daher müssen die $kd$ konjugierten Entwicklungen zu $x_1$ modulo $\wp^M$ mit $kd$ der Entwicklungen zu $x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ übereinstimmen. Diese $kd$ der $x_i$ bilden also eine der gesuchten Gruppen. Betrachtet man die $kd$ konjugierten Entwicklungen zu einem $x_i$, das nicht in der ersten Gruppe enthalten ist, so erhält man eine weitere Gruppe usw.
Es ist klar, daß je nach gewähltem $P$ ein festes $x_1$ möglicherweise in verschiedenen Gruppen ist, da ja für ein anderes $P'$ schon $k'd'$ einen anderen Wert haben kann.[25]

Hensels Hoffnung war, daß die Menge der Entwicklungen, die zu einem Primdivisor $P$ gehören, in einem geeigneten Sinne invariant ist.[26] Um dies zu zeigen, betrachtete Hensel die ganzzahligen Faktoren, die entstehen, wenn man jeweils die zu einem Primdivisor gehörigen Linearfaktoren $(X - x(\alpha_i, \pi_j))$ ausmultipliziert. Diese Faktoren liefern eine Zerlegung des Minimalpolynoms modulo $p^{M'}$. Für die behauptete Eindeutigkeit ist daher zu zeigen, daß die Zerlegung des Minimalpolynoms modulo $p^{M'}$ eindeutig ist. Dann sollte nach Hensel jedem irreduziblen Faktor ein Primdivisor entsprechen und die Wurzeln eines solchen Faktors sollten bis auf eine noch zu definierende Äquivalenz eindeutig sein.[27]
Hensel kündigte daher an, daß man von dieser Zerlegung ausgehend auch die Primdivisoren definieren und damit auf die Grundlage der Idealtheorie verzichten könne.[28]

Im zweiten Teil seiner Arbeit stellte sich Hensel analog zum Fall der algebraischen Funktionen die Aufgabe, von einem beliebigen linear unabhängigen System mit $n$ Elementen ausgehend zu einem Fundamentalsystem für die lokal ganzen Zahlen bzw. für ein Ideal zu kommen, sowie ein solches Fundamentalsystem allgemein zu charakterisieren.
Die Situation ist etwas komplizierter als im Fall der algebraischen Funktionen: Zum einen ist das Zielsystem nicht kanonisch, d.h., man kann die Diskriminante eines Systems i.A. nicht aus den Spaltenteilern, die hier gebrochene Potenzen von $p$ sind, berechnen. Zum anderen tritt jeder Spaltenteiler $k$-fach auf. Das Verfahren, das im wesentlichen analog zu dem oben vorgestellten verläuft, arbeitet daher mit den Spaltenteilern, um in der richtigen Reihenfolge zu modifizieren, kann aber die Bedingung an das System in Blockdreiecksform nicht allein in Termen der Spaltenteiler formulieren.
Hensel betrachtete wieder die rechteckige Teilmatrix der Entwicklungen, in der zu jedem Primdivisor von $p$ genau eine Zeile gehört. Im ersten Schritt modifizierte er das System so, daß der Teiler jeder Spalte von genau einer Zeile herkommt. Die Betrachtung modulo $p^M$ erlaubt es dabei, nur mit Linearkombinationen der Elemente des Fundamentalsystems $\alpha^i\pi^j$ mit *ganzzahligen* Koeffizienten zu arbeiten.[29] Diese ganzzahligen Koeffizienten beeinflussen die Spaltenteiler (konkret z.B. für eine Primzahl $q$). Die Betrachtung

[25] Auch wenn $k = k'$ und $d = d'$ ist, müssen die Gruppen nicht übereinstimmen.

[26] D.h. einem festen Primdivisor werden immer $kd$ Entwicklungen zugeordnet und diese haben genug gemeinsam. Da umgekehrt ein festes $x$ i.A. eine andere Entwicklung bezüglich $P$ bzw. $P'$ hat, ist diese Hoffnung nicht offensichtlich aussichtslos, obwohl $x$ in verschiedenen Gruppen liegt.

[27] Die Zerlegung einer irreduziblen ganzzahligen Gleichung modulo $p^{M'}$ liefert für ein genügend großes $M'$ keine mehrfachen Faktoren.

[28] Tatsächlich begann sein späterer Aufbau der Theorie mit der Einführung geeigneter Objekte, die es erlaubten zu beweisen, daß die Zerlegung einer ganzzahligen Gleichung in solche Faktoren eindeutig ist, vgl. hierzu vor allem seine in den Abschnitten 5.2 und 5.3 behandelte Vorlesung aus dem Sommersemester 1902.

[29] Hat man eine Entwicklung gegeben, so schneidet man sie an der betreffenden Stelle ab und reduziert alle Potenzen $\pi^c$ mit $c \geq d$ mit Hilfe der Gleichung $d$-ten Grades, die $\pi$ erfüllt. Hensel konstruierte einen von $M$ abhängigen algebraischen Hilfskörper, in dem der zugeordnete Eintrag liegt. Das läuft auf dasselbe hinaus.

modulo $p^M$ erlaubte es außerdem, bei der Modifikation nicht durch zu $p$ teilerfremde Zahlen zu teilen, sondern mit den entsprechenden Inversen modulo $p^M$ zu multiplizieren.[30] Dies ist entscheidend dafür, daß die Ganzheitseigenschaften an anderen Stellen (z.B $q$) durch dieses Verfahren nicht zerstört werden. Das so erhaltene System in Stufendreiecksform modifizierte Hensel weiter, bis es in jeder Spalte nur noch die obersten Einträge enthielt. Um zu einem Fundamentalsystem für die lokal ganzen algebraischen Zahlen zu gelangen, teilte Hensel die so erhaltenen Elemente noch durch die Potenz von $p$, die der ganzzahlige Koeffiziente der inzwischen einzigen nichtverschwindenden zugehörigen Entwicklung enthält.
Nimmt man jetzt die durch die Konjugationen bestimmten Zeilen wieder hinzu, so ist ein gegebenes System genau dann (lokal) ein Fundamentalsystem für irgendein Ideal,[31] wenn es modulo $p^M$ äquivalent zu einem geeigneten Blockdiagonalsystem ist, welches in sogenannte *Partialsysteme* zerfällt. Letzteres stellt jedoch spezifische Anforderungen: Ein Partialsystem ist ein lokales Fundamentalsystem eines Hilfskörpers, der einem Primdivisor von $p$ entspricht. Insbesondere kann man diese Bedingung nicht allein mit Hilfe der Spaltenteiler formulieren.
Die lokalen Modifikationen stören sich nicht gegenseitig, so daß man ein Fundamentalsystem für ein beliebiges Ideal aufstellen kann und durch lokale Betrachtung modulo endlich vieler Primzahlpotenzen prüfen kann, ob ein gegebenes System ein Fundamentalsystem für irgendein Ideal ist.

Hensel führte abschließend noch einen Verzweigungsdivisor ein, dessen Norm die Diskriminante ist und der beschreibt, welchen Anteil ein Primdivisor an der Diskriminante hat.[32] Damit läßt sich neben der Diskriminante des Zahlkörpers auch die Diskriminante eines Fundamentalsystems für ein Ideal berechnen. Er nutzte diesen Verzweigungsdivisor, um analog zum Fall der algebraischen Funktionen einer Variablen zu beschreiben, für welchen Divisor $\overline{D}$ das komplementäre System eines Fundamentalsystems für den Divisor $D$ ein Fundamentalsystem ist.

### 4.1.4 Kurze Zusammenfassung zu beiden Theorien

Es gibt einen entscheidenden Unterschied zwischen der Theorie der algebraischen Funktionen und der Theorie der algebraischen Zahlen. Während im Fall der algebraischen Funktionen die Vervollständigung nur äußerlich ist, weil man in endlich vielen Schritten ein System konstruieren kann, das ein Fundamentalsystem *ist* und dessen zugeordnete Matrix der Entwicklungen in unendlich vielen Schritten in eine Blockdiagonalmatrix überführt werden könnte, erhält man im Fall der algebraischen Zahlen ein System, das von dem benutzten Modul $p^M$ abhängig ist, und sowohl die Blockdiagonalgestalt, als auch die Eigenschaft, ein Fundamentalsystem zu sein, nur modulo $p^M$ hat. Der Punkt dabei ist, daß zu $p$ prime ganze Zahlen modulo $p^M$ invertierbar sind, diese Inversen aber von $M$ abhängen.(Allerdings kann man mit dem vorgestellten Verfahren durchaus überprüfen, ob ein gegebenes System ein Fundamentalsystem *ist*, denn es ist offenbar kein Problem, wenn das lokal äquivalente System an anderen Stellen nicht ganz ist.)

[30] Da diese Inversen von $M$ abhängig sind, treten hier implizit Folgen von Inversen modulo $p^M$ für steigendes $M$ bzw. $p$-adische Zahlen auf.
[31] Ein Ideal ist dabei wie im Fall der algebraischen Funktionen (und in Anlehnung an Dedekind) durch Teilbarkeitsforderungen bestimmt.
[32] Unverzweigte Primdivisoren kommen im Verzweigungsdivisor nicht vor, für zahm verzweigte ist der Beitrag $P^{d-1}$, wenn $p$ genau durch $P^d$ teilbar ist, und wild verzweigte tragen $P^{\overline{d}-1}$ mit $\overline{d} > d$, wobei $\overline{d}$ aus der Gleichung für $\pi$ berechnet wird.

Die Arbeit mit den Potenzreihenentwicklungen dient in beiden Theorien nicht der Bestimmung der Diskriminante. In der Theorie der algebraischen Funktionen werden die Reihenentwicklungen analytisch bestimmt und aus ihnen läßt sich die Verzweigung ablesen, aus der die Diskriminante unmittelbar folgt. Auch in der Theorie der algebraischen Zahlen müssen zuerst die Entwicklungselemente $\alpha_i$ und $\pi_j$ bestimmt werden, bevor man die Potenzreihen entwickeln aufstellen kann. Der $p$-Anteil der Diskriminante folgt dabei aus den Gleichungen, die für die verschiedenen Entwicklungselemente $\pi_j$ aufgestellt wurden. Der Vorteil der Potenzreihenentwicklungen ist daher wirklich, daß man Fundamentalsysteme einfacher konstruktiv erhalten kann und sich insbesondere überprüfen läßt, ob ein gegebenes System ein Fundamentalsystem für irgend ein Ideal ist.

Es ist nicht klar, wie eng Hensel den Bezug zwischen den Entwicklungen und den Konjugierten im Fall der algebraischen Zahlen tatsächlich dachte. Zu einem gegebenen Element kann man bereits $n$ Entwicklungen erhalten, wenn man Hensels Konstruktion bezüglich aller Primdivisoren durchführt. Umgekehrt erhält man ebenfalls $n$ Entwicklungen, wenn man zu jedem Konjugierten und einem festen Primdivisor (in der normalen Hülle) eine Entwicklung konstruiert.[33]
Hensel behauptete mindestens, man könne mit Hilfe der Entwicklungen den $p$-Anteil der Diskriminante berechnen. Für die Algorithmen sind die Reihenentwicklungen bzw. lokalen Konjugierten den ursprünglichen Elementen nur zugeordnet und zeigen an, wie mit diesen operiert werden soll. Das Rechnen mit den Reihenentwicklungen stellte für Hensel kein Problem dar.
Es gibt insgesamt drei Stellen in der Arbeit über die algebraischen Zahlen, an denen implizit $p$-adische Zahlen auftreten. Zum ersten bei der ganzzahligen Zerlegung der Minimalgleichung modulo $p^M$, dann als Inverse modulo $p^M$ für die Spaltenoperationen und schließlich haben die Koeffizienten diese Form, wenn man eine gegebene Reihenentwicklung als Linearkombination eines Fundamentalsystems schreibt.

## 4.2 Werbung für die neue Theorie

Hensel stellte seine neue Theorie der algebraischen Zahlen zuerst auf der vom 20.9. bis 25.9. 1897 stattfindenden DMV-Tagung in Braunschweig vor. Dedekind hatte ihn zu einem Vortrag eingeladen,[34] da die Zahlentheorie neben der Mechanik einer der geplanten thematischen Schwerpunkte der Tagung sein sollte. Der zusammenfassende Bericht konstatierte dann auch:

> [I]nsbesondere gelang es, die gesamte Mechanik und daneben bis zu einem gewissen Grade die Zahlentheorie in den Mittelpunkt der Verhandlungen zu stellen.[35]

Außer Hensel trugen Hilbert (über relativquadratische Zahlkörper) und Fricke (über die Beziehungen zwischen Zahlentheorie und Theorie der automorphen Funktionen) zu zahlentheoretischen Themen vor.[36]

[33] Hensel äußerte sich in dieser Arbeit nicht zu der Frage, ob eine konkrete Entwicklung auch allgemein zu einem festen Konjugierten gehört.
[34] Brief Hensels an Hurwitz vom 13.5.1897: “Kommen Sie nicht vielleicht dieses Mal nach Braunschweig? Ich gehe jedenfalls hin und will dort auch einen Vortrag halten, nachdem Dedekind mich in liebenswürdigster Weise dazu aufgefordert hat.”
[35] [DMV, 1899, 3].
[36] DMV, 1899, 4].

Hilberts ebenfalls 1897 erschienener *Zahlbericht* war zu diesem Zeitpunkt bereits ausgeliefert, denn Hensel hatte sich schon am 14.5.1897 für sein Exemplar bei Hilbert bedankt.[37]

Hensels Vortrag enthielt Analogien und Motivationen, er leitete die neu eingeführten Potenzreihen in der Zahlentheorie aber nicht her. Weniger als einen Monat danach schickte Hensel zwei kurze Noten an Hilbert zur Veröffentlichung in den Göttinger Nachrichten. Diese setzten in etwa die Ergebnisse des Vortrags voraus und benutzten sie zur Ableitung von zahlentheoretischen Resultaten. Neben vereinfachten Beweisen für bekannte Aussagen handelte es sich um die oben dargestellte Bestimmung der Diskriminante im wild verzweigten Fall.
Die abgedruckte Ausarbeitung des Vortrags sowie die beiden angesprochenen Noten sind Gegenstand dieses Abschnitts.

### 4.2.1 Äußerungen Hensels zur Situation 1897

Es gibt zwei Briefe Hensels, aus denen man entnehmen kann, wie Hensel seine Theorie und ihre Möglichkeiten in den Monaten nach der DMV-Tagung 1897 einschätzte.
Den ersten dieser Briefe schickte er mit den beiden kurzen Abhandlungen für die Göttinger Akademie am 19.10.1897 an Hilbert, der zweite beantwortete am 23.11.1897 eine Anfrage Webers, der etwas über Hensels Theorie für die zweite Auflage des zweiten Bandes seiner *Algebra erfahren wollte.*[38]

Der Brief an Hilbert beginnt mit einer Beschreibung der ersten Abhandlung [29, 1897]:

> Beifolgend sende ich Ihnen eine Notiz über die Bestimmung der Discriminante eines algebraischen Körpers, in welcher ich im ersten Abschnitt die Grundlagen meiner Auffassung der algebraischen Zahlen auseinandersetze, und diese im Weiteren zur vollständigen Bestimmung der Körperdiscriminante anwende. Ich habe mich doch sehr darüber gefreut, dass diese Methode eine so vollständige Lösung dieser Aufgabe ermöglicht, wie sie in dem letzten und auch in dem vorletzten Satze dieser Arbeit enthalten ist, und dieses unter Anwendung so einfacher Überlegungen.[39]

Anschließend beschrieb Hensel, daß er in den vergangenen drei Wochen auch weitere Aufgaben mit seiner Methode lösen konnte und die entsprechende Abhandlung [30, 1897] ebenfalls beilege. Eine mögliche Interpretation ist, daß Hensel bereits in Braunschweig mit Hilbert abgesprochen hatte, ihm eine kurze Note für die Göttinger Nachrichten und eine ausführliche Arbeit für die Mathematischen Annalen zu schicken, während jetzte eine weitere Note hinzukam:

> In den letzten 3 Wochen habe ich nun diese Methode auch auf die Frage der Äquivalenz der Discriminante der Fundamentalgleichung und der Körperdiscriminante, und auf die der gemeinsamen ausserwesentlichen Discriminantentheiler eines Körpers angewendet, zwei Fragen, deren vollständige Erledigung mir früher viel Mühe gemacht hat; und auch hier ging Alles so leicht, dass ich noch eine zweite kleine Note über diese beiden Aufgaben geschrieben habe, welche ich Ihnen ebenfalls beilege, mit der Bitte, auch sie, falls Ihnen dies möglich ist, in einer der nächsten Sitzungen möglichst bald vorlegen zu wollen.[40]

[37] Brief Hensels an Hilbert vom 14.5. 1897.
[38] Weber widmete Hensels Theorie eine ausführliche Fußnote, vgl. [Weber, 1899, 559].
[39] Brief Hensels an Hilbert vom 19.10.1897.
[40] Brief Hensels an Hilbert vom 19.10.1897.

Hensel begründete den Wunsch nach Veröffentlichung der sehr knappen Noten mit dem Wunsch, schnell etwas in der Hand zu halten, um die Nützlichkeit seiner Methode zu zeigen,[41] während er das Gefühl hatte, noch nicht den einfachsten Aufbau der dazugehörigen Theorie gefunden zu haben, so daß sich die Darstellung der Theorie, die schließlich in [41, 1902] erfolgte, noch verzögere:

> Sie würden mir durch die Erfüllung dieser Bitte einen großen Gefallen tun, denn es liegt mir viel daran möglichst bald einige Beispiele für die Anwendbarkeit dieser Methoden auszugeben. Die grössere Abhandlung für die Annalen liefere ich Ihnen dann bald nach, aber ich möchte die Ausführungen möglichst einfach machen, und warte daher noch etwas mit der Redaction.[42]

Weiterhin zeigt dieser Brief auch, daß Hensel Sellings Arbeit *Über die idealen Primfactoren der complexen Zahlen, welche aus den Wurzeln einer beliebigen irreductiblen Gleichung rational gebildet sind* [Selling, 1865] kannte. Er hielt diese aber nicht nur an entscheidenden Punkten für falsch, sondern sah auch die wesentlichen Punkte seiner Arbeit darin nicht angesprochen:

> Dort will ich auch noch ausführlicher auf die Selling'sche Arbeit eingehen, welche ich jetzt nochmals genau durchstudiert habe, was übrigens nicht leicht ist, denn sie ist grauenhaft geschrieben. Sie ist ausserdem abgesehen davon dass der Fall der Theilbarkeit von $d$ durch $p$ nicht erledigt werden konnte [wilde Verzweigung] direct unbrauchbar für meine Zwecke, denn weder die conjugirten Entwickelungen in der Umgebung der Verzweigungsstellen, noch auch die verbundenen[43] noch auch die Unabhängigkeit der übrigen Entwickelungen ergiebt sich aus seinen Ausführungen; dies <u>kann</u> sich auch gar nicht ergeben, solange er die Wurzeln von Congruenzen modulo $p$ einführt, denn dann sind jene Entwicklungen gar nicht verbunden bzw. conjugirt, sondern man <u>muss</u> dazu die Wurzeln von <u>Gleichungen</u> einführen, oder wenn Sie wollen die Wurzeln von Congruenzen für jede noch so hohe Potenz von $p$ als Modul. Ausserdem ist sie noch an wesentlichen Stellen unrichtig. Darüber schreibe ich aber noch genauer in jener Arbeit.[44]

Diese Stelle läßt (neben anderen) die plausible Interpretation zu, daß Hensel auch vor seinem Braunschweiger Vortrag von der Arbeit Sellings wußte, sich aber noch nicht genauer mit ihr auseinandergesetzt hatte. Hilbert (oder auch Dedekind) könnte ihn darauf hingewiesen haben, daß es deutliche konzeptionelle Ähnlichkeiten zwischen seiner Arbeit und der von Selling gebe. Sellings Arbeit wird im nächsten Abschnitt knapp vorgestellt.
Hilbert legte die beiden kurzen Arbeiten Hensels am 30.10. 1897 der Göttinger Akademie vor.

Am 23.11.1897 hatte Hensel bereits (wie gewünscht) Separatdrucke zur Verfügung, so daß er sie mit einem Begleitbrief an Weber schicken konnte. In diesem erläuterte er ihren Hintergrund, wodurch auch erste Reaktionen auf Hensels Theorie bekannt werden:

> Sie beziehen sich auf eine neue Auffassung der Theorie der idealen Zahlen, zu welcher ich nach vierjähriger Arbeit gekommen bin, und deren Grundzüge ich in Braunschweig in etwa der Weise angegeben habe, wie sie sich im ersten Paragraphen der ersten jener beiden Noten dargelegt finden. Zu meiner größten Freude hat sich Herr Dedekind damals in einem Nachwort zu jenem Vortrag dahin ausgesprochen, daß ihm diese Prinzipien eine Vereinfachung für die Theorie der algebraischen Zahlen zu ergeben schienen, und ebenso hat sich Herr Hermite geäußert, dem ich eine Darstellung jener Anschauungen schickte.[45]

Hensel wies darauf hin, daß seine Abhandlungen Aufgaben lösen, die auch in Webers Algebrabuch behandelt werden:

[41] Vermutlich auch mit Blick auf eventuelle Berufungschancen.
[42] Brief Hensels an Hilbert vom 19.10.1897.
[43] Dies sind die Stellen, deren Entwicklungen durch die Konjugation der Entwicklungskoeffizienten (im Unterschied zu den Entwicklungselementen $\pi^k$) zusammenhängen.
[44] Brief Hensels an Hilbert vom 19.10.1897.
[45] Brief Hensels an Weber vom 23.11. 1897.

> Ich habe nun jene Prinzipien in diesen beiden Noten auf einige Probleme der höheren Mathematik angewendet, welche sich auch in Ihrer Algebra behandelt finden, und es scheint mir, dass dieselben bei dieser Auffassung wesentlich einfacher gelöst werden (das erste, die Bestimmung der Körperdiskriminante, wird vollständig erst durch diese Behandlung gelöst, während vorher nur für den allgemeinen Fall die schöne Lösung des Herrn Dedekind vorhanden war.)[46]

Er erläuterte die Analogie zwischen Zahlentheorie und Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen und, daß aus ihr Aufgabenstellungen für die Zahlentheorie entstehen:[47]

> Ich habe mich aber schon seit längerer Zeit davon überzeugt, dass die ganze Auffassung der Entwickelbarkeit der algebraischen Zahlen modulo $p^M$ in Potenzreihen in der ganzen Theorie eine wesentliche Vereinfachung herbeiführt, weil hier die Teilbarkeit durch die idealen Primfaktoren vollständig durch das Verschwinden der bezüglichen Entwicklungskoeffizienten ersetzt wird. Dadurch wird aber die höhere Arithmetik vollständig das Abbild der Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen, und schon durch die Analogie mit dieser so viel weiter ausgestatteten Theorie wird man auf eine Menge Probleme geführt, deren Erledigung ebenfalls durch die Analogie sehr vereinfacht wird.[48]

Hensel bot an, Weber eine Herleitung seiner Ergebnisse aus der Idealtheorie zur Verfügung zu stellen, betonte aber gleichzeitig, daß er sie auch ganz ohne Idealtheorie ableiten könne:

> Ich weiß nun nicht, ob Sie geneigt wären von dieser Auffassung in ihrer Algebra Notiz zu nehmen. Sollte dies der Fall sein, so könnte ich Ihnen eine Herleitung jener Sätze von der Idealtheorie aus zur Verfügung stellen, bei welcher die Aufstellung der Sätze verhältnismäßig sehr einfach wird, und dann könnten die hier behandelten 3 Probleme sich sehr einfach anschließen. Ich habe aber auch eine andere Herleitung, welche die Idealtheorie gar nicht voraussetzt und jene Entwicklung durch einfache Erweiterung der Newton'schen Parallelogramme und der Bernoulli'schen Näherungsmethoden beweist: dann bedarf man eben der Theorie der Ideale oder der Formen gar nicht mehr und die ganze Theorie der algebraischen Zahlen wird wörtlich ebenso wie die Theorie der algebraischen Gebilde $f(x, y) = 0$.[49]

Er begründete seine neue Auffassung abschließend damit, daß er gewisse Fragen (z.B. die der wilden Verzweigung) nicht mit der Kroneckerschen Theorie bewältigen konnte:

> Ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mir mit einem Worte schreiben wollten, ob Ihnen diese Auffassung der Theorie der algebraischen Zahlen Berechtigung zu haben scheint oder nicht; ich habe mich zu ihr erst nach langem und gründlichem Studium der Ideal- und Formentheorie entschlossen, in Stunden, als ich sah, dass gewisse Fragen sowohl bei den Zahlen, als auch bei den algebraischen Funktionen von 2 und mehreren Variablen auch mit den Kronecker'schen Hilfsmitteln nicht gelöst werden konnten, oder doch auf für mich unüberwindliche Schwierigkeiten führten, während andererseits die Entwicklung nach Potenzen einer oder mehrerer irreduzibler Funktionen oder Zahlen in jedem derartigen Gebiete geht und sich wunderbar einfach gestaltet.[50]

### 4.2.2 Die Theorie Sellings

Es kann an dieser Stelle nicht darum gehen, Sellings Arbeit detailliert zu analysieren. Stattdessen soll nur seine grundsätzliche Herangehensweise geschildert werden. Die Darstellung beinhaltet jedoch die

[46] Brief Hensels an Weber vom 23.11.1897. Der "allgemeine Fall" steht dabei, wie damals noch üblich, im Gegensatz zu einem Sonderfall. Konkret bezeichnet er hier den Fall, in dem keine wilde Verzweigung auftritt.

[47] Diesen Mechanismus nutzte Hensel in seinen Arbeiten [39, 1901] zur Theorie der algebraischen Funktionen und [41, 1902] zur Zahlentheorie.

[48] Brief Hensels an Weber vom 23.11.1897.

[49] Brief Hensels an Weber vom 23.11.1897. Der Hinweis auf die Newtonschen Parallelogramme, läßt darauf schließen, daß Hensel diese Herleitung noch grundsätzlich änderte, vgl. Kapitel 5. Hensel sprach explizit von einer Erweiterung der Methode der Newtonschen Parallelogramme in seiner ausführlichen Darstellung der Theorie der algebraischen Funktionen zweier Variablen; für eine Erläuterung dieser Begrifflichkeit vgl. daher [38, 1900, 369]. Eine analoge Methode benutzte Hensel in seiner Herleitung der algebraischen Entwicklungselemente seiner Potenzreihen im zahlentheoretischen Fall, vgl. 4.4.2.

[50] Brief Hensels an Weber vom 23.11.1897. Es ist unklar, welche Fragen Hensel glaubte, für die algebraischen Funktionen von zwei und mehr Variablen gelöst zu haben.

Behauptung, daß die Hauptkritik in [Bourbaki, 1971, 121], wonach Sellings "Unverfrorenheit" ja "nur zu Unsinn führen konnte", auf einem Mißverständnis beruht.

### Ausgangssituation und Darstellung der Idee im einfachsten Fall

Selling ging (anders als Hensel) von der Gleichung $R_n = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ aus, in der $a_0$ nicht Eins sein muß.[51] Er betrachtete die normale Erweiterung $m$-ten Grades, die alle Wurzeln der Gleichung enthält. Diese konstruierte er zunächst durch schrittweise Reduktion von Gleichungen.[52]

In Anlehnung an Galois (bezogen auf Serrets Darstellung) führte Selling das "Symbol $j$" als eine "imaginäre Congruenzwurzel" von $\Phi(x) \equiv 0(\bmod p)$ ein.[53] Er erläuterte dann:

> Eine Congruenz $f(j) \equiv 0(\bmod p)$ soll dann lediglich ein abkürzender Ausdruck für $f(x) \equiv \Phi(x)\, F(x)(\bmod p)$ sein, wo $f(x)$ und $F(x)$ ganze ganzzahlige Functionen der willkürlich Veränderlichen $x$ darstellen.[54]

Aus dieser Passage geht eindeutig hervor, daß $j$ in Ausdrücken $f(j)$ nicht als Element eines endlichen Körpers im heutigen Sinn aufgefaßt wird.[55] Selling benutzte eine verkürzte Sprechweise, denn er schrieb, er wolle von Funktionen von $j$

> wie von gewöhnlichen Zahlen sprechen, so oft nur Eigenschaften derselben in Betracht kommen, welche sie nach dem Obigen mit gewöhnlichen Zahlen gemein haben.[56]

Sellings Idee war es, statt der definierenden Gleichung $R_n(x) = 0$ die Kongruenz $R_n(x) \equiv 0 \bmod p^M$ zu betrachten. Dann wollte er für ein genügend großes $M$ insgesamt $n$ Kongruenzwurzeln $r_i$ konstruieren und mit ihrer Hilfe die Teilbarkeit durch die Primdivisoren von $p$ definieren.

Zunächst mußte Selling aus den Kongruenzwurzeln der Gleichung eine 'lokale' Entsprechung der Konjugierten konstruieren. Sind $\varrho_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ die Gleichungswurzeln so besteht der betrachtete Körper aus rationalen Funktionen $x$ der $\varrho_i$. Zu einem solchen $x$ erhält man $m$ Konjugierte $x_j$.[57] Analog erhält man $m$ Ausdrücke $y_j$ in den Kongruenzwurzeln $r_i$, wenn man die $r_i$ statt der $\varrho_i$ in $x_j$ einsetzt.

Jedem lokalen Konjugierten $y_i$ entspricht ein Primdivisor $\wp$ von $p$. (Induzieren zwei lokale Konjugierte die gleichen Teilbarkeitsausagen, so entspricht ihnen der gleiche Primdivisor.) Jedem Primdivisor $\wp$ ist eine (gebrochene) Potenz von $p$ zugeordnet. Jedes $y_i$ ist durch eine (gebrochene) Potenz von $p$ genau teilbar. Daher kann man ablesen, durch welche Potenz des Primdivisors die betrachtete Funktion $x$ teilbar ist. Genauer:

Will man wissen, durch welche Potenz von $\wp$ das Element $x$ teilbar ist, so berechnet man zuerst ein zu $\wp$ gehöriges $y_k$ (also eine rationale Funktion der Kongruenzwurzeln $r_i$). Anschließend sucht man die zu $\wp$ gehörige Potenz von $p$ heraus. Sei diese $p^{\frac{r}{s}}$. Dann sichert Sellings Theorie, daß $y_k$ genau durch $p^{\frac{rt}{s}}$ (für ein $t \in \mathbb{N}$) teilbar ist. Damit ist $x$ genau durch $\wp^t$ teilbar ist.[58]

---

[51] Die $a_i$ sind ganz und haben keinen gemeinsamen Teiler, [Selling, 1865, 17].
[52] [Selling, 1865, 21].
[53] Beide [Selling, 1865, 23].
[54] [Selling, 1865, 23].
[55] Insbesondere heißt das, daß eine Summe, die modulo $p$ verschwindet, im nächsten Schritt modulo $p^2$ untersucht werden kann. Die Darstellung von [Bourbaki, 1971, 121] geht hingegen davon aus, daß Selling in $F_q$ arbeitet.
[56] [Selling, 1865, 32].
[57] Selling hatte zuvor bestimmt, welche $m$ Permutationen der Wurzeln auf die Konjugierten führen, d.h. in etwas aktualisierter Sprechweise zur Galoisgruppe gehören.
[58] Bezeichnungen dieses Überblicks B.P.

Der einfachste Fall ist der, in dem $p$ nicht in der Diskriminante der definierenden Gleichung enthalten ist. In diesem erhielt Selling jeweils eine lineare Kongruenz, um die nächsthöhere Kongruenz zu erfüllen, d.h. aus einer Kongruenzwurzel $r^{(\mu-1)}$ von $R_n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p^{\mu-1})$ eine Kongruenzwurzel $r^{(\mu)} = r^{(\mu-1)} + p^{\mu-1}y$ von $R_n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p^{\mu})$ zu bestimmen.[59]
Dann werden für den Test, ob $x$ durch $\wp^{\mu}$ teilbar ist, in die $\wp$ zugeordnete rationale Funktion $y_k = F(r_1, \ldots, r_n)$ statt $r_i$ die Näherungswerte $r_i^{(\mu)}$ eingesetzt. Geprüft wird, ob das so erhaltene Ergebnis durch $p^{\mu}$ teilbar ist.

Selling untersuchte anschließend, ob sich Elemente konstruieren lassen, die vorgegebene Teilbarkeitseigenschaften haben. Weiter prüfte er, ob sich sogar vorgegebene Näherungswerte für $y_k$ erreichen lassen.[60].
Selling erläuterte, seine lokale Betrachtungsweise erlaube die Benutzung der "Methode des größten gemeinsamen Teilers":

> Der Grundgedanke bei der Einführung der idealen Primfactoren besteht darin, die complexen Zahlen nicht im Ganzen, sondern getrennt in Beziehung auf die einzelnen gewöhnlichen Primzahlen zu untersuchen, da sich in Bezug auf die einzelnen Primzahlen die Functionen der Gleichungswurzeln durch Functionen von Congruenzwurzeln ersetzen lassen, welche die zur Zerlegung in Primfactoren nöthigen Eigenschaften besitzen, da sich die Methode des größten gemeinsamen Divisors auf sie anwenden läßt.[61]

Der von Selling definierte Begriff der *ganzen komplexen Zahl in Bezug auf die Primzahl $p$* bedeutet, daß die Zahl nicht genau durch eine negative Potenz eines Primdivisors von $p$ teilbar ist. In diesem einfachen Fall ist dies äquivalent dazu, daß die Koeffizienten der Zahl $x$ die Primzahl $p$ nicht im Nenner enthalten.[62]

### Konstruktion der Wurzeln im allgemeinen Fall

Im zweiten Fall ist $p$ in der Diskriminante von $R_n$ enthalten, aber $a_0$ nicht durch $p$ teilbar. Dann kann o.E. $a_0 = 1$ angenommen werden. Selling begann seine Untersuchung damit, für ein beliebiges $\mu \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung $R_n \equiv BP(\mathrm{mod}\ p^{\mu})$ zu konstruieren, wobei $B$ eine Fortsetzung eines Faktors $B_1$ ist, der eine mehrfache Kongruenzwurzel modulo $p$ von $R_n$ beschreibt: Es ist also $B \equiv B_1 + pB_2 + \ldots (\mathrm{mod}\ p^{\mu})$ und $B_1 \equiv \left(x - r_1^{(1)}\right)^{\beta} (\mathrm{mod}\ p)$.[63] Benötigt man die Wurzeln von $R_n$ bis zur $\mu$-ten Stelle, so müssen aufgrund der angegebenen Zerlegung in diesem Fall die Berechnungen modulo $p^K$ für ein geeignetes $K > \mu$ durchgeführt werden.[64]
Aus dem so erhaltenen Faktor $B$ leitete Selling ab, welche Gestalt die weiteren Glieder der $\beta$ Kongruenzwurzeln $r_1^{(1)}$ haben können. Dazu setzte er $x = r_1^{(1)} + y$ und bestimmte eine Kongruenz $\beta$-ten Grades modulo $p^{\mu}$ für $y$:

$$B \equiv y^{\beta} + b_1 y^{\beta-1} + \cdots + b_{\beta}(\mathrm{mod}\ p^{\mu}).$$

Nachdem Selling die Exponenten $k_h$ so einführte, daß $b_h$ genau durch $p^{k_h}$ teilbar ist, ergibt sich eine Fallunterscheidung, je nachdem ob für jedes $h$ gilt: $\frac{k_h}{h} \geq 1$.

[59] [Selling, 1865, 26]. Er bezeichnete die Primzahl in diesem Fall mit $q$, was hier nicht übernommen wurde.
[60] Näherungswert bedeutet, daß der Wert nur modulo eines gegebenen $p^{\mu}$ übereinstimmen muß, [Selling, 1865, 27f].
[61] [Selling, 1865, 31]. Selling gab also durchaus ein (wenn auch sehr implizites) Argument, warum er zu Primdivisoren gelangt.
[62] [Selling, 1865, 31].
[63] Vgl. [Selling, 1865, 33]. Beim Übergang vom Modul $\mu - 1$ zum Modul $\mu$ wird dabei der 'Rest' $M$ (bestimmt durch $R_n - BP = p^{\mu-1}M$) mit Hilfe der teilerfremden Anfangsglieder $B_1$ und $P_1$ modulo $p$ dargestellt: $M \equiv B_1 P_{\mu} + P_1 B_{\mu} (\mathrm{mod}\ p)$.
[64] Vgl. [Selling, 1865, 33] und [Selling, 1865, 37].

Ist dies der Fall, so kann man $y = pz$ einsetzen, das nächste Glied erhält also die Gestalt $r_1^{(2)} = r_1^{(1)} + pR_2$. Dividiert man die nach dem Einsetzen erhaltene Kongruenz $B_1(z)$ durch $p^\beta$, so erhält man eine Kongruenz $B'(z)$ modulo $p^{\mu-\beta}$. Besitzt auch $B'$ modulo $p$ noch mehrfache Wurzeln, so muß der Prozeß fortgesetzt werden. Sonst kann man (wie im einfachsten Fall) die Wurzeln von $B'$ so weit wie benötigt berechnen und aus diesen die Wurzeln von $B$ bestimmen.

Ist hingegen $c := \min \frac{k_h}{h} < 1$, so ist $y$ nicht durch $p$ teilbar. Selling führte in diesem Fall eine geeignete $\gamma$-te Kongruenzwurzel von $p$ modulo $p^\mu$ ein: Sei dazu $i$ maximal mit $\frac{k_i}{i} = c$, $\delta := \mathrm{ggT}(k_i, i)$, $\gamma := \frac{i}{\delta}$ und $\kappa = \frac{k_i}{\delta}$. Dann führte er eine Wurzel von $y^\gamma \equiv p \,(\mathrm{mod}\ p^\mu)$ ein und behauptete, man könne als solche "eine algebraische $\gamma$-te Wurzel aus $p$ ansehen."[65]

Das weitere Verfahren soll hier nur ganz grob geschildert werden. Die obigen Berechnungen bedeuten, daß das zu bestimmende $y$ genau durch $p^{\frac{\kappa}{\gamma}}$ teilbar. Durch Einsetzen von $y = z \cdot \sqrt[\gamma]{p^\kappa}$ erhält man daher wiederum eine Kongruenz für $z$. Aus dieser leitete Selling eine Hilfskongruenz $B' \equiv 0$ modulo $p$ ab. Hat diese Hilfskongruenz keine mehrfachen Wurzeln, so kann man ihre Wurzeln zu den gesuchten Werten für $y$ verlängern.
Anderenfalls nutzte Selling die mehrfachen Wurzeln von $B'$, um $B$ weiter zu zerlegen usw.[66]
Hierbei tritt der Fall auf, der der wilden Verzweigung entspricht: Ist $\gamma$ durch $p$ teilbar, so muß die betrachtete Hilfskongruenz $B'$ mehrfache Wurzeln haben.[67] Daher setzte Selling $\gamma = \gamma' \cdot p^\alpha$, wobei $\gamma'$ nicht durch $p$ teilbar ist. Anschließend benutzte er Zerlegungen, in deren Koeffizienten nur $\gamma'$-te Wurzeln von $p$ vorkommen.[68] Die in seinem Zerlegungsprozeß auftretenden Kongruenzen, die auf $p^\alpha$-te Wurzeln aus $p$ führen würden, behielt er als Objekte bei und ordnete ihnen symbolische Wurzeln zu.
Zusammenfassend erhält man in jedem Schritt entweder 1) Kongruenzwurzeln von $B$ und einen Faktor, der den Rest beschreibt, oder 2) eine feinere Zerlegung.
Der Zerlegungsprozeß kommt zu einem Abschluß und man erhält Kongruenzwurzeln $r_i$, die die folgenden Typen von Bestandteilen enthalten können: eine imaginäre Kongruenzwurzel $j$, eine Wurzel $\sqrt[s]{p}$ aus $p$, sowie Wurzeln $v_i$ für jede der nicht weiter behandelbaren Kongruenzen $p^\alpha$-ten Grades, in deren Koeffizienten i.A. $\sqrt[s]{p}$ vorkommt.[69]

Um auf den Kongruenzwurzeln eine Konjugation zur Verfügung zu haben, konstruierte Selling $s$-te Einheitswurzeln modulo $p^\mu$, mit denen er $\sqrt[s]{p}$ multiplizierte. Bezeichne $\Theta$ den minimalen Grad der für die $r_i$ (i.A. ohne die Einheitswurzeln) benötigten imaginären Kongruenzwurzeln. Weiter seien die je $\sigma$ der $m$ Konjugationen zusammengruppiert, die nur Vertauschungen der (nicht unterscheidbaren) Wurzeln $v_i$ entsprechen.
Nach diesen Vorbereitungen argumentierte Selling, daß man die Koeffizienten der Wurzeln $r_i$ in der ra-

[65] [Selling, 1865, 34].
[66] Die Zerlegung hat dann die Gestalt $B \equiv \sqrt[\gamma]{p^{\beta\kappa}} \cdot C \cdot D (\mathrm{mod}\ p^\mu)$, wobei $C = C_1 + C_2 \sqrt[\gamma]{p} + \cdots + C_\nu \sqrt[\gamma]{p^{\nu-1}}$ mit $C_1 \equiv (z - z_1)^\lambda (\mathrm{mod}\ p)$, dabei ist $\nu = \gamma\mu - \beta\kappa$, [Selling, 1865, 34].
[67] [Selling, 1865, 35].
[68] Wobei diese Zerlegung "nach einer Potenz von $\sqrt[\gamma']{p}$ als Modul völlig analog der Zerlegung der Congruenz $B \equiv 0$ nach einer Potenz von $p$ als Modul ausgeführt werden kann," [Selling, 1865, 36].
[69] [Selling, 1865, 36].

tionalen Funktion $f$ so bestimmen kann, daß die $m$ Konjugierten vorgegebene Werte annehmen, solange die letzteren mit der Konjugationsstruktur der Wurzeln verträglich sind.[70]

### Die Definition der Primdivisoren

Für die Definition der Primdivisoren untersuchte Selling, durch welche minimale (positive, gegebenenfalls gebrochene) Potenz von $p$ ein aus den Wurzelbestandteilen rational gebildeter Ausdruck teilbar sein kann. Dazu muß zunächst den Wurzeln $v_i$, die einer Gleichung des Grades $p^\alpha$ mit genau durch $\sqrt[s]{p^\kappa}$ teilbarem Absolutglied genügen, ein Anfangsglied zugeordnet werden.[71] Mit einem Rückblick auf sein Zerlegungsverfahren begründete Selling, daß dieses Anfangsglied genau durch $p^{\frac{\kappa}{s \cdot p^\alpha}}$ teilbar ist:

> Denn würde diese Congruenz beim Versuch einer der früheren analogen Auflösung nicht zu einem solchen Anfangsglied für ihre Wurzeln führen, so müsste sie nach dem Früheren in Factoren niedrigerer Grade zerlegbar sein.[72]

Weiter betrachtete Selling symmetrische Produkte von je $\sigma$ Ausdrücken, die sich nur durch Permutation der $v_i$ unterscheiden. Hat ein solches den Exponenten $\frac{\lambda}{s}$, so ordnete er jedem der Faktoren den Exponenten $\frac{\lambda}{\sigma s}$ zu.
Konkret fragte Selling daher nach dem minimal möglichen Wert $\delta$, wenn der betrachtete Ausdruck genau durch $p^{\frac{\delta}{\sigma s}}$ teilbar ist. Dann ist $\delta$ ein Teiler von $\sigma$, da man sonst "zwei ganze Zahlen $h$ und $k$ finden könnte, durch welche $\frac{h\delta}{\sigma s} - \frac{k}{s} < \frac{\delta}{\sigma s}$ werden würde."[73]

Setzt man die verschiedenen $r_i$ für die $\varrho_i$ in $x = f(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$ ein, so läßt sich das erste Glied in der Form $g \cdot \sqrt[\sigma s]{p^{\delta\nu}}$ mit zu $p$ primem $g$ und *ganzem* $\nu$ schreiben.[74]
Zu einem gegebenen $x$ bestimmte Selling für alle $m$ Konjugationen das jeweilige $\nu$. Die $m$ Konjugationen zerfallen i.A. in Gruppen, so daß die Konjugationen einer solchen Gruppe für jedes $x$ auf das gleiche $\nu$ führen.[75] Jeder solchen Gruppe ordnete Selling einen Primdivisor zu, wobei die Zahl $x$ genau durch die $\nu$-te Potenz dieses Primdivisors teilbar ist.
Sind die Zahlen $\nu$, die man nach Anwendung der $m$ Konjugationen auf diese Weise erhält, alle positiv,

> so soll die complexe Zahl $f(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ eine ganze complexe Zahl in Bezug auf auf die Primzahl $p$ genannt werden, auch wenn von den Coefficienten derselben einige $p$ im Nenner als Factor enthalten.[76]

Ist $a_0$ durch $p$ teilbar, so läßt sich das Vorgehen übertragen, allerdings können dann im Allgemeinen auch ganze ganzzahlige Funktionen der Wurzeln gebrochen in Bezug auf $p$ sein.

Selling entwickelte eine ausführliche Theorie der so eingeführten Primdivisoren, in der diese auch in negativen Potenzen auftreten können. Er beschäftigte sich mit der Frage, welche Kongruenzensysteme zu

[70] Die Auflösung erfordere jedoch die Zulassung von Potenzen von $p$ im Nenner, da die Gleichungen noch mit Potenzen von $p$ multipliziert sein können, [Selling, 1865, 39].
[71] Die Wurzel wird dabei nach "steigenden gebrochenen Exponenten geordnet" gedacht, [Selling, 1865, 40].
[72] [Selling, 1865, 40].
[73] [Selling, 1865, 40]. Wäre $c := \mathrm{ggT}(\delta, \sigma) < \delta$, so gäbe es eine Darstellung $h\delta - k\sigma = c < \delta$. Teilt man diese durch $s$, erhält man die von Selling angebene Gleichung. Aus ihr erhält man eine Vorschrift, wie man ein Element mit geringerem Exponenten konstruieren könnte, im Widerspruch zur Annahme.
[74] Das Argument für die Ganzheit von $\nu$ führte Selling nicht aus, es ist aber analog zu obigem: Hätte das erste Glied die Gestalt $g \cdot \sqrt[\sigma s]{p^C}$, wobei $\delta$ den Exponenten $C$ nicht teilt, so könnte wieder $c := \mathrm{ggT}(\delta, C) < \delta$ in der Form $c = k\delta + hC$ dargestellt werden, im Widerspruch zur Minimalität von $\delta$.
[75] Eine solche Gruppe besteht aus $\sigma s\Theta$ Konjugationen.
[76] [Selling, 1865, 40].

lösen sind, um vorgegebene Teilbarkeiten zu erreichen und schloß insbesondere mit dem Resultat, daß die Norm der von ihm konstruierten Zahlen nur um eine Konstante (die von den Forderungen abhängt) größer ist als die minimal mögliche.

Sellings Behandlung des galoisschen Falles ohne die Betrachtung eines erzeugenden Elements verleiht seinen Ergebnissen ein ungewohntes Aussehen. Trotzdem lassen sich die folgenden Berührungspunkte zu Hensels Theorie erkennen: Die Teilbarkeit läßt sich anhand von lokalen Darstellungen bestimmen, den verschiedenen Primdivisoren entsprechen die verschiedenen Konjugierten.
Weniger inhaltlich als vielmehr technisch ähnlich zu späteren Argumenten Hensels sind die Beweise dafür, daß der minimale Exponent von $p$ ein Bruch mit Zähler Eins ist, und daß überhaupt nur ganze Vielfache dieses Exponenten auftreten können.[77]

### 4.2.3 Der Vortrag

Hensels Vortrag wurde unter dem Titel *Über eine neue Theorie der algebraischen Zahlen* im entsprechenden Jahrsbericht der DMV veröffentlich, also nach der damals üblichen Verzögerung 1899.[78]
In seinem Vortrag führte Hensel erstmals Potenzreihenentwicklungen in die Theorie der algebraischen Zahlen ein. (Den Zusammenhang zur Idealtheorie skizzierte er hingegen nur knapp). Er versuchte dabei, die Analogie zu den Potenzreihenentwicklungen in der Theorie der algebraischen Funktionen so anschaulich und greifbar wie möglich zu machen. Seine rhetorische Strategie hierfür war, zunächst die Form der Entwicklungen als der der Entwicklungen in der Theorie der algebraischen Funktionen genau entsprechend darzustellen, und zwar sowohl im unverzweigten Fall als auch im Verzweigungsfall. Erst dann wies er auf die Unterschiede hin, die er zunächst übergangen hatte.[79]

Hensel begann seinen Text mit einer Formulierung, die suggeriert, es sei naheliegend gewesen, in der Zahlentheorie nach einem Analogon zu den Potenzreihenentwicklungen in der Theorie der algebraischen Funktionen zu suchen:

> Die Analogie zwischen den Resultaten der Theorie der algebraischen Functionen einer Variabeln und der der algebraischen Zahlen hat mir schon seit mehreren Jahren den Gedanken nahe gelegt, die Zerlegung der algebraischen Zahlen mit Hülfe der idealen Primfactoren durch eine einfachere Behandlungsweise zu ersetzen, welche der Entwickelung der algebraischen Functionen in Potenzreihen für die Umgebung einer beliebigen Stelle völlig entspricht.[80]

Der lokalen Betrachtung entspricht dabei die Betrachtung einer Kongruenz modulo $p^M$ und die Grundlage der Theorie bildet daher ein Satz, der die Existenz von genügend Kongruenzwurzeln sichert. Erfülle dazu $x$ eine irreduzible ganzzahlige Gleichung $n$-ten Grades, sei $X = \varphi(x)$ eine rationale Funktion von $x$ und $F(X) = 0$ die Gleichung $n$-ten Grades, der $X$ genügt:

> Die Congruenz: $F(X) \equiv 0 \pmod{p^M}$ besitzt genau so viele Wurzeln, als ihr Grad angiebt, wie groß auch der Exponent $M$ angenommen werde, und jene $n$ Congruenzwurzeln $X_1, X_2, \ldots, X_n$ können stets in Potenzreihen

[77] Für Hensels Nutzung dieser Argumente vgl. 5.2.3 und 5.5.2. Es scheint, als habe Hensel seine Herangehensweise nach einer ausführlichen Lektüre der Arbeit Sellings verändert.
[78] Es handelt sich um [34, 1899].
[79] Man könnte sogar behaupten, durch die Wahl der Bezeichnungen habe Hensel die Unterschiede bewußt verwischt.
[80] [34, 1899, 83f].

entwickelt werden, welche nach steigenden Potenzen von $p$ fortschreiten und höchstens eine endliche Anzahl von Anfangsgliedern mit negativen Exponenten besitzen.[81]

Hensel behauptete "im Allgemeinen" würden diese Entwicklungen nach ganzzahligen Potenzen von $p$ fortschreiten und notierte sie in der Form:[82]

$$X = \frac{A_{-h}}{p^h} + \dots + \frac{A_{-1}}{p} + A_0 + A_1 p + \dots;$$

für diese Zahlen erhält man also genau dieselben Entwickelungen wie für eine algebraische Function in der Umgebung einer regulären Stelle.[83]

Ausnahmen bilden die Teiler der Körperdiskriminante. Hensel erläuterte, dies seien im wesentlichen die Primzahlen, die in den Diskriminanten aller Gleichungen $F(X) = 0$ enthalten sind.[84] Für diese Ausnahmeprimzahlen entwickelte Hensel nach einer neuen Entwicklungszahl $\pi_1$, beschrieb letztere aber ebenso wie die Zyklen konjugierter Entwicklungen in direkter Analogie zu den Verzweigungspunkten in der Theorie der algebraischen Funktionen:

Für diese Zahlen schreiten nämlich jene Entwickelungen, genau wie in der Umgebung eines Verzweigungspunktes eines algebraischen Gebildes, nicht nach ganzzahligen, sondern nach Potenzen von $p$ mit rational gebrochenen Exponenten fort. Ist nämlich $\pi_1 = \sqrt[d]{p}$ eine richtig gewählte $d^{\text{te}}$ Wurzel aus $p$, so erhält man für eine jener Wurzeln, etwa für $X_1$, eine Entwickelung der folgenden Art:

$$X_1 = \frac{A_{-h}}{\pi_1^h} + \dots + \frac{A_{-1}}{\pi_1} + A_0 + A_1 \pi_1 + \dots$$

Sind ferner $\pi_2, \dots, \pi_d$ die zu $\pi_1$ konjugierten $d^{\text{ten}}$ Wurzeln aus $p$, so stimmen die $d$ conjugirten Entwickelungen:

$$X_i = \frac{A_{-h}}{\pi_i^h} + \dots + \frac{A_{-1}}{\pi_i} + A_0 + A_1 \pi_i + \dots, (i = 1, 2, \dots d)$$

genau mit $d$ von den $n$ conjugirten Wurzeln von $F(X) \equiv 0$ überein; jene $d$ Entwickelungen hängen hier also genau in derselben Weise zusammen, wie die $d$ Zweige einer algebraischen Function in der Umgebung eines Verzweigungspunktes $V_d$ von der $(d-1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Es sollen daher diese Primzahlen Verzweigungszahlen genannt werden.[85]

Nachdem die Resultate als "wörtlich übereinstimmend" vorgestellt wurden, kam Hensel zu den Unterschieden in der Bedeutung, d.h. zu zwei Bemerkungen, "durch welche sich die höhere Arithmetik principiell von jener anderen Theorie unterscheidet:"[86]

Die Koeffizienten $A_i$ der Wurzel $X_1$ sind nicht beliebige reelle Zahlen, sondern sie gehören "ganz bestimmten einfachen algebraischen Körpern an"[87] und haben die Form $A = a_0 + a_1\alpha_1 + \dots + a_{k-1}\alpha_1^{k-1}$, wobei $\alpha_1$ eine der Wurzeln einer auch modulo $p$ irreduziblen Gleichung $k$-ten Grades ist und die $a_i$ die Werte $0, 1, \dots, p-1$ annehmen können.

Die $k$ Entwicklungen, die sich ergeben, wenn man $\alpha_1$ durch eine der konjugierten Wurzeln der angesprochenen Gleichung $k$-ten Grades ersetzt, sind dann zu bestimmten der $n$ konjugierten Wurzeln $X_i$

[81] [34, 1899, 84].

[82] [34, 1899, 84]. "[Im] Allgemeinen" bedeutete für Hensel in dieser Arbeit stets: wenn nicht ein bestimmter Spezialfall eintritt. Diese Verwendung war zu Hensels Zeit nicht ungewöhnlich. Sie wird in diesem Abschnitt generell verwendet, auch wenn Hensels Text nicht wörtlich zitiert wird.

[83] [34, 1899, 84]. Die Bedeutung der Zeichen $A_i$ überging Hensel dabei zunächst.

[84] [34, 1899, 84]. Offenbar wollte Hensel auch Zuhörer erreichen, die mit der Theorie der algebraischen Zahlen nicht vertraut sind. Auf die Existenz gemeinsamer außerwesentlicher Diskriminantenteiler, die diese Bedingung erfüllen, aber nicht in der Diskriminante enthalten sind, wies er in einer Fußnote hin.

[85] [84, 1899, 85].

[86] Beide [34, 1899, 85].

[87] [34, 1899, 85].

kongruent und diese heißen "verbundene Wurzeln".[88]

Um den zweiten Unterschied zu veranschaulichen, übertrieb Hensel zunächst geringfügig die Parallelität zur Theorie der algebraischen Funktionen im allgemeinen Fall. Er behauptete nämlich, die $\pi_i$ seien im Allgemeinen die Wurzeln der Gleichung $\pi^d - p = 0$ und würden sich daher nur um Potenzen der Kreisteilungseinheit $\omega = \cos\frac{2\pi}{d} + i\sin\frac{2\pi}{d}$ unterscheiden.[89] Tatsächlich ist $\pi$ hier aber Wurzel einer Gleichung $\pi^d - \varepsilon p = 0$, wobei $\varepsilon$ eine geeignete Einheit modulo $p$ ist. Hensel wies darauf in einer Fußnote folgendermaßen hin:

> In Wahrheit lauten jene reinen Gleichungen $\psi(\pi) = \pi^d - \varepsilon p = 0$, wo $\varepsilon$ eine bestimmte, durch $p$ nicht teilbare Zahl des Körpers $K(\alpha_1)$ ist. Da dieselbe für alle hier zu ziehenden Folgerungen unwesentlich ist, wurde für diese kurze Darstellung der Theorie von ihr abgesehen.[90]

Der Ausnahmefall ist der, in dem "die Anzahl $d$ der für einen Verzweigungspunkt konjugierten Wurzeln durch die betrachtete Primzahl $p$ teilbar ist," der Fall der wilden Verzweigung.[91] Dieser Fall kann nur für die Teiler der Körperdiskriminante auftreten, die kleiner oder gleich $n$ sind. Hensel hob als Rechtfertigung seiner Theorie hervor, daß dieser spezielle Fall in ihr keine Sonderbehandlung erfordere:

> Indessen haben gerade diese Zahlen der Wissenschaft große und bisher noch nicht überwundene Schwierigkeiten bereitet, und der Umstand, daß auch hier die Entwickelungen der Wurzeln im wesentlichen dieselben sind, wie für die gewöhnlichen Verzweigungspunkte, daß also jene Schwierigkeiten hier überhaupt nicht auftreten, scheint mir ein Beweis für die Berechtigung und Notwendigkeit dieser Theorie zu sein.[92]

In diesem Fall seien die konjugierten Wurzeln $\pi_i$ nämlich ebenfalls die Wurzeln einer Gleichung $d$-ten Grades, und sie unterschieden sich von $\sqrt[d]{p}$ nur um eine "Einheit für $p$".[93] Die angesprochene Gleichung hat die Gestalt $\pi^d + p\varepsilon_{d-1}\pi^{d-1} + \cdots + p\varepsilon_0 = 0$, d.h. alle Koeffizienten sind durch $p$ teilbar. Die $\varepsilon_i$ sind dabei ganze Zahlen in $K(\alpha_1)$ und $\varepsilon_0$ ist nicht durch $p$ teilbar.[94] Hensel nannte den Verzweigungspunkt erster Art, wenn $\pi$ einer reinen Gleichung genügt und zweiter Art sonst.

Zum Abschluß behauptete Hensel, man könne diese Ergebnisse "mit sehr einfachen Hülfsmitteln und völlig unabhängig von der Theorie der Ideale" begründen und dies solle "in einer demnächst in den 'Mathematischen Annalen' erscheinenden Abhandlung dargelegt werden."[95] Um darzustellen, wie seine Theorie der Idealtheorie entspricht, ordnete er jeder der $n$ Entwicklungen $X_i$ von $X$ "genau wie in der Theorie der algebraischen Functionen je eine Stelle $(p, x_1), \ldots, (p, x_n)$ des zugehörigen algebraischen Zahlengebildes" zu.[96] Sagt man dann, $X$ besitze an der Stelle $(p, x_i)$ eine $\varrho$-fache Nullstelle, wenn die entsprechende Entwicklung mit $A_\varrho \pi^\varrho$ beginnt, und einen $\varrho$-fachen Pol, wenn sie mit $A_{-\varrho}\pi^{-\varrho}$ beginnt, dann ist einem idealen Primteiler $P$ von $p$

[88] [34, 1899, 86].

[89] Darin läge eine genaue Entsprechung zur Theorie der algebraischen Funktionen, in der die Entwicklungen nach $\omega^i(x-a)^{\frac{1}{d}}$ fortschreiten.

[90] [34, 1899, 86]. Vermutlich handelt es sich hierbei um eine Ergänzung für den Abdruck.

[91] [34, 1899, 86].

[92] [34, 1899, 86].

[93] [34, 1899, 87].

[94] Dann ist $\varepsilon_0$ nach der Konstruktion von $\alpha_1$ auch nicht durch eine positive gebrochene Potenz von $p$ teilbar. Da $\varepsilon_0$ die Norm von $\omega = \frac{\pi}{\sqrt[d]{p}}$ ist, ist $\omega$ wie behauptet eine Einheit für $p$.

[95] [34, 1899, 87].

[96] [34, 1899,87].

eine Stelle $(p, x_i)$ in der Weise zugeordnet, daß eine algebraische Zahl $X$ dann und nur dann durch $P^\varrho$ teilbar ist, wenn $X$ an der zugehörigen Stelle eine $\varrho$fache Nullstelle hat, und daß sie $P^{-\varrho}$ enthält, wenn $X$ dort einen $\varrho$fachen Pol besitzt. Der Primteiler ist dann vom Grade $k$ (d.h. es ist $\mathrm{Nm}(P) = p^k$), wenn zu der Stelle $(p, x_i)$ genau $k$ verbundene Stellen gehören, und $p$ ist genau durch $P^d$ teilbar, wenn die zugehörige Stelle $(p, x_i)$ einem Verzweigungspunkte (d-1)$^{ter}$ Ordnung angehört.[97]

Zum Abschluß des veröffentlichten Textes wies Hensel auf die beiden Veröffentlichungen [29, 1897] und [30, 1897] hin, die zwischen dem Vortrag und seiner Veröffentlichung entstanden waren.

Der Ausgangspunkt von Hensels Überlegungen war die Überzeugung, die definierende Gleichung des Zahlkörpers habe auch als Kongruenz modulo $p^M$ genau $n$ Wurzeln, die er geeignet darstellen wollte. Aus dem oben zitierten Brief Hensels vom 19.10.1897 an Hilbert geht hervor, daß Hensel sehr wahrscheinlich gedanklich mit Gleichungen für den Bereich von $p$ arbeitete, die er als Kongruenzen für beliebig hohes $M$ mathematisch präzisierte.[98]

### 4.2.4 Die Notiz über die Diskriminante

Die Arbeit *Ueber die Bestimmung der Discriminante eines algebraischen Körpers* begann Hensel mit einer Zusammenfassung des Vortrags, wobei er neue Begriffe definierte und die bereits eingeführten leicht modifizierte. Er begann wiederum damit, die definierende Gleichung des Zahlkörpers als Kongruenz modulo $p^M$ aufzufassen, und ihre genau $n$ Kongruenzwurzeln in Potenzreihen zu entwicklen. Der erste Fall ist der, in dem alle diese Potenzreihen nach "ganzzahligen Potenzen von $p$ fortschreiten."[99] Dann ordnete er jeder Entwicklung eine Stelle zu und bezeichnete diese mit $(A^{(i)}, p)$, wobei $A^{(i)}$ jeweils das Anfangsglied der Entwicklung bezeichnet. Eine solche Stelle heißt *regulär*, wohingegen eine Stelle *singulär* oder *Verzweigungsstelle der* $(d-1)^{ten}$ *Ordnung* heißt, "wenn die betreffende Congruenzwurzel nach ganzzahligen Potenzen von $p^{\frac{1}{d}}$ entwickelt werden kann."[100] Dabei wird wieder nach $\pi = \omega \sqrt[d]{p}$ entwickelt, wobei $\omega$ "eine geeignete Einheit modulo $p$ bedeutet."[101] Zu jeder Entwicklung an einem Verzweigungspunkt gibt es dann $d$ konjugierte Entwicklungen, die man erhält, indem man $\pi$ durch seine konjugierten Werte ersetzt. Hensel benutzte die Analogie zur Theorie der algebraischen Funktionen, um zu begründen, daß er diesen $d$ konjugierten Entwicklungen nur eine Stelle zuordnen wolle:

> [D]iese $d$ Wurzeln hängen demnach in genau derselben Weise in einem Cyclus zusammen, wie die $d$ Zweige einer algebraischen Function in der Umgebung eines Verzweigungspunctes (d-1)$^{ter}$ Ordnung; auch hier soll daher $(A_0, p)$ nur als eine Stelle angesehen werden, in deren Umgebung jene $d$ in einem Cyclus verbundenen Entwickelungen vorhanden sind.[102]

Die Entwicklungskoeffizienten sind

> ganze algebraische Zahlen von der Form $a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{\kappa-1}\alpha^{\kappa-1}$, in welcher die Coefficienten $a_i$ der Reihe $0, 1, \ldots p-1$ angehören, und $\alpha$ eine der $\kappa$ Wurzeln einer irreductiblen ganzzahligen Gleichung $\varphi(\alpha) = \alpha^\kappa + b_1\alpha^{\kappa-1} + \cdots + b_\kappa = 0$, bedeutet, welche auch als Congruenz modulo $p$ betrachtet, irreductibel bleibt.[103]

---

[97] [34, 1899, 88].
[98] "[M]an muss dazu die Wurzeln von Gleichungen einführen, oder wenn Sie wollen die Wurzeln von Congruenzen für jede noch so hohe Potenz von $p$ als Modul," Brief Hensels an Hilbert vom 19.10.1897.
[99] [29, 1897, 247].
[100] [29, 1897, 248].
[101] [29, 1897, 248].
[102] [29, 1897, 248].
[103] [29, 1897, 248].

Zu jeder Stelle gehören dann genau $\kappa$ *verbundene Stellen*, die man dadurch erhält, daß man statt $\alpha$ alle Konjugierten $\alpha_1, \ldots, \alpha_\kappa$ in den $A_i$ einsetzt. Die Stelle $(A_0, p)$ hat den *Grad* $\kappa$, "wenn die Entwickelungskoeffizienten $A_i(\alpha)$ algebraische Zahlen $\kappa^{\text{ten}}$ Grades sind, wenn also zu dieser Stelle $\kappa$ verbundene Stellen" gehören.[104] Die Verzweigungsstelle heißt *erster Art*, wenn die $\pi_i$ einer reinen Gleichung $\psi(\pi) = \pi^d - \varepsilon p = 0$ genügen und *zweiter Art*, wenn diese Gleichung ihre allgemeine Form $\psi(\pi) = \pi^d + p\varepsilon_{d-1}\pi^{d-1} + p\varepsilon_{d-2}\pi^{d-2} + \cdots + p\varepsilon_0 = 0$ hat, wobei alle $\varepsilon_i$ ganze Zahlen in $K(\alpha)$ sind und $\varepsilon$ und $\varepsilon_0$ nicht durch $p$ (und damit auch nicht durch eine positive gebochene Potenz von $p$) teilbar sind.[105]

Die Stellen legen fest, welche Gestalt die Entwicklungen einer beliebigen rationalen Funktion $X = f(x)$ haben und nicht verbundene Stellen sind unabhängig voneinander:

> Ist $x$ durch die Gleichung $f(x) = 0$ definirt, so können alle rationalen ganzzahligen Functionen $X$ von $x$ in der Umgebung einer jeden Stelle $(A_0, p)$ in genau derselben Weise wie $x$ selbst in Potenzreihen entwickelt werden, und jede solche Entwicklung kann höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen von $\pi$ enthalten. Die nicht verbundenen Stellen $(A_0, p), \ldots, (B_0, q), (C_0, r), \ldots$ jenes Gebildes sind hierbei in der Weise voneinander unabhängig, daß man stets eine Function $X$ finden kann, deren Entwickelungen für eine beliebige Anzahl solcher Stellen bis zu einem beliebig hohen Gliede hin gegebene Coefficienten haben.[106]

### Die geometrische Vorstellung

Die Wahl, die Hensel in dieser Arbeit wirklich anders getroffen hatte als im Vortrag, betrifft die Definition der Stellen. Hierfür gäbe es drei naheliegende Möglichkeiten und Hensel wählte diejenige, die für den $p$-Anteil der Diskriminante im zahm verzweigten Fall eine analoge Formel zu der aus der Theorie der algebraischen Funktionen bekannten ergibt.

In seinem Vortrag hatte Hensel jeder der $n$ Entwicklungen eine Stelle zugeordnet. Es gäbe die weitere Möglichkeit, alle durch eine Entwicklung mitbestimmten Entwicklungen derselben Stelle zuzuordnen. In der gerade untersuchten Note [29, 1897] wählte Hensel hingegen die dritte Möglichkeit: Alle durch die Konjugation von $\pi$ zusammenhängenden Entwicklungen werden einer Stelle zugeordnet, die durch Konjugation der $\alpha$ zusammenhängenden jedoch verschiedenen, verbundenen Stellen.

Im Zusammenhang mit Stellen führte Hensel eine geometrische Sprechweise ein. Bereits im Vortrag hatte er von Stellen des "algebraischen Gebildes" gesprochen,[107] hier benutzte er zweimal den Ausdruck "Umgebung" einer Stelle, um auf mehrere dieser Stelle zugehörige Potenzreihen zu verweisen.[108]

Die geometrische Vorstellung, die Hensel hier vermutlich nahelegen möchte,[109] ist die einer über den Primzahlen verzweigten Riemannschen Fläche. Üblich war zum damaligen Zeitpunkt u.a. die Veranschaulichung einer Riemannschen Fläche als eine Anzahl von Blättern, die über der komplexen Ebene liegen, und sich an den Verzweigungspunkten durchdringen. Treffen sich in einem Verzweigungspunkt $d$

[104] [29, 1897, 249].

[105] Hensel wies an dieser Stelle nicht auf die Möglichkeit hin, daß ein $\pi'$ gefunden werden kann, das eine reine Gleichung erfüllt, während das aktuelle $\pi$ keiner solchen genügt.

[106] [29, 1897, 249].

[107] [34, 1899, 87], oben bereits zitiert.

[108] [29, 1897, 248f], bereits zitiert in den beiden längeren Zitaten des ersten Abschnitts von 4.2.4, denen zu den Fußnoten 102 und 106.

[109] Diese Formulierung beinhaltet keine Meinung darüber, ob er sie für uneingeschränkt nützlich bzw. richtig hält, Probleme bewußt verschweigt usw. Dazu gibt es keine Quellen.

Blätter treffen, so wird dieser Punkt mit der Vielfachheit $d$ gezählt, so daß im Fall einer algebraischen Erweiterung $n$-ten Grades über jedem Punkt $x = a$ der komplexen Ebene genau $n$ Punkte liegen. Liegt über $x = a$ ein $d$-facher Punkt, so entsprechen diesem Punkt $d$ Potenzreihenentwicklungen nach $\omega^k(x-a)^{\frac{1}{d}}$, wobei $\omega$ eine primitive $d$-te Einheitswurzel ist.

Bringt man dies in Zusammenhang mit den gemeinsam als arithmetisch betrachteten Theorien von Dedekind-Weber bzw. Kronecker, so entspricht jedem Punkt über $x = a$ ein Primideal bzw. ein Primdivisor. Hat der Punkt die Vielfachheit $d$, so teilt genau die $d$-te Potenz dieses Primideals/Primdivisors die rationale Funktion $(x - a)$.[110]

An diesem Bild bzw. dieser Situation orientierte sich Hensel, nur ist die zahlentheoretische Situation komplizierter. Auch hier gehören zu jedem Verzweigungspunkt $d$-ter Ordnung $d$ Potenzreihenentwicklungen, so daß es insgesamt $n$ solche Entwicklungen gibt. Dann entspricht jedem Verzweigungspunkt eine Stelle und jedem Komplex verbundener Stellen ein Primideal.[111]

Im zahlentheoretischen Fall sind zudem die Elemente, nach denen entwickelt wird, nicht bereits durch die Ordnung der Stelle eindeutig bestimmt.

Die Tatsache, daß durch Hensels Theorie nur Stellen bzw. Punkte über diskreten Punkten beschrieben werden, die nicht in Zusammenhang gebracht werden können, schwächte Hensel dadurch ab, daß er trotzdem den Ausdruck "Umgebung" verwendete.

**Die Berechnung der Diskriminante**

Die Berechnung der Diskriminante bezeichnete Hensel als eine Aufgabe, "welche seit etwa 25 Jahren von immer neuen Gesichtspunkten aus behandelt, aber noch nicht vollständig gelöst worden war."[112] Die Aussage, daß eine Primzahl genau dann in der Diskriminante enthalten ist, wenn sie einen mehrfachen Primdivisor enthält, konnte Dedekind bekanntlich im Fall der zahmen Verzweigung präzisieren und in Hensels neuer Terminologie lautet sie:

> Gehören zu der Primzahl $p$ genau $r$ (verbundene oder unverbundene) Stellen des algebraischen Gebildes, so ist die Körperdiscriminante $D$ durch $p^{n-r}$ und durch keine höhere Potenz von $p$ teilbar.[113]

Die Bedingung der zahmen Verzweigung besagt in Hensels Terminologie, daß für keine der zu $p$ gehörigen Verzweigungsstellen "die Anzahl $d$ der dort vorhandenen Entwickelungen durch $p$ theilbar ist."[114]

Hensel skizzierte den Beweis seiner Verallgemeinerung nur, da er sich auf den Spezialfall beschränkte, in dem alle $r$ Verzweigungsstellen über $p$ vom Grad Eins sind.[115]

Er stellte ein Fundamentalsystem in Bezug auf $p$ auf, indem er dessen Entwicklungen bis zu einem genügend hohen Modul $p^M$ vorschrieb. Den $p$-Anteil der Diskriminante dieses Systems berechnete er mit Hilfe der Entwicklungen.

[110] Diese Zusammenfassung der Theorien von Dedekind-Weber und Kronecker erfolgte zum Beispiel bei ihrem gemeinsamen Ausschluß aus dem Bericht [Brill/Noether, 1894], vgl. dessen Vorrede, speziell [Brill/Noether, 1894, II].
[111] Der Grund ist, daß die Primideale im Allgemeinen nicht den Grad Eins haben.
[112] [29, 1897, 249].
[113] [29, 1897, 250].
[114] [29, 1897, 250].
[115] Der allgemeine Fall benötigt vor allem komplizierte Determinantenberechnungen, die Hensel u.a. in [41, 1902] durchführte, vgl. 4.4.3.

Aufgrund der angesprochenen Unabhängigkeit der Stellen $V_d, V_e, \ldots$ über $p$, lassen sich zuerst

> $d$ rationale Functionen von $x$ so auswählen, daß ihre Entwicklungen in der Umgebung der Stelle $(x_1, p)$ für eine beliebig hohe Potenz $p^M$ von $p$ bzw. congruent $1, \pi, \pi^2, \ldots, \pi^{d-1}$ sind, während ihre Entwickelungen in der Umgebung jeder der $(r-1)$ übrigen Stellen $V_e, \ldots$ durch $p^M$ theilbar sein sollen.[116]

Nachdem entsprechende Funktionen auch für die übrigen Verzweigungspunkte gewählt wurden, erhält man insgesamt $n$ Zahlen, die "wie man leicht einsieht ein Fundamentalsystem in Bezug auf $p$ für den Körper $K(x)$ bilden."[117] Der wesentliche Schritt, der die Entwicklungen mit den Konjugierten verbindet, liegt in dem folgenden Nebensatz:

> also ist das Quadrat der aus den Entwickelungen jener $n$ Zahlen in der Umgebung von $V_d, V_e, \ldots$ gebildeten Determinante, modulo $p^M$ betrachtet, congruent der Körperdiscriminante $D$.[118]

Hensel behauptete ohne weiteres Argument, um den $p$-Anteil der Diskriminante zu berechnen, könne man mit den von ihm eingeführten Entwicklungen arbeiten.[119] Hat man diesen Übergang akzeptiert, so erhält man die folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix}
1 & \pi & \pi^2 & \ldots & \pi^{d-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \cdot \\
1 & \pi_1 & \pi_1^2 & \ldots & \pi_1^{d-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \cdot \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & \cdot \\
1 & \pi_{d-1} & \pi_{d-1}^2 & \ldots & \pi_{d-1}^{d-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \varrho & \ldots & \varrho^{e-1} & \cdot \\
\vdots & & & & \vdots & & & & & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \varrho_{e-1} & \ldots & \varrho_{e-1}^{e-1} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}.$$

Hensel benötigte ihr Determinantenquadrat. Dieses ist gleich dem Produkt der Diskriminanten der Gleichungen für $\pi_i$ bzw. $\varrho_j$, also gleich dem Produkt der Diskriminanten der Verzweigungsgleichungen. Diese Aussage bleibt bestehen, wenn nicht alle Stellen Grad Eins haben: Hat eine Stelle den Grad $k$, so tritt die $k$-te Potenz der Diskriminante der zugehörigen Verzweigungsgleichung im obigen Determinantenquadrat auf. Damit erhielt Hensel den Satz:

> Eine Primzahl $p$ ist in der Körperdiscriminante $D$ genau so oft enthalten als in dem Producte der $r$ Verzweigungsdiscriminanten, welche den zu $p$ gehörigen Verzweigungsstellen $V_d, V_e, \ldots$ entsprechen.[120]

Im Fall der zahmen Verzweigung sind $d, e, \ldots$ alle nicht durch $p$ teilbar und insbesondere sind alle Verzweigungspunkte erster Art. Dann läßt sich die Diskriminante explizit berechnen, denn es ist

$$\psi(\pi) = \pi^d - \varepsilon p, \quad \psi'(\pi) = d\pi^{(d-1)}, \quad \Delta(\pi) = \mathrm{Nm}(\psi'(\pi)) = d^d p^{d-1},$$

und damit sind die Verzweigungsdiskriminanten alle genau durch $p^{d-1}$ teilbar, die Diskriminante also durch $p^{(d-1)+(e-1)+\cdots} = p^{n-r}$.[121]

---

[116] [29, 1897, 251].
[117] [29, 1897, 251].
[118] [29, 1897, 251].
[119] Vermutlich liegt dem der Gedanke zugrunde, daß die Konjugierten $x_i$ die Minimalgleichung von $x$ auch modulo $p^M$ erfüllen, und daher jedem Konjugierten eindeutig eine Kongruenzwurzel dieser Kongruenz entspricht, die in Bezug auf $p$ eingesetzt werden kann. Dieser in weiteren Arbeiten auch explizite Grundgedanke wird z.B. in 4.4.2 thematisiert.
[120] [29, 1897, 252]. Zur Erinnerung: Die Zahl $r$ zählt die verbundenen oder unverbundenen Stellen.
[121] [29, 1897, 252].

Im Fall der wilden Verzweigung gilt $p|d$ und in $\psi'(\pi) = d\pi^{d-1} + \cdots + pi\varepsilon_i\pi^{i-1} + \ldots$ sind alle Koeffizienten durch $p$ teilbar. Daher ist $\Delta(\pi)$ mindestens durch $p^d$ teilbar. Da jedes Glied eine andere gebrochene Potenz von $p$ enthält, können sich nicht zwei der Summanden wegheben. Damit ist die Summe genau durch die minimale Potenz von $p$ teilbar, durch die einer der Summanden teilbar ist. Um diese zu finden, sucht man den Koeffizienten $pi\varepsilon_i$, der durch die kleinste ganze Potenz $p^{\delta_i}$ von $p$ teilbar ist. Gibt es davon mehrere, so muß man den mit dem kleinsten $i$ wählen, da neben der ganzen Potenz von $p$, die aus dem Koeffizienten stammt, der Summand noch durch die gebrochene Potenz $p^{\frac{i}{d}}$ teilbar ist, die von $\pi^i$ herkommt. Die Verzweigungsdiskriminante $\Delta(\pi)$ ist dann durch $\mathrm{Nm}(pi\varepsilon_i\pi^{i-1}) = p^{\delta_i d+i-1}$ teilbar.
Sei jetzt $s-1$ der Exponent von $p$ in $d$. Dann ergibt sich die höchste mögliche Potenz von $p$ in der Verzweigungsdiskriminante, "wenn in $\psi'(\pi)$ das erste Glied $d\pi^{d-1}$ zugleich das niedrigste ist,"[122] also jeder Koeffizient der Ableitung mindestens durch $p^{s-1}$ teilbar ist. In diesem Fall ist der Exponent von $p$ in der Diskriminante $(s-1)d + d - 1 = sd - 1$. Er tritt insbesondere immer ein, wenn der Verzweigungspunkt erster Art ist. Hensel faßte daher zusammen:

> Ist die Ordnung $d$ einer Verzweigungsstelle genau durch die $(s-1)^{\text{te}}$ Potenz von $p$ theilbar, so ist die zugehörige Verzweigungsdiscriminante durch eine ganzzahlige Potenz von $p$ theilbar, deren Exponent zwischen $d-1$ und $sd-1$ (beide Grenzen eingeschlossen) liegt. Die untere Grenze wird allein für $s=1$, die obere wird z.B. dann erreicht, wenn jene Verzweigungsstelle von der ersten Art ist.
> In diesem letzten Satze liegt zugleich die Bestätigung und der Beweis einer Vermuthung, welche Herr Dedekind am Schlusse seiner bereits erwähnten Arbeit ausgesprochen hat.[123]

### 4.2.5 Die Kombination der Hilfsmittel

Die weiteren Anwendungen der Potenzreihenentwicklungen beruhen darauf, daß Hensel auch statt der Fundamentalform und ihren Konjugierten mit deren Entwicklungen arbeitete, also Entwicklungen und unbestimmte Koeffizienten zu Entwicklungen mit unbestimmten Koeffizienten kombinierte. In der Arbeit *Ueber die Fundamentalgleichung und die außerwesentlichen Discriminantentheiler eines algebraischen Körpers* [30, 1897] zeigte er zuerst die Äquivalenz zwischen Diskriminante des Körpers und Zahlteiler der Diskriminante der Fundamentalgleichung.
Um anschließend die gemeinsamen außerwesentlichen Diskriminantenteiler zu bestimmen, muß man im Wesentlichen nur die ersten Koeffizienten der Entwicklungen betrachten, die den Resten modulo der Primdivisoren entsprechen.[124] Dann ist die Differenz zweier Entwicklungen an einem Verzweigungspunkt genau dann durch irgendeine positive Potenz von $p$ teilbar ist, wenn diese Anfangsglieder gleich sind.

#### Die Äquivalenz zwischen Diskriminante der Fundamentalgleichung und Diskriminante des Zahlkörpers

Ist $K(x_1)$ ein algebraischer Zahlkörper, $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}$ ein Fundamentalsystem für die ganzen algebraischen Zahlen dieses Körpers und sind $x_{ij}$ die Konjugierten von $x_{1j}$, so ist die Körperdiskriminante $D = |x_{ij}|^2$. Die Fundamentalform $w_1 = u_1x_{11} + u_2x_{12} + \cdots + u_nx_{1n}$ repräsentiert alle ganzen Zahlen des Körpers. Ihre Konjugierten haben die Gestalt $w_i = u_1x_{i1} + u_2x_{i2} + \cdots + u_nx_{in}$ und erfüllen die

[122] [29, 1897, 253].
[123] [29, 1897, 253], vgl. [Dedekind, 1882, 396].
[124] Letztere hatte Hensel bei seiner Untersuchung der gaDT für seine Dissertation betrachtet, vgl. 2.2.

Fundamentalgleichung $F(w, u_1, \ldots, u_n) = (w - w_1)(w - w_2)\ldots(w - w_n) = 0$ mit ganzen Koeffizienten. Betrachtet man die Diskriminante $\Delta(u_1, \ldots, u_n) = \prod_{i \neq j}(w_i - w_j)$ der Fundamentalgleichung, so ist klar, daß diese durch $D$ teilbar ist. Die Frage ist, ob $\frac{\Delta}{D}$ für unbestimmte $u_i$ noch durch irgendeine Primzahl $p$ teilbar ist.

Hensel erinnerte daran, daß Kronecker diese Frage für den galoisschen Fall negativ beantworten konnte und sonst nur endlich viele Zahlen ausschließen mußte, während er selbst etwas aufwendiger allgemein zeigen konnte, daß solche Teiler nicht auftreten.[125] Der Beweis vereinfache sich jedoch, weil die "in der vorigen Notiz auseinandergesetzten Principien" es gestatten,

> anstatt des vollständigen symmetrischen Productes $\prod_{i \neq \kappa}(w_i - w_\kappa)$ jeden einzelnen seiner Factoren $w_1 - w_2, w_1 - w_3, \ldots$ für sich zu betrachten,[126]

bzw. geeignete Teilprodukte zu untersuchen. Hensel behauptete wiederum, man könne bei der Berechnung dieser Differenzen die Menge aller Konjugierten $w_i$ durch die Menge aller Entwicklungen von $w$ ersetzen, und mit deren Hilfe den $p$-Anteil der Diskriminante berechnen:

> Will man die Discriminante der Fundamentalgleichung auf ihre Theilbarkeit durch eine beliebige Primzahl $p$ untersuchen, so kann man jene $n$ konjugierten Fundamentalformen $w_i$ durch ihre Entwickelungen in der Umgebung der zu $p$ gehörigen Stellen des algebraischen Gebildes ersetzen.[127]

Er wollte aber die $n$ angesprochenen Entwicklungen direkt bestimmen und schrieb dazu die allgemeinen Entwicklungen "der Zweige einer ganzen algebraischen Zahl bzw. in der Umgebung von $V_d, V_e, \ldots$" in der Form $w = U_0 + U_1\pi + U_2\pi^2 + \ldots$, wobei die $U_i$ die Form $U_h = u_{h0} + u_{h1}\alpha + \cdots + u_{h,\kappa-1}\alpha^{\kappa-1}$ haben.[128] Man erhält dann bereits alle Möglichkeiten von Entwicklungen, wenn man an den unabhängigen Verzweigungsstellen für die $u_{hj}$ beliebige Kombinationen der Zahlen $0, 1, \ldots, p-1$ einsetzt:

> [D]a die Stellen $V_d, V_e, \ldots$ völlig unabhängig von einander sind, so kann man die Coefficienten $u_{\alpha\beta}$ der $U_0, U_1, \ldots$, die Coefficienten $v_{\gamma\delta}$ der $V_0, V_1, \ldots$ etc.; als ganz beliebige Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots, p-1$ annehmen; immer kann man nämlich ganze algebraische Zahlen finden, deren Entwickelungen bis zu beliebig hohen Potenzen von $\pi, \varrho, \ldots$ gerade diese Zahlcoefficienten haben, und umgekehrt ist jede ganze Zahl in dieser Weise in der Umgebung von $V_d, V_e, \ldots$ darstellbar.[129]

Hensel untersuchte die Differenzen $w_i - w_j$ einzeln auf ihre Teilbarkeit durch (gebrochene) Potenzen von $p$ und betrachtete dazu die entsprechenden Entwicklungen. Für unbestimmte Koeffizienten können nur die Differenzen durch eine positive Potenz von $p$ teilbar sein, die den gleichen Anfangskoeffizienten $U_0$ haben, da dieser sonst nicht wegfällt.[130]

Gehören $w_i$ und $w_j$ zu miteinander verbundenen Verzweigungsstellen, so erhält man $w_i - w_j = (U_0 - U_0^{(g)}) + \ldots$ mit $(U_0 - U_0^{(g)}) = u_{01}(\alpha - \alpha^{(g)}) + \ldots$. Auch diese Differenz ist für unbestimmte Koeffizienten (nach Konstruktion von $\alpha$) durch keine (gebrochene) Potenz von $p$ teilbar.

[125] [Kronecker, 1882, 375f] bzw. [13, 1894].
[126] [30, 1897, 255].
[127] [30, 1897, 255]. Auch hier benutzte Hensel den Ausdruck "Umgebung", siehe auch das nächste Zitat. Er verwendete implizit die Aussage, daß auch $F(w, u_1, \ldots u_n) \equiv 0 \mod p^m$ genau $n$ inkongruente Wurzeln hat. An dieser Stelle ist die Eindeutigkeit der Zuordnung der Entwicklungen zu den Konjugierten egal, da man sich für das volle symmetrische Produkt interessiert.
[128] [30, 1897, 256]. Zum zweiten Verzweigungspunkt $V_e$ gehört das Entwicklungselement $\varrho$, die Koeffizienten $V_i$ und die Zahlkoeffizienten $v_i$.
[129] [30, 1897, 256].
[130] Die Differenz $w_i - w_j = (U_0 - V_0) + \ldots$ ist in diesem Fall durch keine Potenz von $p$ teilbar.

Gehören jedoch $w_i$ und $w_j$ zur selben Verzweigungsstelle, so ist

$$w_i - w_j = (\pi_i - \pi_j)(U_1 + U_2(\pi_i + \pi_j) + \dots) \text{ genau durch } \pi_i - \pi_j \text{ teilbar.}$$

Das Produkt der Differenzen zu einer Verzweigungsstelle ist damit genau durch $\prod_{a \neq b}(\pi_a - \pi_b) = \Delta(\pi)$, also die Diskriminante der Verzweigungsgleichung teilbar.

Das volle Produkt $\prod_{i \neq \kappa}(w_i - w_\kappa)$ ist daher genau durch das Produkt aller Verzweigungsdiskriminanten teilbar. Dieses ist jedoch nach der vorhergehenden Note gleich dem $p$-Anteil der Diskriminante. Da dies für alle $p$ gilt, folgt daraus die Äquivalenz von Körperdiskriminante und Diskriminante der Fundamentalgleichung.[131]

Durch den Übergang von den Konjugierten zu den Entwicklungen hat man $n$ Unbestimmte, die beliebige ganzzahlige Werte annehmen konnten, durch unendlich viele Unbestimmte, die nur die Werte $0, 1, \dots, p-1$ annehmen können, ersetzt. Aufgrund der Konstruktion der Entwicklungen sind für die lokalen Betrachtungen nur die $\pi_i$ entscheidend.

**Die gemeinsamen außerwesentlichen Diskriminantenteiler**

Die Frage, ob $p$ gemeinsamer außerwesentlichen Diskriminantenteiler ist, hatte Hensel damit auf die Frage reduziert, ob man die Unbestimmten $u_{ih}$ so wählen kann, daß die Gleichungsdiskriminante dieses Elements keine höhere Potenz von $p$ enthält, als sie (wegen des Anteils der Diskriminante) muß. Dies ist möglich, wenn für jede der Differenzen $w_i - w_j$ auch für spezielle $U_i$ die gleiche Teilbarkeit erreicht wird, wie für unbestimmte Koeffizienten, wenn also gilt:

> 1) Die Anfangsglieder $U_0, U_0', \dots U_0^{(\kappa-1)}; V_0, V_0', \dots V_0^{(\lambda-1)}; \dots$ aller Entwicklungen für die von einander verschiedenen zu $p$ gehörigen Stellen müssen modulo $p$ von einander verschieden sein, denn dann und nur dann ist keine der Differenzen $w - w'$ durch eine Potenz von $p$ theilbar, wenn $w$ und $w'$ verschiedenen Verzweigungsstellen angehören.
> 2) Die auf diese folgenden Glieder $U_1, U_1', \dots; V_1, V_1', \dots; \dots$ müssen alle von Null verschieden sein, denn dann und nur dann ist jede Differenz, z.B: $w_i - w_\kappa$ genau durch die entsprechende $\pi_i - \pi_\kappa$ theilbar wenn beide Entwickelungen zu derselben Verzweigungsstelle (hier zu $V_d$) gehören.[132]

Die zweite Bedingung ist kein Problem. Ebenfalls kein Problem ist es, $U_0$ so zu wählen, daß alle seine Konjugierten inkongruent modulo $p$ sind.[133] Dazu muß $U_0$ eine Zahl sein, die eine modulo $p$ irreduzible Kongruenz $\kappa$-ten Grades erfüllt, und solche Zahlen gibt es immer.

Hingegen kann es unmöglich sein zu ereichen, daß die Differenzen voneinander unabhängiger Anfangsglieder nicht durch eine (gebrochene) Potenz von $p$ teilbar sind. Ist $\lambda_\kappa$ die Anzahl der unabhängigen Stellen des Grades $\kappa$, so fordert die Bedingung die Existenz von $\lambda_\kappa$ Zahlen $U_0^{(h)}$, die modulo $p$ vom Grade $\kappa$ sind, und deren insgesamt $\lambda_\kappa \kappa$ Konjugierte modulo $p$ paarweise verschieden sind.

[131] [30, 1897, 257].
[132] [30, 1897, 259].
[133] Hier geht wiederum ein, daß die Differenzen $\alpha_i^j - \alpha_k^j$ $(j = 1, \dots, \kappa - 1)$ nicht durch eine gebrochene Potenz von $p$ teilbar sind.

Diese entsprächen $\lambda_\kappa$ modulo $p$ verschiedenen, modulo $p$ irreduziblen Funktionen $\kappa$-ten Grades. Es gibt jedoch nur

$$\overline{g}(\kappa) = \frac{1}{\kappa}\left(p^\kappa - \sum p^{\frac{\kappa}{q}} + \sum p^{\frac{\kappa}{qq'}} - \dots\right),$$ "in welchem sich die Summationen rechts auf alle Primtheiler $q, q', \dots$ von $\kappa$ beziehen,"[134]

verschiedene irreduzible Funktionen $\kappa$-ten Grades mit reduzierten Koeffizienten. Ist $\lambda_\kappa > \overline{g}(\kappa)$, so kann die Bedingung daher nicht erfüllt werden.

Damit ist $p$ genau dann gemeinsamer außerwesentlicher Diskriminantenteiler, wenn für mindestens ein auftretendes $\kappa$ gilt $\lambda_\kappa > \overline{g}(\kappa)$.[135]

## 4.3 Die Divisorentheorie der algebraischen Funktionen

### 4.3.1 Ein Überblick

Hensels Arbeit *Zur Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der Abel'schen Integrale* [39, 1901] unterscheidet sich von seinen früheren Untersuchungen zu diesem Themenkreis vor allem dadurch, daß in ihr eine umfassende Theorie der Abelschen Integrale dargestellt wird. Sie ist das durchkomponierte Ergebnis einer langjährigen Beschäftigung mit dem Gegenstand. Hensel schrieb darüber an Hilbert:

> Ich habe nämlich selten oder nie an einem Gegenstand länger oder mit mehr Liebe gearbeitet als an dieser Theorie der algebraischen Funktionen, denn je länger ich über diese Dinge nachdachte desto einfacher wurde die Anschauung, desto deutlicher trat die Anatomie dieser Funktionen hervor, und ich glaube jetzt, dass dieses ganze Gebiet [..] so einfach bearbeitet ist, als es der Gegenstand zulässt.[136]

Es ging Hensel daher in dieser Arbeit weniger um neue Ergebnisse als vielmehr um einen einheitlichen übersichtlichen Aufbau. Insbesondere gelang es ihm, sowohl die Teilbarkeit von Funktionen als auch die Teilbarkeit der Integrale von Differentialen durch Divisoren zu beschreiben.

Man kann die Arbeit in drei Themenkomplexe unterteilen. Im ersten Teil stellte Hensel einen durch die Betrachtung der Potenzreihenentwicklungen vereinfachten Algorithmus zum Aufstellen eines Fundamentalsystems für die algebraisch ganzen Funktionen dar. Gleichzeitig erlaubte es die Betrachtung der einzelnen Entwicklungen aber auch abzulesen, durch welche Primdivisoren ein Element teilbar ist. Daher löste Hensel gleich die allgemeinere Aufgabe, ein Fundamentalsystem für alle Funktionen zu finden, die durch endlich viele vorgegebene Primdivisorpotenzen teilbar sind. Insbesondere konnte er testen, ob ein gegebenes System Fundamentalsystem für irgendein Ideal ist.[137]

---

[134] [30, 1897, 259].

[135] Hensel hingegen formulierte unsauber, "die Anzahl aller algebraischen Zahlen, welche einer modulo $p$ irreductiblen Congruenz des $\kappa^{ten}$ Grades genügen", sei $\overline{g}(\kappa)$, identifizierte also die Konjugierten bereits implizit, [30, 1897, 259]. Daher erhielt auch er das ihm bekannte Ergebnis.

[136] Brief Hensels an Hilbert vom 28.3.1900. Hensel schickte diesen Begleitbrief zum Manuskript von [39, 1901] aus dem Urlaubsort Bozen dem Manuskript hinterher, das er noch in Berlin in Eile an Hilbert als Redakteur der Mathematischen Annalen abgesandt hatte.

[137] Die betrachteten Funktionen müssen insbesondere nicht mehr ganz sein, denn die Bedingung kann auch sein, daß die Funktion durch $P^{-2}$ teilbar ist, also höchstens $P^2$ im Nenner hat.

Im zweiten Teil der Arbeit führte Hensel Divisoren und Divisorenklassen ein. Nachdem er Linearkombinationen von Divisoren einer Klasse definierte, konnte er für die ganzen Divisoren einer Klasse ein Fundamentalsystem konstruieren. Letzteres ist ebenfalls möglich, wenn man von den ganzen Divisoren einer Klasse nur diejenigen betrachtet, die durch einen gegebenen Divisor teilbar sind.

Im dritte Teil der Arbeit formulierte Hensel die Aufgabenstellungen der Theorie der Abelschen Integrale mit Hilfe von Divisoren und löste sie anschließend. Durch Betrachtung von Differentialquotienten konnte Hensel zeigen, daß jedem Differential ein Divisor entspricht und diese alle in einer Klasse, der Differentialklasse, liegen. Aus dem Divisor eines Differentials lassen sich die irregulären Stellen des zugehörigen Integrals ablesen. Dies ermöglicht es, einen Ausdruck für alle diejenigen Differentiale aufzustellen, deren Integrale vorgegebene Bedingungen erfüllen. Die Anzahl dieser Differentiale läßt sich als Dimension einer Ergänzungsklasse beschreiben und durch den Satz von Riemann-Roch bestimmen.
Hensel führte drei Typen von Elementarintegralen ein, denen Divisoren mit sehr einfachem Nenner entsprechen. Jedes Abelsche Integral läßt sich als Summe solcher Elementarintegrale schreiben.

### Die Nutzung der Potenzreihenentwicklungen

Hensel begann damit, zu einem linear unabhängigen System von $n$ Funktionen die $n \times n$-Matrix der Entwicklungen an $(x = a)$ aufzustellen und jeder Funktion die maximale (gebrochene) Potenz von $(x - a)$ zuzuordnen, die alle ihre Entwicklungen teilt. Mit Hilfe des so bestimmten Teilers definierte er für jede Entwicklung der Matrix den Anfangskoeffizienten, der auch Null sein kann. Das gegebene System heißt *regulär*, wenn die Determinante der Anfangskoeffizienten nicht verschwindet.

Der Vorteil eines regulären Systems ist, daß der Teiler einer Linearkombination seiner Elemente direkt abgelesen werden kann. Ein gegebenes System kann durch einen Algorithmus in ein äquivalentes reguläres System überführt werden.[138]
Hensel verallgemeinerte die Aufgabe, alle ganzen algebraischen Funktionen des Körpes zu bestimmen: Er wollte alle algebraischen Funktionen bestimmen, die an endlich vielen Punkten der Riemannschen Fläche vorgegebene Teilbarkeitseigenschaften haben und an den übrigen Stellen ganz sind. Diese Aufgabe zerlegte Hensel in zwei Teile: Die Menge der Funktionen, die diese Bedingung an allen endlichen Punkten erfüllen, nannte er ein Ideal. Zuerst stellte er daher die Aufgabe, eine $\mathbb{C}[x]$-Basis für dieses Ideal zu bestimmen. Die anschließende Betrachtung der Stelle $\infty$ beschränkte den Grad der Koeffizienten, so daß er zu einer $\mathbb{C}$-Basis gelangte.[139]
Die Lösung der Teilaufgabe im Endlichen führte Hensel auf die Lösung eines lokalen Problems zurück. Betrachtet man zunächst nur die (lokalen) Bedingungen an Punkten über $(x = a)$, so läßt sich aus einem beliebigen System ein reguläres System konstruieren, dessen Teiler dann für jeden über $(x = a)$ liegenden Verzweigungspunkt, an dem $d$ Blätter zusammenlaufen, genau einmal die Restsequenz $0, \frac{1}{d}, \ldots, \frac{d-1}{d}$ in

[138] Äquivalent bedeutet dabei, daß durch beide Systeme dieselben Funktionen dargestellt werden können.
[139] Durch eine gebrochene Transformation kann der Punkt, der zusätzlich diskutiert werden muß, auch ins Endliche verschoben werden.

den Exponenten enthalten.[140]

Ein System ist genau dann ein Fundamentalsystem für ein Ideal, wenn es für jedes $a$ in Partialsysteme zerfällt. Dies bedeutet, daß für festes $a$ die Matrix der Entwicklungen äquivalent in Blockdiagonalgestalt überführt werden kann, wobei jedem Verzweigungspunkt der Vielfachheit $d$ über $a$ ein $d \times d$-Block entspricht, dessen Teilerexponenten eine Sequenz $\frac{\varrho}{d}, \frac{\varrho+1}{d}, \ldots, \frac{\varrho+d-1}{d}$ bilden. Dieses Partialsystem der Ordnung $\varrho$ entspricht dann der Bedingung, daß alle Funktionen durch $P^{\varrho}$ teilbar sind, wenn $P$ der zu dem Verzweigungspunkt gehörige Divisor ist.

Beginnt man mit einem System von $n$ linear unabhängigen Funktionen aus dem betrachteten Ideal, so kann man es nacheinander für die verschiedenen kritischen Linearfaktoren $(x - a_i)$ umformen, so daß es an $a_i$ wie gewünscht in Partialsysteme zerfällt. Umgekehrt kann man auch für ein gegebenes System entscheiden, ob es ein Fundamentalsystem für ein Ideal ist und die Diskriminante eines solchen Fundamentalsystems berechnen.

Hensel betrachtete zur Konjugiertenmatrix eines linear unabhängigen Systems die Matrix $C$, die durch Transponieren der inversen Matrix entsteht. Auch in dieser sind die Spalteneinträge zueinander konjugiert. Daher entspricht der Matrix $C$ ein linear unabhängiges System, das Hensel als das *komplementäre* System bezeichnete.

Ist ein gegebenes System ein Fundamentalsystem für ein Ideal, so auch dessen komplementäres System: Betrachtet man die Entwicklungen an $x = a$, so zerfällt mit dem gegebenen System auch das komplementäre in Partialsysteme. Sind die Teiler, die zu einem Partialsystem des gegebenen Systems gehören $\frac{\varrho}{d}, \frac{\varrho+1}{d}, \ldots, \frac{\varrho+d-1}{d}$, so gehören zum entsprechenden Partialsystem des komplementären Systems die Teiler $-\frac{\varrho}{d}, -\frac{\varrho+1}{d}, \ldots, -\frac{\varrho+d-1}{d}$. Da die Ordnung des Partialsystems vom kleinsten dieser Teiler bestimmt wird, hat es die Ordnung $-(\varrho + d - 1)$.

Hensel führte den Verzweigungsteiler ein, um diesen Zusammenhang global zu beschreiben. Er ermöglicht es, aus dem gegebenen Ideal zu bestimmen, für welches Ideal das komplementäre System ein Fundamentalsystem ist.

Mit Hilfe seines Algorithmus konnte Hensel Funktionen mit speziellen Eigenschaften konstruieren, mit deren Hilfe er anschließend zeigte, daß die Punkte einer Riemannschen Fläche und die Ordnungszahl einer Funktion an einem Punkt dieser Fläche Invarianten des Körpers $K(x, y)$ sind und nicht von der gewählten Variablen $x$ abhängen.

### Die Theorie der Divisoren

Im zweiten Teil ordnete Hensel jedem Punkt der als invariant nachgewiesenen Riemannschen Fläche einen Primdivisor zu und betrachtete als Divisoren beliebige Potenzprodukte dieser Primdivisoren, wobei die Exponenten auch negativ sein dürfen. (Diese Divisoren lassen sich auf offensichtliche Weise multiplizieren und durcheinander dividieren.) Die Summe der Exponenten ist die Ordnung des Divisors. Jeder Funktion wird der Divisor zugeordnet, dessen Zähler die Nullstellen und dessen Nenner die Polstellen der Funktion sind. Dieser ist also von der Ordnung Null und die übereinstimmende Ordnung von Nenner und Zähler

[140] Der Rest einer rationalen Zahl $z = \frac{m}{n}$ ist diejenige rationale Zahl $0 \leq r < 1$ mit $r = z - g$ für ein geeignetes $g \in \mathbb{Z}$.

heißt der Grad der Funktion. Der oben untersuchte Typ von Teilbarkeitsforderungen besagt in der neuen Terminologie, daß der Divisor der Funktion ein ganzes Vielfaches eines gegebenen Divisors ist.
Hensel nannte zwei Divisoren äquivalent, wenn sie sich nur um den Divisor einer Funktion unterscheiden, und bildete Divisorenklassen nach dieser Äquivalenzrelation. Die Hauptklasse $H$ enthält dabei alle Divisoren von Funktionen des Körpers. Dann überträgt sich die Multiplikation, die Division und die Ordnung auf die Divisorklassen. Man erhält alle Divisoren einer bestimmten Klasse $\mathcal{D}$, indem man alle Divisoren der Hauptklasse $H$ mit einem festen Element dieser Klasse $\mathcal{D}$ multipliziert.

Zwischen Divisoren einer Klasse besteht nach Definition eine lineare Gleichung mit komplexen Koeffizienten, wenn die Gleichung zwischen Körperelementen gilt, die man erhält, wenn man die vorkommenden Divisoren durch einen festen Divisor der Klasse teilt. Betrachtet man nur die ganzen Elemente einer Klasse, so kann man diese als Linearkombination einer endlichen Anzahl linear unabhängiger Divisoren darstellen. Die Kardinalität einer solchen Basis heißt die Dimension der Klasse.
Das Verfahren aus dem ersten Teil ermöglicht es, eine solche Basis zu bestimmen: Man wählt einen Multiplikator $\mathcal{O}$, bestimmt eine Basis des Ideals zu $\frac{1}{\mathcal{O}}$, berücksichtigt die Bedingung an $\infty$ und multipliziert die gefundenen Elemente wieder mit $\mathcal{O}$.
Analog kann man eine Basis für die ganzen Elemente einer Divisorklasse aufstellen, die zusätzlich durch einen gegebenen Divisor $D$ teilbar sind. Allerdings muß in diesem Fall der Multiplikator geeignet gewählt werden.

**Die Theorie der Differentiale**

Der dritte Teil enthält die Zuordnung von Divisoren zu Differentialen und Differentialquotienten. Hensel begann damit zu bestimmen, wie oft für beliebige Funktionen $\eta$ und $\xi$ die einzelnen Primdivisoren in $\frac{d\eta}{d\xi}$ enthalten sind. Mit Hilfe dieser Anzahlen konnte er eine geschlossene Darstellung für $\frac{d\eta}{d\xi}$ beweisen, in der die Verzweigungsdivisoren der beiden Funktionen $\eta$ und $\xi$ vorkommen.
Ist ein Differential $d\omega = \zeta_x dx$ gegeben, so betrachtete Hensel die Transformation des Integranden bei einer Variablentransformation. Er ordnete dem Differential den Divisor $W = \zeta_x \frac{\mathcal{Z}_x}{n_x^2}$ zu, der unabhängig von der gewählten Variable $x$ ist.[141] Alle Divisoren dieser Form sind äquivalent, entsprechen Differentialen und bilden daher die Differentialklasse.
Der Divisor $W$ beschreibt das Verhalten des dem Differential entsprechenden Integrals: Sagt man, das Integral verhalte sich an der Stelle $P$ regulär, wenn es, vermindert um die Integrationskonstante, von erster Ordnung verschwindet, so enthält der Divisor $W$ alle Stellen, an denen sich das Integral nicht regulär verhält. Der Zähler von $W$ enthält die Stellen, an denen das Integral von höherer Ordnung verschwindet, der Nenner diejenigen, wo es einen Pol hat.

Die Bestimmung aller Differentiale, deren Integrale vorgeschriebene Irregularitäten haben (z.B. keine Pole), entspricht daher der Ermittlung aller Differentiale, deren Divisor $\zeta_x \frac{\mathcal{Z}_x}{n_x^2}$ ein Vielfaches eines vorgegebenen Divisors $D$ ist. Hierfür hatte Hensel die komplementären Basen bereitgestellt: Er bestimmte

[141] Dabei ist $\mathcal{Z}_x$ der Verzweigungsdivisor zu $x$ und $n_x$ der Nennerdivisor der Variablen $x$.

zunächst ein Fundamentalsystem für die Vielfachen von $\frac{1}{D}$ und erhielt als komplementäres System ein Fundamentalsystem für die Vielfachen von $\frac{\mathcal{O}}{\mathcal{Z}_x}$. (Die noch offene Bedingung bezüglich des Nennerdivisors von $x$ erforderte anschließend Ordnungsbetrachtungen an einer festen Stelle $x = a_0$.)

Die Frage nach den Differentialen, deren Divisor ein Vielfaches von $D$ ist, läßt sich auch als die Frage nach den Divisoren $E$ formulieren, für die $DE$ ein Differential ist. Da die Anzahl der linear unabhängigen Differentiale, die diese Bedingung erfüllen, nur von der Klasse von $D$ abhängt, heißen zwei Klassen Ergänzungsklassen, wenn ihr Produkt die Differentialklasse ist. Der Satz von Riemann-Roch beschreibt, wie die Dimensionen von Ergänzungsklassen zusammenhängen. Hensel bewies ihn unter Benutzung komplementärer Basen. Die Dimension der Ergänzungsklasse zu einer Klasse $C$ hängt von Dimension und Grad der Klasse $C$, sowie dem Geschlecht des Körpers ab.
Die Anwendung des Satzes von Riemann-Roch auf einige einfache Divisoren führte Hensel zu der Aussage, daß es keine Abelschen Integrale gibt, die nur an einer Stelle logarithmisch unendlich werden, aber solche, die nur an zwei Punkten bzw. an nur an einem Punkt von höherer Ordnung unendlich werden.

**Hensels Einleitung und seine Schlußbemerkungen**

Die vorgestellte Gliederung läßt sich auch aus Hensels Einleitung entnehmen. Er schrieb, er habe die Form der Darstellung gewählt, die ihm "als die einfachste erscheint, um diese Theorie in voller Strenge und in voller Allgemeinheit zu entwickeln."[142] Anschließend rechtfertigte er die Benutzung der Potenzreihenentwicklungen mit der Aussage, er habe für diese "einen Beweis gefunden, welcher ausser dem einfachsten Convergenzcriterium für eine Reihe kein einziges Resultat der Analysis benutzt, und für den daher alle sonst sich darbietenden Schwierigkeiten bei dem Auftreten höherer Singularitäten gar nicht erst in Frage kommen."[143] Für diesen Beweis verwies er sowohl auf das Lehrbuch [Hensel/Landsberg, 1902], als auch auf seine ausführliche Arbeit über die algebraischen Funktionen zweier Variablen [38, 1900]. Die folgende Fundamentalaufgabe sah er im Mittelpunkt seiner Theorie:

> Es soll ein vollständiges System linear unabhängiger rationaler Functionen von $x$ und $y$ gefunden werden, welche in $h$ beliebig gegebenen Punkten $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_h$ der Riemann'schen Fläche mindestens die Ordnungszahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ besitzen und sich in allen anderen Punkten jener Fläche regulär verhalten.[144]

Hensel hob hervor, daß er ein *endliches* Verfahren zur Lösung dieser Aufgabe vorstelle, welches ohne Vorbereitungen durchgeführt werden kann:

> Dass diese Aufgabe hier ganz im Anfange der Theorie gelöst wird, während ihre Lösung sonst schon die Theorie der Abel'schen Integrale, die Zerschneidung der Riemann'schen Fläche, den Riemann-Roch'schen Satz, und, im Falle höherer Singularitäten, ihre Auflösung durch birationale Transformation erfordert, erscheint mir als ein wesentlicher Vorzug des hier eingeschlagenen Weges.[145]

Setzt man $\mathcal{O} = \mathcal{P}_1^{\lambda_1} \mathcal{P}_2^{\lambda_2} \ldots \mathcal{P}_h^{\lambda_h}$, so läßt sich die obige Aufgabe folgendermaßen formulieren:

> Es soll ein Fundamentalsystem für alle linear unabhängigen Multipla eines beliebig gegebenen Divisors $\mathcal{O}$ innerhalb eines Körpers $K(x, y)$ gefunden werden.[146]

[142] [39, 1901, 437].
[143] [39, 1901, 437].
[144] [39, 1901, 438].
[145] [39, 1901, 438]. Die Bestimmung der Potenzreihenentwicklung schließt dabei die Bestimmung der Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche ein.
[146] [39, 1901, 438].

Auf diese läßt sich die "allgemeinste Aufgabe der Theorie der algebraischen Functionen":

> Es soll ein vollständiges System aller unabhängigen Multipla eines Divisors $\mathcal{O}$ innerhalb einer beliebigen Divisorenclasse $R$ gefunden werden.[147]

leicht zurückführen. Hensel hob hervor, daß die Anzahl dieser linear unabhängigen Multipla nur von der Klasse $Q$ von $\mathcal{O}$ abhängt, nannte diese Anzahl $\left\{\frac{R}{Q}\right\}$ und bezeichnete alle entsprechenden Anzahlen als "die wichtigste[n] und allgemeinste[n] Invariante[n] der algebraischen Körper."[148]

Ordnet man einem Differential den Divisor aus denjenigen Punkten zu, "in denen sich das zugehörige Integral nicht normal verhält,"[149] so liegen die entsprechenden Divisoren in einer Klasse, und man erkennt,

> dass von diesem Standpunkte aus die Betrachtung der rationalen Functionen von $x$ und $y$ einerseits und die Theorie der Abel'schen Integrale andererseits nur zwei specielle Fälle eines und desselben Problems sind, nämlich der Untersuchung aller Divisoren einer und derselben Classe.[150]

Die allgemeinste Frage der Theorie der Abelschen Integrale führe dann auf die oben angesprochene Bestimmung von $\left\{\frac{R}{Q}\right\}$, wobei als Divisorenklasse $R$ die Differentialklasse $W$ zu setzen sei. Aus der Betrachtung der Anzahlen $\left\{\frac{W}{Q}\right\}$ könne man "unmittelbar den Riemann-Roch'schen Satz in seiner allgemeinsten Form ablesen" und setzt man den Divisor $\mathcal{O}$

> speciell gleich 1 oder gleich $\frac{1}{\mathcal{P}^m}$ oder gleich $\frac{1}{\mathcal{P}\mathcal{P}'}$, so erhält man die Elementarintegrale erster, zweiter und dritter Gattung, und hieraus folgt ohne Weiteres die Darstellung jedes beliebigen Integrals durch jene einfachsten Integrale.[151]

In seinen Schlußbemerkungen faßte Hensel zusammen, er habe "alle in dieser Theorie sich darbietenden Aufgabe auf *ein* Grundproblem" zurückgeführt und dieses könne man "*mit rein arithmetischen Hülfsmitteln* lösen."[152] Weiter erwähnte er ausdrücklich,

> dass sich eine Theorie der *ganzen* Divisoren nebst ihrer Anwendung auf ganz anderer Grundlage und in ganz anderer Behandlung in der classischen Abhandlung der Herren *Dedekind* und *Weber* im 92. Bande des Crelle'schen Journals findet, deren sonstige Vorzüge hier nicht noch einmal hervorgehoben zu werden brauchen.[153]

Demgegenüber betonte er die Neuheit seiner Resultate folgendermaßen:

> Von den Hauptresultaten dieser Arbeit sind die Sätze über die algebraischen Systeme und Moduln, über ihre Transformation in reguläre Systeme, und der Satz über die charakteristischen Eigenschaften des Fundamentalsystems für ein Ideal noch nicht gegeben worden; dasselbe gilt von der allgemeinen Theorie der (ganzen *und* gebrochenen) Divisoren, ihrer Eintheilung in Classen, und von der Aufstellung des Grundproblems dieser Theorie und seiner Anwendung auf die der Abel'schen Integrale.[154]

---

[147] [39, 1901, 439].

[148] [39, 1901, 439]. Hensels genaue Formulierung, $\left\{\frac{R}{Q}\right\}$ " sei die wichtigste und allgemeinste Invariante der algebraischen Körper," ist etwas mißverständlich.

[149] [39, 1901, 439].

[150] [39, 1901, 439].

[151] Beide [39, 1901, 440].

[152] [39, 1901, 497].

[153] [39, 1901, 497], [Dedekind/Weber, 1882].

[154] [39, 1901, 497].

### 4.3.2 Grundlagen

Da Hensel im ersten Teil der Untersuchung wirklich mit den Potenzreihen arbeitete, wird dieser relativ ausführlich Paragraph für Paragraph dargestellt, um einen Vergleich mit den entsprechenden Abschnitten seiner parallel zur Theorie der algebraischen Zahlen geschriebenen Arbeit [40, 1902] zu ermöglichen.

#### Die lokalen Teiler und der Begriff des regulären Systems

Der erste Paragraph beginnt mit der Beschreibung des Untersuchungsobjekts, des Körpers $K(x, y)$

> aller rationalen Functionen von $x$ und $y$ unter der Voraussetzung, dass $y$ mit $x$ durch eine beliebige irreductible Gleichung $a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)a + a_0(x) = 0$ verbunden ist, deren Coefficienten beliebige rationale Functionen der unabhängigen Variabeln $x$ sind .[155]

Hensel setzte aus "den Elementen der Functionentheorie" voraus, "dass jede Function $\eta = \varphi(x, y)$ jenes Körpers auf einer gewissen $n$-blättrigen Riemann'schen Kugelfläche $\mathcal{K}$ eindeutig ist"[156] und in der Umgebung jedes Punktes dieser Fläche in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, die nach Potenzen von $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$ fortschreitet, wenn dieser Punkt über $x = a$ liegt und in diesem Punkt $\alpha$ Blätter zusammenhängen.[157]

Beginnt die Entwicklung mit $(x-a)^{\frac{\lambda}{\alpha}}$, so hat $\eta$ in diesem Punkt die *Ordnung* $\lambda$, die positiv, Null oder negativ sein kann. Ist die Ordnung größer oder gleich Null, so heißt die Funktion an dieser Stelle *regulär*. Der *Teiler von* $\eta$ *für die Stelle* $a$ ist der größte gemeinsame Teiler der $n$ Entwicklungen an dieser Stelle, der Exponent von $(x-a)$ dieses Teilers also das Minimum der (gebrochenen) Exponenten in den Entwicklungen.

Hensel führte zur Vereinfachung die Konvention ein, daß über $x = a$ genau drei Verzweigungspunkte $V_\alpha, V_\beta$ und $V_\gamma$ liegen, an denen $\alpha, \beta$ bzw. $\gamma$ Blätter zusammenhängen, so daß $\alpha + \beta + \gamma = n$ ist. Der Zusammenhang zwischen den Konjugierten von $\eta$ und den Entwicklungen war für Hensel selbstverständlich:

> Alsdann schreiten die Entwicklungen der $n$ conjugirten Zweige $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)}$ einer beliebigen algebraischen Function in der Umgebung der Stelle $(x = a)$ nach ganzen Potenzen bzw. von $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$, $(x-a)^{\frac{1}{\beta}}$, $(x-a)^{\frac{1}{\gamma}}$ fort, und zwar ergeben sich die Entwicklungen von $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(\alpha)}$ aus der von $\eta^{(1)}$ dadurch, dass man die Potenz $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$ durch ihre $\alpha$ conjugirten ersetzt, welche sich ja nur durch Einheitswurzeln voneinander unterscheiden.[158]

Der Teiler hat dann die Gestalt $(x-a)^{\frac{r}{\mu}}$, wobei $\mu$ das kleinste gemeinsame Vielfache von $\alpha, \beta$ und $\gamma$ ist. Er ist "die höchste Potenz von $(x-a)$, für welche der Bruch $\frac{\eta}{(x-a)^{\frac{r}{\mu}}}$ an jener Stelle noch regulär ist."[159]

Im zweiten Paragraphen betrachtete Hensel $n$-elementige linear unabhängige Systeme $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ und den von diesen erzeugten Teilbereich bzw. " 'Modul' in der Dedekind'schen Terminologie"[160] $(\mathcal{A})$ der Elemente $\eta = u_1\eta_1 + \cdots + u_n\eta_n$, wobei die $u_i$ ganze rationale Funktionen von $x$ sind. Er nannte $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ eine "*Basis* für den Bereich oder Modul $(\mathcal{A})$."[161] Zwei solche Systeme heißen *äquivalent*, wenn sie den

[155] [39, 1901, 440].
[156] [39, 1901, 440].
[157] Bzw. nach $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, wenn $x$ in diesem Punkt unendlich ist, [39, 1901, 441].
[158] [39, 1901, 441].
[159] [39, 1901, 442].
[160] [39, 1901, 443].
[161] [39, 1901, 443].

gleichen Modul erzeugen. Dies ist genau dann der Fall, wenn sich die Determinanten $\left|\eta_i^{(\kappa)}\right|$ ihrer Konjugiertenmatrizen nur um eine Konstante unterscheiden. Hensel betrachtete diese Determinante in der Umgebung der Stelle $(x = a)$ und ersetzte dazu die Konjugierten durch ihre Entwicklungen.[162] Sind $(x-a)^{\frac{r_i}{\mu}}$ die Teiler von $\eta_i$ und $a_{ki}$ die Koeffizienten von $(x-a)^{\frac{r_i}{\mu}}$ in der Entwicklung von $\eta_i^{(k)}$, also die Anfangskoeffizienten dieser Entwicklungen (die nicht alle Null sind), so beginnt die Entwicklung von $D = \left|\eta_i^{(\kappa)}\right|$ mit $|a_{ki}|(x-a)^{\frac{r_1+\cdots+r_n}{\mu}}$. $D$ ist also genau dann genau durch $(x-a)^{\frac{r_1+\cdots+r_n}{\mu}}$ teilbar, wenn $|a_{ki}| \neq 0$ ist. Dann heißt das System *regulär für die Stelle* $(x = a)$ und der Teiler einer Linearkombination $\eta = u_1\eta_1 + \cdots + u_n\eta_n$ für die Stelle $a$ ist gleich dem größten gemeinsamen Teiler der Teiler ihrer Summanden $u_i\eta_i$.

Eine wesentliche Vereinfachung gegenüber dem äquivalenten Begriff des kanonischen Systems liegt darin, daß hier nicht das ganze Element, sondern nur der Anfangskoeffizient einer schon angepaßten Entwicklung berücksichtigt werden muß.

### Die Überführung in Blockdiagonalgestalt

Der dritte Paragraph enthält einen Algorithmus, um ein beliebiges System in ein äquivalentes, an der Stelle $(x = a)$ reguläres System zu überführen. Dieser Algorithmus wird hier ausführlich vorgestellt, um ihn später mit dem etwas komplizierteren Algorithmus im Fall der algebraischen Zahlen vergleichen zu können. Das Prinzip ist, das System $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ so anzuordnen, daß die Teiler an $x = a$ monoton wachsen: $\frac{r_1}{\mu} \leq \frac{r_2}{\mu} \cdots \leq \frac{r_n}{\mu}$. Anschließend werden Vielfache früherer Spalten von $\left|\eta_i^{(\kappa)}\right|$ von späteren abgezogen, wenn die Exponenten der Teiler sich um eine ganze Potenz von $(x-a)$ unterscheiden. (Zwei Brüche, die sich um eine ganze Zahl unterscheiden, heißen *kongruent*.)

Der Algorithmus arbeitet nur mit den Anfangskoeffizienten und berücksichtigt zu jedem Verzweigungspunkt genau eine Zeile. Wird während der Durchführung des Algorithmus eine Spalte komplett Null, so bedeutet dies, daß ihr Teiler gestiegen ist. Dann muß der neue Teiler bestimmt und das Element neu einsortiert werden.

Gehöre die erste Zeile zu $V_\alpha$, die zweite zu $V_\beta$ und die dritte zu $V_\gamma$. Hensel begann seinen Algorithmus in der ersten Spalte. Man wählt das erste von Null verschiedene Element dieser Spalte und normiert es zu Eins, indem man die dazugehörige Funktion durch den Koeffizienten teilt, was natürlich auch die anderen Anfangskoeffizienten dieser Spalte verändert. Anschließend macht man alle Elemente dieser Zeile, "für welche die zugehörigen Exponenten $\frac{r_i}{\mu}$ zu $\frac{r_1}{\mu}$ congruent sind, dadurch zu Null, dass man von der betreffenden Colonne ein geeignetes Multiplum der ersten abzieht."[163] Dann wählt man das erste von Null verschiedene Element der zweiten Spalte, normiert auch dieses zu Eins und macht alle folgenden Elemente der Zeile zu Null, die einen kongruenten Teilerexponenten haben usw. Da das ursprüngliche System linear unabhängig war, kann während dieses Vorgangs keine echte Nullspalte entstehen. Deshalb stehen am Ende des Verfahrens in der ersten Zeile genau $\alpha$ Elemente. Die Exponenten von deren Teilern haben alle den Nenner $\alpha$ und in den Resten der Exponenten tritt jeder der Reste $0, \frac{1}{\alpha}, \ldots, \frac{\alpha-1}{\alpha}$ genau einmal auf. Entsprechend ist es mit der zweiten und dritten Zeile.

[162] [39, 1901, 443].
[163] [39, 1901, 447].

Das bei diesen Transformationen entstandene System ist regulär: Um dies nachzuweisen, sortiert man die Elemente so, daß zuerst alle Elemente kommen, deren Teilerexponent ein Rest mit Nenner $\alpha$ ist, dann die, deren Teilerexponent den Nenner $\beta$ hat und dann die mit Teilerexponent mit Nenner $\gamma$. Fügt man die weggelassenen Zeilen der zugehörigen Konjugierten wieder hinzu, so erhält man eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} S_\alpha & 0 & \dots & 0 \\ * & S_\beta & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ * & * & \dots & S_\kappa \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad S_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{i-1} & \omega_2^{i-1} & \dots & \omega_i^{i-1} \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die $\omega_j$ paarweise verschiedene $i$-te Einheitswurzeln.[164] Deshalb ist $|S_i| = i^{\frac{i}{2}} \neq 0$ gleich der Wurzel aus der Diskriminante der Kreisteilungsgleichung. Die Determinante der ganzen Koeffizientenmatrix ist daher ebenfalls von Null verschieden, das System also regulär.

Im vierten Paragraphen verkürzte Hensel zunächst die Ausdrucksweise für die in der Einleitung formulierte Fundamentalaufgabe:[165] Eine Funktion *gehört zum Punktsystem* $\mathcal{P}_1^{\lambda_1}\mathcal{P}_2^{\lambda_2}\dots\mathcal{P}_h^{\lambda_h}$, wenn sie in jedem $\mathcal{P}_i$ mindestens Ordnung $\lambda_i$ hat und in den übrigen Punkten regulär ist. Die Aufgabe ist dann, alle Funktionen zu finden, die zu einem gegebenen Punktsystem gehören. Hensel löste zuerst eine einfachere Aufgabe, die den Punkt $\infty$ nicht berücksichtigt:[166]

> Es sollen alle Functionen des Körpers $k(x, y)$ gefunden werden, welche in den $h$ im Endlichen liegenden Punkten $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_h$ bzw. mindestens die Ordnungszahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ besitzen und sonst für alle *im Endlichen liegenden* Punkte regulär sind.[167]

Die Funktionen, die diese Bedingungen erfüllen, bilden "einen Bereich $(J)$, ein 'Ideal' in der Dedekind'schen Terminologie."[168] Hensel zeigte, daß mit linear unabhängigen Elementen $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ aus $(J)$ auch der von diesen erzeugte Modul in $(J)$ liegt und nannte das System ein *Fundamentalsystem für* $(J)$, wenn der erzeugte Modul mit $(J)$ übereinstimmt.

Hensels Ziel war es, zunächst ein *Fundamentalsystem für* $(J)$ *in Bezug auf die Stelle* $(x = a)$ zu konstruieren und damit den folgenden Satz zu beweisen:

> Jede zu $(J)$ gehörige Basis $(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n)$ kann in eine andere transformirt werden, welche in lauter Partialsysteme, entsprechend den an der betrachteten Stelle übereinander liegenden Punkten $V_\alpha, V_\beta, V_\gamma$, zerfällt, und deren Ordnungen $\varrho, \sigma, \tau$ gleich denen sind, welche die zugehörigen Punkte in dem Bereiche $(J)$ besitzen.[169]

Ein *Partialsystem von der Ordnung* $\varrho$ *für den Punkt* $V_\alpha$ ist dabei ein System von $\alpha$ Elementen, dessen Entwicklungen um $V_\alpha$ die Ordnungen $\varrho, \varrho+1, \dots, \varrho+\alpha-1$, "aber für alle darüber liegenden Punkte der Riemann'schen Fläche $V_\beta, V_\gamma$ die Ordnung $\infty$ haben."[170]

---

[164] Entspricht $\omega$ der Spalte mit Teilerrest $\frac{1}{i}$, so entspricht dem Teilerrest $\frac{k}{i}$ der Koeffizient $\omega^k$. Da alle Teilerreste inkongruent sind, sind die $\omega_j$ paarweise verschiedene Potenzen einer primitiven $i$-ten Einheitswurzel und daher paarweise verschieden.

[165] Zitiert in 4.3.1 mit FN 140.

[166] Dementsprechend nahm Hensel an, daß weder Punkte des Punktsystems noch Verzweigungspunkte über $\infty$ liegen, [39, 1901, 450].

[167] [39, 1901, 450].

[168] [39, 1901, 450].

[169] [39, 1901, 452]. Der letzte Teilsatz ist vielleicht mißverständlich formuliert: Es geht um die Exponenten der Punkte $V_\alpha, V_\beta, V_\gamma$ in der Definition von $(J)$.

[170] [39, 1901, 452], die Ausdrucksweise "Ordnung $\infty$" gebrauchte Hensel im nächsten Zitat im Sinne von beliebig hoch, s.u.

Hensel überführte das gegebene System mit dem obigen Algorithmus in ein äquivalentes, für die Stelle $(x = a)$ reguläres System. Dann bilden die Exponenten der Teiler ein volles System inkongruenter Brüche mit Nenner $\alpha$, die alle größer als $\frac{\varrho}{\alpha}$ sind, da alle Elemente weiterhin in $(J)$ liegen usw.
Anschließend ging er zu einem Fundamentalsystem für $(J)$ in Bezug auf die Stelle $(x = a)$ über, welches er anschließend so modifizierte, daß die zugeordnete Matrix Blockdiagonalgestalt hat: Dazu begann er diesmal rechts. Er dividierte jedes Element, das zum letzten Diagonalblock, also zu $V_\gamma$, gehört, durch eine solche ganze Potenz von $(x - a)$, daß es den gewünschten Teiler $(x - a)^{\frac{\tau+i}{\gamma}}$ $(i = 0, \ldots, \gamma - 1)$ hat. Anschließend zog er von den ersten $\alpha + \beta$ Elementen solche rationale Vielfache der letzten $\gamma$ Elemente ab, daß die Ordnung von deren Entwicklungen an $V_\gamma$ steigt.[171]

> Geht man in derselben Weise fort, so erhält man schliesslich ein neues System, dessen $\alpha + \beta$ erste Elemente in $V_\gamma$ in der That von beliebig hoher Ordnung, also von der Ordnung $\infty$ sind.[172]

Anschließend wiederholte er das gleiche für die zum nächsten Block gehörigen Elemente, bis er bei $V_\alpha$ ankam.[173]

### Die Diskriminante und ein (absolutes) Fundamentalsystem

Im fünften Paragraphen begründete Hensel die bereits benutzte Bezeichnung *Fundamentalsystem für die Stelle* $(x = a)$ mit der folgenden Eigenschaft des so erhaltenen Systems $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$:

> Eine algebraische Function $\zeta = u_1\zeta_1 + \cdots + u_n\zeta_n$ kann nur dann dem Bereiche $(J)$ angehören, wenn alle Coefficienten $u_1, u_2, \ldots, u_n$ an der Stelle $(x = a)$ endlich sind, wenn also keiner derselben den Linearfaktor $x - a$ im Nenner enthält.[174]

Aus dem Beweis dieses Satzes läßt sich ablesen, welche Ordnung die ersten $\alpha + \beta$ Elemente an $V_\gamma$ tatsächlich haben müssen, damit das System ein Fundamentalsystem sein kann.[175]
Wäre die Aussage falsch, so gäbe es eine Funktion

$$\zeta = \frac{c_1\zeta_1 + c_2\zeta_2 + \cdots + c_n\zeta_n}{x - a}$$

in (J), wobei die $c_i$ nicht sämtlich verschwindende Konstanten sind. Ist dann $c_i$ die erste nichtverschwindende Konstante, so wies Hensel nach, daß $\zeta$ an dem zu $\zeta_i$ gehörenden Verzweigungspunkt nicht regulär sein kann. Sei dazu dieser Verzweigungspunkt $V_\gamma$. Die wesentliche Aussage ist, daß sich die Entwicklungen der zu den Verzweigungspunkten $V_\alpha$ und $V_\beta$ gehörigen $\zeta_j$ am Verzweigungspunkt $V_\gamma$ nicht mit der dortigen Entwicklung von $\zeta_i$ wegheben können.
Dazu ist ausreichend, daß diese Entwicklungen mit $c(x - a)^{\frac{\tau}{\gamma}+1}$ beginnen, also mindestens die Ordnung $\tau + \gamma$ haben. Dann beginnt die Entwicklung von $\zeta_i$ mit $c_i(x - a)^{\frac{\tau+k}{\gamma}}$ für ein $0 \leq k < \gamma$, die von $\zeta$ also mit

[171] In jedem Schritt kann man einen Koeffizienten einer Entwicklung an $V_\gamma$ zu Null machen, womit auch die entsprechenden Koeffizienten der $\gamma$ Konjugierten verschwinden. Man wählt ein Element, dessen erste Koeffizienten der Entwicklungen um $V_\gamma$ man beseitigen will, sucht dasjenige unter den letzten $\gamma$ Elementen, dessen Teiler einen kongruenten Exponenten hat und zieht dessen entsprechendes Vielfaches ab.
[172] [39, 1901, 454].
[173] Hat man gerade die Elemente des Blocks $S_i$ durch geeignete Potenzen von $(x - a)$ geteilt, so stehen über diesem Block nach dem ersten Teil des Verfahrens nur Nullen. Nach dem bereits ausgeführten Teil des zweiten Teils des Verfahrens stehen auch unter diesem Block nur Nullen. Die beschriebenen Operationen verändern daher nur die Entwicklungen an $V_i$.
[174] [39, 1901, 455].
[175] Hensel hatte die Ordnung $\infty$ gefordert und arbeitete auch mit ihr. Die praktisch relevantere Aussage, nach wieviel Schritten man den Algorithmus abbrechen kann, wurde hier eingefügt, obwohl Hensel sie nicht explizit angab.

$c_i(x-a)^{\frac{\tau+k}{\gamma}-1}$ und daher liegt $\zeta$ nicht in $(J)$.

Da nun jedes Fundamentalsystem $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ für die Stelle $(x = a)$ den Faktor $(x - a)$ gleich oft in der Determinante $|\eta_i^{(\kappa)}|$ enthält, kann man diese Potenz aus einem in Partialsysteme zerfallenden System berechnen und dabei

> können nämlich alle diejenigen Elemente $\eta_i^{(\kappa)}$ einfach durch Null ersetzt werden, deren Ordnung an den betrachteten Stellen $V_\alpha, V_\beta, V_\gamma$ unendlich gross ist.[176]

Dadurch erreichte Hensel die gewünschte Blockdiagonalform.[177] Die Determinante dieser Matrix ist gleich dem Produkt der Determinanten der Partialsysteme.

Der Exponent von $(x-a)$ in der Determinante eines Partialsystems ist gleich der Summe der Exponenten der Teiler, d.h. für ein Partialsystem zu $V_\alpha$ ist sie $\frac{\varrho}{\alpha} + \frac{\varrho+1}{\alpha} + \cdots + \frac{\varrho+\alpha-1}{\alpha} = \varrho + \frac{\alpha-1}{2}$.

Die Determinante des Fundamentalsystems für die Stelle $(x = a)$ enthält daher den Faktor $(x - a)$ mit dem Exponenten $r + \frac{o}{2}$, worin $r$ die Summe der Ordnungszahlen der über $x = a$ liegenden Punkte in dem das Ideal beschreibenden Punktsystem bedeutet und $o = \sum(\alpha - 1)$ die Summe der Verzweigungszahlen der darin enthaltenen Punkte über $x = a$ ist.[178]

Die vorgenommene Umformung für die Stelle $(x = a)$ ändert nur den Exponenten von $(x - a)$ in der Determinante des Systems, so daß man von einer beliebigen Basis in $(J)$ ausgehend, diese Umformung schrittweise für alle Linearfaktoren durchführen kann, für die der Exponent noch nicht den richtigen Wert $r + \frac{o}{2}$ hat,

> und so gelangt man *nach einer endlichen Anzahl* von solchen Reductionen zu einem Systeme $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, welches für *jede* endliche Stellen von $\mathcal{K}$ ein Fundamentalsystem für den Bereich $(J)$ ist; dieses System ist also ein absolutes Fundamentalsystem für $(J)$.[179]

### Schlußfolgerungen

Im sechsten Paragraphen zog Hensel Schlußfolgerungen aus den erhaltenen Resultaten. Dazu betrachtete er die Summe der ersten Funktionen der jeweiligen Partialsysteme. Dies ist eine Funktion, die in jedem Punkt über $(x = a)$ genau die Ordnungszahl hat, mit der der Punkt im Punktsystem $\mathcal{O}$ vorkommt. Sie heißt deshalb eine *zugehörige Function* $\xi_a$. Aus diesen kombinierte Hensel eine *zu* $\mathcal{O}$ *zugeordnete Function* $\xi_{\mathcal{O}}$, "welche in jedem Punkte $\mathcal{P}_i$ eines Punktsystemes $\mathcal{O} = \mathcal{P}_1^{\lambda_1} \ldots \mathcal{P}_h^{\lambda_h}$ *genau* von der Ordnung $\lambda_i$ ist."[180]

Dazu nutzte er $T(x) = (x - a)^r(x - b)^s \ldots (x - c)^t$, wobei die $r, s, t$ so groß gewählt sind, daß $T(x)$ in jedem $\mathcal{P}_i$ von größerer Ordnung als $\lambda_i$ ist, und setzte

$$\xi_{\mathcal{O}} = \xi_a \frac{T(x)}{(x-a)^r} + \xi_b \frac{T(x)}{(x-b)^s} + \cdots + \xi_c \frac{T(x)}{(x-c)^t}.$$

Hensel bestimmte zwei spezielle zugeordnete Funktionen. Sind $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_\nu$ alle Punkte über $(x = a)$ und betrachtet man das Punktsystem $\mathcal{O} = \mathcal{P}_2 \ldots \mathcal{P}_\nu$, so ist dessen zugeordnete Funktion in $P_1$ endlich und von Null verschieden, während sie in allen anderen Punkten über $(x = a)$ verschwindet.

---

176 [39, 1901, 456]. Für diese Berechnung bräuchte man die Ordnung nicht unendlich groß machen, denn der zweite Teil des Verfahrens ändert die Determinante gar nicht, da auch die Determinante einer unteren Blockdreiecksmatrix gleich dem Produkt der Determinanten dieser Blöcke ist.

177 Eine solche hatte er zuvor schon im zahlentheoretischen Fall angestrebt, vgl. z.B. 4.2.4.

178 Hat ein Punkt die Vielfachheit $\alpha$, so ist seine Verzweigungszahl $\alpha - 1$, so daß Punkte, die keine Verzweigungspunkte sind, keinen Beitrag leisten.

179 [39, 1901, 456].

180 [39, 1901, 456].

Ebenso ergibt $\mathcal{O}' = \mathcal{P}_1$ eine zugeordnete Funktion, die in $\mathcal{P}_1$ genau von der ersten Ordnung ist.[181]

Hensel wies darauf hin, daß man auch aus einem gegebenen Fundamentalsystem das dazugehörige Punktsystem bestimmen kann:

> Ein System $(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$ ist dann und nur dann ein Fundamentalsystem für ein Punktsystem, wenn es für jede endliche Stelle $(x = a)$ einem anderen äquivalent ist, welches entsprechend den jener Stelle zugehörigen Punkten $V_\alpha, V_\beta, \dots V_\gamma$ der Riemann'schen Fläche in lauter Partialsysteme zerfällt. Ist dann für einen beliebigen Punkt $\mathcal{P}$ das zugehörige Partialsystem von der Ordnung $\lambda$, so enthält das Punktsystem $\mathcal{O}$ genau die $\lambda^{\text{te}}$ Potenz von $\mathcal{P}$, d.h. es ist: $\mathcal{O} = \prod \mathcal{P}^\lambda$, wo das Product offenbar nur über diejenigen Punkte $\mathcal{P}$ erstreckt zu werden braucht, für welche die Ordnungszahlen $\lambda$ von Null verschieden sind.[182]

Ob das System äquivalent zu einem in Partialsysteme zerfallenden ist, kann man dabei entscheiden, indem man überprüft, ob die unendlichschrittige Umformung in ein Blockdiagonalsystem möglich wäre. Dazu müssen die Teiler lückenlose Sequenzen bilden und alle Elemente des Systems durch die Potenzen der Divisoren teilbar sein, die diesen Sequenzen entsprechen.
Anschließend definierte Hensel die *Norm eines Punktsystems* $\mathcal{O} = \mathcal{P}_1^{\lambda_1} \dots \mathcal{P}_h^{\lambda_h}$, indem er jedem Punkt des Systems den Linearfaktor des darunterliegenden Punkts mit der entsprechenden Vielfachheit zuordnete: $N(\mathcal{O}) = (x - a_1)^{\lambda_1} \dots (x - a_h)^{\lambda_h}$.
Dies ermöglichte die einfache Gleichung $D(\mathcal{O}) = N(\mathcal{O})D(1)$, die die Determinante eines Fundamentalsystems für ein Punktsystem $\mathcal{O}$ mit der eines Fundamentalsystems für das leere Punktsystem verbindet. Der Grad von $D(1)$ ist $\frac{w}{2} = \frac{1}{2}\sum(\alpha - 1)$, der von $N(\mathcal{O})$ ist $l = \lambda_1 + \dots \lambda_h$ und damit ist der Grad von $D(\mathcal{O})$ gleich $l + \frac{w}{2}$.[183] Dabei heißt $w$ die *Verzweigungszahl* der Riemannschen Fläche $\mathcal{K}$.

### Das Verzweigungssystem

Im siebenten Paragraphen betrachtete Hensel zu einem beliebigen System $(\eta_i^{(\kappa)})$ mit nichtverschwindender Determinante das *komplementäre System* $((\eta_i^{(\kappa)})^{-1})^T$ zu $(\eta_i^{(\kappa)})$, wobei die inverse Matrix transponiert wird.
Zunächst zeigte er, daß die Zeilen des komplementären Systems durch die gleiche Konjugation (in seiner Terminologie: "Vertauschung von $y_1$ mit $y_j$"[184]) aus der ersten hervorgehen, wie die des ursprünglichen Systems, wenn dieses aus $n$ Elementen und ihren Konjugierten bestanden hatte.
In diesem Fall besteht auch das komplementäre System aus $n$ Funktionen und ihren Konjugierten, wovon Hensel im Folgenden ausging. Er zeigte weiter, daß die komplementären Systeme zweier äquivalenter Systeme ebenfalls äquivalent sind. Ist ein System an einer beliebigen Stelle $(x = a)$ regulär, so auch das komplementäre. Betrachtet man das komplementäre System zu einem in Partialsysteme zerfallenden System, so zerfällt auch dieses in Partialsysteme, und die Teiler sind das Negative der Teiler des ursprünglichen Systems.[185]
Gehörte das Partialsystem der Ordnung $\varrho$ also zu einem Verzweigungspunkt $V_\alpha$, so hat das komplementäre System die Ordnung $\overline{\varrho} = -(\varrho + \alpha - 1)$, da sich die Ordnung nach dem kleinsten Teiler in der

[181] [39, 1901, 458]. Die Existenz solcher Funktionen hatte Hensel in [21, 1895, 936] noch als "beinahe selbstverständlich" vorausgesetzt.
[182] [39, 1901, 459].
[183] Die Zahl $\frac{w}{2}$ ist ganzzahlig; dies zeigte Hensel im neunten Paragraphen.
[184] [39, 1901, 461].
[185] [39, 1901, 462f]. Die letzte Aussage folgt aus der Cramer-Formel für die Inverse einer Matrix.

fortlaufenden Sequenz richtet.

Um diesen Zusammenhang auch global beschreiben zu können, führte Hensel einen "neuen und für die ganze Theorie sehr wichtigen Begriff" ein,[186] das *Verzweigungssystem des Körpes $K(x, y)$ in Bezug auf $x$*: $\mathcal{Z} = \prod \mathcal{P}_{\alpha}^{\alpha-1}$. Darin kommt jeder Punkt $\mathcal{P}$ der Kugelfläche $\mathcal{K}$ so oft vor, wie seine Verzweigungsordnung $\alpha - 1$ angibt, es kommen also alle und nur die Verzweigungspunkte vor.[187] Mit seiner Hilfe läßt sich der Satz

> Ist $(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n)$ ein Fundamentalsystem für ein beliebiges Punktsystem $\mathcal{O}$, so ist das complementäre $(\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2, \dots \overline{\xi}_n)$ ein Fundamentalsystem für dasjenige Punktsystem $\overline{\mathcal{O}}$, welches mit $\mathcal{O}$ durch die Gleichung $\mathcal{O}\overline{\mathcal{O}} = \frac{1}{\mathcal{Z}}$ verbunden ist.[188]

formulieren, der bewiesen wird, indem jede endliche Stelle einzeln betrachtet wird.

**Rückkehr zur Fundamentalaufgabe**

Im achten Paragraphen wollte Hensel sowohl die Stellen der Riemannschen Fläche als auch die Ordnungszahl einer Funktion an einer Stelle unabhängig von einer ausgezeichneten Variable $x$, d.h. *invariant*, definieren:

> Eine Stelle $\mathcal{P}$ der Riemann'schen Fläche $\mathcal{K}_x$ ist dadurch eindeutig und unabhängig von der zu Grunde gelegten unabhängigen Variablen definirt, dass alle Functionen $z$ des Körpers $K(x, y)$ dort bestimmte constante Werthe $z_0$ erhalten, welche auch Null oder unendlich gross sein können. Umgekehrt ist aber durch die unendlich vielen Gleichungen $z = z_0$ die zugehörige Stelle $\mathcal{P}$ eindeutig bestimmt, denn es giebt nicht zwei Stellen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}'$, wo *jede* Function $z$ des Körpers denselben Werth $z_0$ annimmt.[189]

Um dies zu zeigen, nutzte er die bereits angesprochene spezielle Funktion, die in genau einer der Stellen über $(x = a)$ einen von Null verschiedenen Wert annimmt. Die Existenz einer Funktion $\pi$, die an einer bestimmten Stelle $\mathcal{P}$ die Ordnungszahl Eins hat, nutzte Hensel weiter, um die Ordnungzahl einer Funktion $z$ an dieser Stelle invariant zu definieren, und zwar ist diese $\varrho$, wenn der Quotient $\frac{z}{\pi^{\varrho}}$ an der Stelle $\mathcal{P}$ endlich und von Null verschieden ist.

Im neunten Paragraph bestimmte Hensel mit Hilfe der aufgestellten Fundamentalsysteme die gesuchten, auch am Punkt $\infty$ regulären Funktionen. Er führte zunächst aus, daß die bisher betrachteten Ideale nur Hilfsbegriffe sind:

> Diese zu $\mathcal{O}$ gehörigen Functionen sind für die in der Theorie der algebraischen Functionen auftretenden Fragen allein wesentlich, während die Moduln und Ideale nur Hülfsbegriffe sind. Die Richtigkeit der letzteren Bemerkung erkennt man leicht daraus, dass schon bei einer einfachen gebrochenen Substitution $x' = \frac{1}{x - a_0}$ für die unabhängige Variable, also bei einfacher Verschiebung der Stelle $x = \infty$ auf der Kugelfläche $\mathcal{K}$, sowohl die Moduln als auch die Ideale sich vollständig ändern, während der Bereich aller Multipla eines Divisors $\mathcal{O}$ allein von diesem abhängt und bei jeder umkehrbaren Transformation *beider* Variabeln derselbe bleibt.[190]

In einem ersten Schritt behielt Hensel die bisherige Voraussetzung bei, daß an $\infty$ kein Verzweigungspunkt der Fläche liegt.[191] Sei dann $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ ein Fundamentalsystem für das Ideal $(J)$, das an $(x = \infty)$ regulär

[186] [39, 1901, 463].
[187] [39, 1901, 463].
[188] [39, 1901, 464].
[189] [39, 1901, 465].
[190] [39, 1901, 466].
[191] Vgl. die obige FN 162.

ist, und seien seine Elemente nach absteigenden Ordnungszahlen $r_i$ an $(x = \infty)$ angeordnet. Ist dann $\zeta_s$ die letzte der Funktionen mit positiver Ordnungszahl an $(x = \infty)$, so gilt:

> Alle zu einem Punktsysteme $\mathcal{O}$ gehörigen Functionen, und nur sie, sind in der Form
>
> $$\zeta = u_1\zeta_1 + u_2\zeta_2 + \cdots + u_s\zeta_s$$
>
> enthalten, in welcher die Coeffizienten $u_1, \dots u_s$ beliebige *ganze* Functionen von $x$ bezw. von den Graden $r_1, r_2, \dots, r_s$ sind. [192]

Dabei müssen die $u_i$ ganz sein, weil $\zeta$ sonst nicht im Ideal $(J)$ läge. Andererseits trägt der Grad von $u_i$ aber negativ zur Ordnungszahl an $\infty$ bei, die für jeden Summanden $u_i\zeta_i$ positiv sein muß.
Damit bilden die $x^j\zeta_i\,(j = 0, \dots r_i)$ insgesamt $N = (r_1 + 1) + \dots (r_s + 1)$ Funktionen, durch die jede zu $\mathcal{O}$ gehörige Funktion eindeutig mit konstanten Koeffizienten dargestellt werden kann.
Die Ordnungszahl der Determinante $\left|\zeta_i^{(k)}\right|$ an $\infty$ ist deren negativer Grad, also folgt aus den Berechnungen des sechsten Paragraphen: $r_1 + \dots r_n = -(l + \frac{w}{2})$, insbesondere ist $w$ stets gerade.[193]

Anschließend befreite Hensel sich von der Voraussetzung über $\infty$. Ist $x = a_0$ irgendeine Stelle, über der kein Punkt von $\mathcal{O}$ und kein Verzweigungspunkt liegt, so betrachtete er $x' = \frac{1}{x-a_0}$ und stellte für $x'$ ein Fundamentalsystem auf, das an $x' = \infty$ regulär ist. Habe dieses an $x' = \infty$ bzw. $x = a_0$ die Ordnungszahlen $r_1, \dots, r_s, \dots, r_n$, wobei $r_s$ die letzte positive Ordnungszahl ist.

> [E]rsetzt man dann wieder $x'$ durch $x$, so erhält man in den $N = (r_1 + 1) + \cdots + (r_s + 1)$ Elementen
>
> $$\zeta_i, \frac{\zeta_i}{x - a_0}, \frac{\zeta_i}{(x - a_0)^2}, \dots, \frac{\zeta_i}{(x - a_0)^{r_i}} \qquad (i = 1, 2, \dots s)$$
>
> ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\mathcal{O}$.[194]

Es ist einfach, diese Überlegung zu modifizieren, wenn über $a_0$ kein Verzweigungspunkt liegt, das System $\mathcal{O}$ aber jeden der $n$ Punkte über $x = a_0$ mit der gleichen Vielfachheit $\lambda$ enthält. Sind dann $\zeta_1, \dots, \zeta_\sigma$ die Elemente des analog zum letzten Fall aufgestellten Systems, deren Ordnungszahl größer oder gleich $\lambda$ ist, so bilden die $N_\lambda = (r_1 - \lambda + 1) + \cdots + (r_\sigma - \lambda + 1)$ Elemente $\zeta_i, \frac{\zeta_i}{x-a_0}, \frac{\zeta_i}{(x-a_0)^2}, \dots, \frac{\zeta_i}{(x-a_0)^{r_i-\lambda}} \qquad (i = 1, 2, \dots \sigma)$ ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\mathcal{O}$.[195]

### 4.3.3 Die Divisorentheorie

Die Darstellung der nächsten beiden Teile, die die Ergebnisse des ersten Teils anwenden, soll wesentlich knapper sein, aber doch ausführlich genug, um verständlich zu machen, wie Hensel zu seinen Ergebnissen gelangte.
Zu jedem Punkt $\mathcal{P}$ einer Riemannschen Fläche definierte Hensel einen ebenso bezeichneten Primdivisor und "eine Function $\xi$ ist durch die Potenz $\mathcal{P}^\lambda$ von $\mathcal{P}$ theilbar, wenn sie in dem entsprechenden Punkte die Ordnungszahl $\lambda$ besitzt."[196] Ein *algebraischer Divisor* ist ein Produkt $\mathcal{O} = \mathcal{P}_1^{\lambda_1} \dots \mathcal{P}_h^{\lambda_h}$ mit positiven oder negativen Exponenten. Die Summe dieser Exponenten heißt die *Ordnung* des Divisors. Der Divisor

[192] [39, 1901, 467]. Dies ist so zu verstehen, daß die $u_i$ maximal den angegebenen Grad haben dürfen.
[193] [39, 1901, 467f].
[194] [39, 1901, 468].
[195] [39, 1901, 468].
[196] [39, 1901, 469].

heißt *ganz*, wenn keiner der Exponenten negativ ist, sonst gebrochen. Man kann jeden Divisor als Quotient zweier ganzer Divisoren darstellen. Divisoren werden multipliziert bzw. durcheinander geteilt, indem man die entspechenden Exponenten addiert bzw. voneinander abzieht. Ein Divisor heißt durch einen anderen teilbar, wenn der Quotient ein ganzer Divisor ist.
Jeder Funktion $\xi \in K(x, y)$ ist ein Divisor nullter Ordnung zugeordnet, dessen Nenner durch die Polstellen und dessen Zähler durch die Nullstellen der Funktion mit den entsprechenden Vielfachheiten bestimmt ist. Die Ordnung von Zähler und Nenner dieses Divisors heißt der *Grad* der Funktion.
Hat man einen Primdivisor $\mathcal{P}$ und eine beliebige Funktion $\xi \in K(x, y)$ als Variable gegeben, so kann man bestimmen, was für ein Verzweigungspunkt $\mathcal{P}$ auf der Riemannschen Fläche $\mathcal{K}_\xi$ ist. Dazu bestimmt man den einzigen Linearfaktor $\xi - \xi_0$, der durch $\mathcal{P}$ teilbar ist. Ist dieser dann durch $\mathcal{P}^\alpha$ teilbar, so ist $\mathcal{P}$ ein Verzweigungspunkt der Ordnung $\alpha - 1$, d.h. dort laufen $\alpha$ Blätter von $\mathcal{K}_\xi$ zusammen.
Da jedem Punktsystem $\mathcal{O}$ ein gleichbezeichneter Divisor entspricht, wurde im ersten Teil die Aufgabe gelöst, "alle und nur die linear unabhängigen Multipla eines beliebig gegebenen Divisors zu finden."[197]
Zwei Divisoren $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ heißen *äquivalent*, "wenn sie sich nur um eine beliebige Größe $\xi$ des Körpers $K(x, y)$ unterscheiden, wenn also eine Gleichung $\frac{\mathcal{O}}{\mathcal{O}'} = \xi$ oder $\mathcal{O} = \mathcal{O}'\xi$ besteht."[198] Multiplikation und Division übertragen sich auf die Klassen nach dieser Äquivalenz, die Funktionen des Körpers bilden die "Haupt- oder Einheitsclasse", alle Klassen zusammen bilden eine Gruppe.[199] Äquivalente Divisoren haben die gleiche Ordnung und diese kann daher auch der Klasse zugeordnet werden.

Alle Elemente einer beliebigen Klasse gehen aus denen der Hauptklasse durch Multiplikation mit einem festen Element dieser Klasse hervor. Dieser *Multiplikator* $\mathcal{O}_0$ kann so gewählt werden, daß er beliebig gegebene Primdivisoren weder im Zähler noch im Nenner enthält. Gilt dann $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0\,\xi$, so heißen der Divisor $\mathcal{O}$ und die Funktion $\xi$ einander *zugeordnet*.
Zu $\mu$ beliebigen Funktionen $\xi_i$ der Hauptklasse betrachtete Hensel die Divisoren $\xi = c_1\xi_1 + \dots c_\mu\xi_\mu$ mit Konstanten $c_i$. Ist $D$ der größte gemeinsame Teiler der $\xi_i$, so kann man $\xi = DG$ schreiben. Die Konstanten $c_i$ lassen sich dann so bestimmen, daß $G$ beliebig gegebene Divisoren enthält oder nicht enthält.
Hensel setzte fest,

> dass jede Gleichung zwischen beliebigen Grössen des Körpers oder der Hauptclasse $E$ gültig bleibt, wenn man ihre linke Seite mit einem beliebigen von Null verschiedenen Divisor multiplicirt.[200]

Dies ermöglicht es, Linearkombinationen von Divisoren einer Klasse zu betrachten und $\mu$ Divisoren einer Klasse *linear unabhängig* zu nennen,

> wenn zwischen ihnen keine lineare Relation $c_1\mathcal{O}_1 + c_2\mathcal{O}_2 + \dots + c_\mu\mathcal{O}_\mu = 0$ mit constanten Coefficienten besteht, oder, was dasselbe ist, wenn die $\mu$ zugeordneten Functionen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\mu$ der Hauptclasse linear unabhängig sind.[201]

Bezeichnet $[Q]$ die Menge der ganzen Divisoren einer Klasse, so zeigte Hensel, daß

[197] [39, 1901, 471]. Dabei bezieht sich der Ausdruck "linear unabhängige Multipla" auf die Funktionen, für deren Polstellen maximale und für deren Nullstellen minimale Vielfachheiten durch den Divisor vorgeschrieben sind.
[198] [39, 1901, 472].
[199] [39, 1901, 472f], Hensel benutzte das Wort "Gruppe" nicht, führte aber aus, daß die Hauptklasse neutral ist und gekürzt werden kann.
[200] [39, 1901, 475].
[201] [39, 1901, 476]. Die zugeordneten Funktionen sind dabei abhängig vom Multiplikator, das Bestehen der Gleichung jedoch nicht.

für jede Classe $Q$ nur eine endliche Anzahl linear unabhängiger ganzer Divisoren existiren, durch welche alle anderen homogen und linear dargestellt werden können.[202]

Um solche zu finden, reicht es, zu einem zur Klasse $Q$ gehörigen Multiplikator $\mathcal{O}_0$ ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{1}{\mathcal{O}_0}$ in $K(x,y)$ aufzustellen, und jedes seiner Elemente mit $\mathcal{O}_0$ zu multiplizieren.

Hensel benutzte zur Konstruktion dieses Systems das zum Abschluß von 4.3.2 vorgestellte Verfahren: Sei dazu $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ein Fundamentalsystem für den Divisor $\frac{1}{\mathcal{O}_0}$, das an der Stelle $x = a_0$ regulär ist. Sind dann $r_i$ die Ordnungszahlen der $\xi_i$ in Bezug auf die Stelle $x = a_0$ und sind $\xi_1, \ldots, \xi_s$ die Elemente, deren Ordnungszahl positiv ist, so bilden $\frac{\xi_i}{(x-a_0)^j}$ $(i = 1, \ldots, s; j = 0, \ldots, r_i)$ ein

vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{1}{\mathcal{O}_0}$, und ihre zugeordneten Divisoren ein vollständiges System ganzer Divisoren von $Q$.[203]

Ein solches System heißt *Fundamentalsystem für den Bereich* $[Q]$ und die Anzahl seiner Elemente $\{Q\}$ die *Dimension* von $Q$.

Will man die Vielfachen eines Divisors $\mathcal{O}$ innerhalb einer Klasse $R$ finden und liegt $\mathcal{O}$ in der Klasse $Q$, so kann man auch ganze Divisoren der Klasse $\frac{R}{Q}$ suchen und erhält also:

Die Anzahl aller linear unabhängigen Multipla eines beliebigen Divisors $\mathcal{O}$, welche innerhalb einer beliebigen Divisorenclasse $R$ existiren, ist stets gleich $\left\{\frac{R}{Q}\right\}$, also gleich der Dimension der Classe $\frac{R}{Q}$, wenn $Q$ die Classe des betrachteten Divisors ist.[204]

Insbesondere ist diese Anzahl nur von der Klasse von $\mathcal{O}$ abhängig. Hensel nannte eine Klasse im Anschluß an Dedekind und Weber *eigentlich*, wenn ihre ganzen Divisoren relativ prim sind und *uneigentlich vom Teiler* $\mathcal{D}$, wenn ihr größter gemeinsamer Teiler $\mathcal{D}$ ist. Ist $D$ die Klasse von $\mathcal{D}$, $d$ ihre Ordnung, $Q = D\overline{Q}$ und $q$ die Ordnung von $Q$, $\overline{q}$ die Ordnung von $\overline{Q}$, so kann man die Untersuchung auf eigentliche Klassen beschränken, denn es gilt $\{D\} = 1$, $\{Q\} = \{\overline{Q}\}$ und $q = \overline{q} + d$.[205]

### 4.3.4 Anwendung auf Abelsche Integrale

Zuerst zeigte Hensel, daß $\frac{d\eta}{d\xi}$ für $\eta, \xi \in K(x,y)$ eine Funktion des Körpers $K(x,y)$ ist: Zwischen $\eta$ und $\xi$ besteht eine algebraische Gleichung $F(\eta,\xi) = 0$. Daher ist auch $\frac{d\xi}{d\eta} = -\frac{F'_\xi}{F'_\eta}$ rational in $\eta, \xi$, also Element von $K(x,y)$.[206]

Zur Beschreibung des entsprechenden Hauptdivisors bestimmte er wegen $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\eta}{dx} : \frac{d\xi}{dx}$ zuerst, wie oft ein beliebiger Primdivisor $\mathcal{P}$ in $\frac{d\xi}{dx}$ enthalten ist:

Gelte für das gewählte $x$, daß $\mathcal{P}$ den Linearfaktor $(x-a)$ mit endlichem $a$ teilt, und daß in $\mathcal{P}$ genau $\alpha$ Blätter der Riemannschen Fläche $\mathcal{K}_x$ zusammentreffen. Hensel betrachtete die Entwicklung von $\xi$ an $\mathcal{P}$ und brachte das Absolutglied auf die andere Seite. Ist also $\xi - \xi_0 = \xi_d(x-a)^{\frac{d}{\alpha}} + \xi_{d+1}(x-a)^{\frac{d+1}{\alpha}} + \ldots$, so erhält man durch gliedweises Differenzieren $\frac{d\xi}{dx} = \xi_d \frac{d}{\alpha}(x-a)^{\frac{d-\alpha}{\alpha}} + \ldots$. Hensel schlußfolgerte hieraus:

202 [39, 1901, 477].
203 [39, 1901, 478].
204 [39, 1901, 479].
205 [39, 1901, 480].
206 [39, 1901, 481].

> Enthält also $\xi - \xi_0$ die Potenz $\mathcal{P}^d$, so ist $\frac{d\xi}{dx}$ genau durch $\mathcal{P}^{d-\alpha}$ theilbar, wenn die Stelle $\mathcal{P}$ für die Kugelfäche $\mathcal{K}_x$ ein $\alpha$-blättriger Verzweigungspunkt ist.[207]

Da sich die analoge Überlegung auch für $\eta$ anstellen läßt, wenn der unter $\mathcal{P}$ liegende Linearfaktor $\eta - \eta_0$ durch $\mathcal{P}^{\rceil}$ teilbar ist, erhält man für den gesuchten Divisor die Darstellung

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\frac{d\eta}{dx}}{\frac{d\xi}{dx}} = \prod_{\mathcal{P}} \frac{\mathcal{P}^{e-\alpha}}{\mathcal{P}^{d-\alpha}} = \prod_{\mathcal{P}} \mathcal{P}^{e-d}.$$

Als wesentlich stellte Hensel heraus, daß dieser Divisor auch eine geschlossene Darstellung hat, nämlich

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\mathcal{Z}_\eta}{n_\eta^2} : \frac{\mathcal{Z}_\xi}{n_\xi^2}, \qquad (*)$$

wobei $\mathcal{Z}$ die Verzweigungsteiler und $n$ die Nennerdivisoren der jeweiligen Funktionen sind. Hensel bewies dies, indem er zeigte, daß $\frac{\mathcal{Z}_\xi}{n_\xi^2}$ genau durch $\mathcal{P}^{d-1}$ teilbar ist. Dies ist (nach Definition des Verzweigungsteilers) offensichtlich, wenn $\mathcal{P}$ für die Variable $\xi$ im Endlichen liegt, denn dann ist $n_\xi$ nicht durch $\mathcal{P}$ teilbar. Der Fall, indem $\mathcal{P}$ im Unendlichen liegt, ist etwas komplizierter:

> Ist dagegen $\mathcal{P}$ eine unendlich ferne Stelle für $\mathcal{K}_\xi$, ist also $d = -\delta$ negativ, so ist $n_\xi$ duch $\mathcal{P}^\delta$ theilbar, und $\mathcal{P}$ entspricht einem Verzweigungspunkte der $(\delta - 1)^{ten}$Ordnung, der Verzweigungstheiler $\mathcal{Z}_\xi$ enthält somit genau die Potenz $\mathcal{P}^{\delta-1}$. Also ist der Quotient $\frac{\mathcal{Z}_\xi}{n_\xi^2}$ durch $\mathcal{P}^{\delta-1-2\delta} = \mathcal{P}^{-\delta-1} = \mathcal{P}^{d-1}$ theilbar, die aufgestellte Behauptung ist also vollständig bewiesen.[208]

Seien $w_\eta$ bzw. $w_\xi$ die Ordnungen der jeweiligen Verzweigungsdivisoren und $n_{(\eta)}$ bzw. $n_{(\xi)}$ die Ordnungen der jeweiligen Nennerdivisoren. Da $\frac{d\eta}{d\xi}$ eine Funktion des Körpers ist, also die Ordnung Null hat, folgt aus der Gleichung (*), daß $w - 2n$ für alle Elemente von $K(x, y)$ gleich ist.
Daher ist $p := \frac{1}{2}w - n + 1$ eine Invariante des Körpers, die als das *Geschlecht* bezeichnet wird.[209]

Anschließend ordnete Hensel jedem Differential einen Divisor zu. Sei dazu ein Differential $d\omega = \zeta_\xi d\xi$ gegeben. Betrachtet man eine weitere Integrationsvariable $\eta$, so erhält man wegen $\zeta_\xi d\xi = \zeta_\xi \frac{d\xi}{d\eta} d\eta = \zeta_\eta d\eta$ die Beziehung

$$\frac{\zeta_\xi}{\zeta_\eta} = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\mathcal{Z}_\eta}{n_\eta^2} : \frac{\mathcal{Z}_\xi}{n_\xi^2} \quad \text{und daraus folgt, daß der Divisor} \quad \mathcal{W}_\omega = \zeta_\eta \frac{\mathcal{Z}_\eta}{n_\eta^2} = \zeta_\xi \frac{\mathcal{Z}_\xi}{n_\xi^2}$$

unabhängig von der Wahl der Integrationsvariablen ist. Ordnet man jedem Differential diesen Divisor $\mathcal{W}_\omega$ zu, so erkennt man, daß alle Differentiale und nur sie äquivalent sind und also der *Differentialklasse* $W$ angehören.[210] Die Ordnung der Differentialklasse ist $w - 2n = 2p - 2$.

Anschließend zeigte Hensel, wie das Integral $\omega$ mit dem Divisor $\mathcal{W}$ zusammenhängt. Dazu betrachtete er einen beliebigen Primdivisor $\mathcal{P}$ und eine Integrationsvariable $x$, so

> dass der gerade betrachtete Primdivisor $\mathcal{P}$ weder in $n_x$ noch in $\mathcal{Z}_x$ auftritt, dass also die Stelle $\mathcal{P}$ eine reguläre, im Endlichen liegende Stelle der Kugelfläche $\mathcal{K}_x$ ist.[211]

[207] [39, 1901, 482].
[208] [39, 1901, 483].
[209] Im neunten Paragraphen hatte Hensel gezeigt, daß $\frac{w}{2}$ ganzzahlig ist, vgl. das Ende von 4.3.2.
[210] Dies liegt daran, daß die zugeordneten Divisoren zweier Differentiale, die bezüglich der gleichen Integrationsvariablen dargestellt sind, sich um eine Funktion des Körpers, nämlich den Quotienten der beiden Integranden, unterscheiden.
[211] [39, 1901, 485].

Der Integrand $\zeta_x = \frac{\mathcal{W}_\omega n_x^2}{\mathcal{Z}_x}$ ist dann in Bezug auf $\mathcal{P}$ von derselben Ordnung wie der Divisor $\mathcal{W}_\omega$ und ist letzterer genau durch $\mathcal{P}^d$ teilbar, so erhält man für $d\omega$ die folgende Entwicklung: $d\omega = \zeta_x dx = (a_d x^d + a_{d+1}x^{d+1} + \dots)\, dx$. Durch gliedweise Integration (außer im Fall $d = -1$) gelangt man zu $\omega - \omega_0 = \frac{a_d}{d+1}x^{d+1} + \dots$. Die Bedeutung des Divisors $\mathcal{W}_\omega$ faßte Hensel folgendermaßen zusammen:

> Ist $\mathcal{P}$ ein $d$-facher Theiler des zu $d\omega$ gehörigen Divisors $\mathcal{W}_\omega$, so ist das Integral $w - w_0$ entweder durch $\mathcal{P}^{d+1}$ oder durch $l(\mathcal{P})$ theilbar, je nachdem $d \neq -1$ oder $d = -1$ ist. Wir sagen hier, dass eine Integralfunction den Divisor $l\mathcal{P}$ enthält, wenn ihre Entwickelung in der Umgebung von $\mathcal{P}$ mit dem Logarithmus des zugehörigen Linearfactors anfängt.[212]

Hensel nannte ein Integral in $\mathcal{P}$ *regulär*, wenn $w - w_0$ in $\mathcal{P}$ von der ersten Ordnung verschwindet. Schreibt man dann $\mathcal{W}_\omega = \frac{z_\omega}{n_\omega}$, so enthält $\mathcal{W}_\omega$ alle nichtregulären Punkte, nämlich der Nenner

> alle und nur die Punkte, welche den sämmtlichen Unendlichkeitsstellen des Integral $\omega$ entsprechen, und zwar entspricht jedem einfachen Primfactor eine logarithmische Unstetigkeitsstelle, jedem Primfactor $\mathcal{P}^m$ ein Pol der $(m-1)$-ten Ordnung in dem Integrale. Ebenso enthält der Zähler alle und nur die Stellen für welche $\omega - \omega_0$ von höherer als der ersten Ordnung verschwindet.[213]

Die "Fundamentalaufgabe in der Theorie der Abel'schen Integrale ... in ihrer allgemeinsten Form" formulierte Hensel folgendermaßen:

> Es soll ein vollständiges System linear unabhängiger Differentiale $d\omega$ gefunden werden, deren Divisor $\mathcal{W}_\omega$ ein Multiplum eines beliebig gegebenen Divisors $\mathcal{O}$ ist, für welche also $\mathcal{W}_\omega = \mathcal{G}_\omega\mathcal{O}$ ist, wenn $\mathcal{G}_\omega$ irgend einen *ganzen* Divisor bedeutet.[214]

Für diese Aufgabe hatte Hensel im ersten Teil die komplementären Fundamentalsysteme bereitgestellt. Ist $d\omega = \zeta_x dx$, so ist $\zeta_x = \frac{\mathcal{W}_\omega n_x^2}{\mathcal{Z}_x}$. Soll also $\mathcal{W}_\omega$ ein Vielfaches von $\mathcal{O}$ sein, so muß $\zeta_x$ ein Vielfaches von $\frac{\mathcal{O}n_x^2}{\mathcal{Z}_x}$ sein. Sei jetzt $x$ wieder so gewählt, daß an der Stelle $x = a_0$ genau $n$ Punkte übereinander liegen. Hensel bestimmte zunächst ein Fundamentalsystem $\xi_1, \dots, \xi_n$ für die Multipla von $\frac{1}{\mathcal{O}}$, das an der Stelle $(x = a_0)$ regulär ist. Zu diesem bildete er das komplementäre System $\overline{\xi}_1, \dots, \overline{\xi}_n$ und ordnete es nach aufsteigenden Ordnungszahlen $\varrho_i$ an $(x = a_0)$. Ist dann $\overline{\xi}_s$ das erste Element, dessen Ordnungszahl größer oder gleich zwei ist, so bilden die $\frac{\overline{\xi}_i}{(x-a_0)^j}dx\, (i = s, \dots, n; j = 2, \dots \varrho_i)$ ein vollständiges System linear unabhängiger Abelscher Differentiale, für welche $\mathcal{W}_\omega$ ein Multiplum von $\mathcal{O}$ ist: Da die $\overline{\xi}_i$ ein Fundamentalsystem für die Multipla von $\frac{\mathcal{O}}{\mathcal{Z}_x}$ sind, bilden die $\frac{\overline{\xi}_i}{(x-a_0)^j}$ $(i = s, \dots, n; j = 0, \dots, \varrho_i - 2)$ ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{\mathcal{O}}{\mathcal{Z}_x}$, die über $(x = a_0)$ mindestens Ordnungszahl 2 haben, also ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{\mathcal{O}z_{x-a_0}^2}{\mathcal{Z}_x}$. Dividiert man jedes Element durch $(x-a_0)^2 = \frac{z_{x-a_0}^2}{n_x^2}$, so erhält man offenbar wie gewünscht ein System linear unabhängiger Multipla von $\frac{\mathcal{O}n_x^2}{\mathcal{Z}_x}$.

Dieses Verfahren wandte Hensel für $\mathcal{O} = 1$ an, um die Integrale erster Gattung zu bestimmen. Dazu wählte er speziell ein $x$, für das an $x = \infty$ genau $n$ Punkte übereinander liegen. (Der Linearfaktor ist in diesem Fall $\frac{1}{x}$.) Dann hat $\overline{\eta}_1$ an $\infty$ die Ordnungszahl Null, alle folgenden Ordnungszahlen sind positiv.[215] Für die $\overline{\eta}_i$ mit Ordnungszahl $\overline{\varrho_i} \geq 2$ ergeben sich jeweils $\overline{\varrho_i} - 1$ Integranden der Form $x^k\overline{\eta}_i$, wobei $k = 0, \dots, \overline{\varrho_i} - 2$ durchläuft. Die folgende Formel beruht darauf, daß man einen Korrekturterm $+1$ für

[212] [39, 1901, 486].
[213] [39, 1901, 486].
[214] [39, 1901, 486f].
[215] Dies liegt daran, daß die ganzen Funktionen $\eta_i$ im Endlichen keine Pole haben. Daher liegen deren Pole an $\infty$, sie haben also dort eine negative Ordnungszahl.

das eine Element nullten Grades benötigt, wenn man für ein Element $\overline{\eta_i}$ der Ordnungszahl $\overline{\varrho_i}$ stets $\overline{\varrho}_i - 1$ Integranden zählt:

Ihre Anzahl ist $1 + \sum_{k=1}^{n}(\overline{\varrho_k} - 1) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\varrho}_k - n + 1$ und wegen $\sum \overline{\varrho}_i = -\sum \varrho_i = \sum(\alpha - 1) = \frac{w}{2}$ |[216]

ist dies gleich $\frac{w}{2} - n + 1 = p$. Daher ist $p \geq 0$ und es folgt $\frac{w}{2} \geq n - 1$.[217]

Mit einem sehr ähnlichen Verfahren leitete Hensel auch den *Satz von Riemann-Roch* her. Sei dazu $Q$ eine Klasse der Ordnung $q$, bezeichne weiter $W$ die Differentialklasse und werde $Q' = \frac{W}{Q}$ die *Ergänzungsklasse* der Ordnung $q' = 2p - 2 - q$ genannt. Betrachtet man Differentiale, die Vielfache eines gegebenen Divisors sind, so läßt sich die Bedeutung der Ergänzungsklasse folgendermaßen formulieren:

> Ist $(Q)$ eine beliebige Divisorenclasse, und $\mathcal{O}$ irgend ein Divisor von $(Q)$, so ist die Anzahl aller linear unabhängigen Multipla $d\omega$ von $\mathcal{O}$ stets gleich der Dimension $\{Q'\}$ der Ergänzungsclasse von $(Q)$.[218]

Zum Beweis des Satzes von Riemann-Roch wählte Hensel Divisoren, aus denen sich Ergänzungsklassen konstruieren lassen: Sei wieder $x$ so gewählt, daß der Stelle $x = \infty$ genau $n$ reguläre Punkte entsprechen, und sei $\mathcal{O}_1\mathcal{O}_1' = \mathcal{Z}_x$, wobei $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_1'$ beide keine Primdivisoren über $x = \infty$ enthalten. Dann sind die zu den Divisoren $\mathcal{O} = \frac{\mathcal{O}_1}{n_x}$ und $\mathcal{O}' = \frac{\mathcal{O}_1'}{n_x}$ gehörenden Klassen $Q$ und $Q'$ Ergänzungsklassen.
Hensel bestimmte zunächst ein Fundamentalsystem $\xi_1, \ldots, \xi_n$ für den Divisor $\frac{1}{\mathcal{O}_1}$, welches für $x = \infty$ regulär ist, und ordnete es so, daß die Ordnungszahlen $r_i$ fallen. Das komplementäre System $\overline{\xi}_i$ ist dann ein Fundamentalsystem für den Divisor $\frac{\mathcal{O}_1}{\mathcal{Z}_x} = \frac{1}{\mathcal{O}_1'}$, dessen Ordnungszahlen $-r_i$ sind.
Dann ist einerseits das System $x^j\xi_i$ für $r_i \geq 1$ und mit $j = 0, \ldots, r_i - 1$ ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{1}{\mathcal{O}} = \frac{n_x}{\mathcal{O}_1}$ und dessen Kardinalität ist $\{Q\} = r_1 + \cdots + r_s$, wenn $r_s$ das letzte der $r_i$ größer oder gleich Null ist.
Andererseits ist das System $x^j\overline{\xi}_i$ für $-r_k \geq 1$ und mit $j = 0, \ldots, -r_k - 1$ ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{1}{\mathcal{O}'} = \frac{n_x}{\mathcal{O}_1'}$ und dessen Kardinalität ist $\{Q'\} = -(r_{s+1} + \cdots + r_n)$.

Damit ist $\{Q\} - \{Q'\} = r_1 + \cdots + r_n = q + n - \frac{w}{2} = q - p + 1$. Durch Vertauschung von $Q$ und $Q'$ erhält man $\{Q'\} - \{Q\} = q' - p + 1$ und daraus $\{Q\} - \frac{q}{2} = \{Q'\} - \frac{q'}{2}$. Wegen $q' = 2p - 2 - q$ erhält man auch $\{\frac{W}{Q}\} = \{Q'\} = \{Q\} + p - 1 - q$. Diese beiden Formeln geben “die gesuchte Beziehung zwischen den Dimensionen von zwei beliebigen Ergänzungsclassen”, die Hensel anschließend noch in Worten formulierte.[219] Als Spezialfall folgt daraus, daß für einen Divisor einer Klasse negativer Ordnung $q = -b < 0$ stets $\{Q'\} = b + p - 1$ gilt.

Hensel zeigte anschließend, daß die Differentialklasse immer eine eigentliche Klasse ist. Aus der Frage

> Wie viele unabhängige Integrale giebt es, welche sich nur in einer Anzahl gegebener Punkte nicht regulär verhalten, und in jedem von diesen höchstens in vorgegebener Ordnung unendlich werden?[220]

[216] Die erste Gleichheit folgt aus den Eigenschaften komplementärer Systeme, die zweite aus der Formel für den Grad der Determinante eines Fundamentalsystems, die dritte ist die Definition der Verzweigungszahl $w$.
[217] [39, 1901, 489].
[218] [39, 1901, 490].
[219] [39, 1901, 493].
[220] [39, 1901, 494].

formulierte er die Aufgabe

> Es soll die Anzahl aller linear unabhängigen Multipla von $\frac{1}{\mathcal{B}}$ innerhalb der Differentalclasse $(W)$ bestimmt werden, wenn $\mathcal{B} = \mathcal{P}_1^{g_1} \dots \mathcal{P}_h^{g_h}$ einen beliebigen aber ganzen Divisor bedeutet.[221]

Ist $B$ die Klasse von $\mathcal{B}$, so ist $BW$ die Ergänzungsklasse zu $\frac{1}{B}$ und es ist $\{BW\} = b + p - 1$.

Für $\mathcal{B} = \mathcal{P}$ ist die Ergänzungsklasse eine uneigentliche Klasse und jedes Differential, dessen Nenner höchstens gleich $\mathcal{P}$ ist, ist schon ein Differential erster Gattung, es "giebt also kein einziges Integral, welches nur an einer Stelle und zwar logarithmisch unendlich wird."[222]

Enthält $\mathcal{B}$ jedoch mindestens zwei Primfaktoren, so ist $BW$ stets eine eigentliche Klasse. Dies zeigte Hensel für die beiden Fälle $\mathcal{B} = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ und $\mathcal{B} = \mathcal{P}^2$, sowie induktiv für einen Divisor der Ordnung $b + 1$, wenn es für einen Divisor der Ordnung $b \geq 2$ gilt.

Insbesondere ist die Existenz von *Elementarintegralen zweiter Gattung* gezeigt, also Integralen, die nur in $\mathcal{P}$ einen Pol der Ordnung $m > 1$ haben.

Ebenso existieren Elementarintegrale dritter Gattung, die nur in $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ und zwar logarithmisch unendlich werden.

Man kann jedes Differential $d\omega \sim \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$ als Summe von Elementardifferentialen darstellen,

> denn man erkennt leicht, dass man von $d\omega$ stets ein solches Elementardifferential $d\omega_0$ multipliziert mit einer geeigneten Constanten abziehen kann, dass die Differenz $d\omega - c_0 d\omega_0 = d(\omega - c_0\omega_0) \sim \frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{B}'}$ der Nenner $\mathcal{B}'$ mindestens einen Primtheiler in einer mindestens um Eins niedrigeren Potenz enthält.[223]

## 4.4 Übertragung auf die Zahlentheorie

### 4.4.1 Entstehung und Überblick

Die Fertigstellung von Hensels Arbeit *Ueber die Entwickelung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen* [41, 1902] zog sich viel länger hin, als dieser ursprünglich angenommen hatte. Dies läßt sich anhand von Briefen an Hilbert nachvollziehen, der der zuständige Redakteur der Mathematischen Annalen war, in denen Hensel veröffentlichen wollte. So schrieb er in einem Brief an Hilbert, den er ihm gleichzeitig mit dem Manuskript der Arbeit schickte:

> Mit gleicher Post sende ich Ihnen eine Arbeit, über welche wir zu Zeiten der Braunschweiger Naturforscherversammlung sprachen, und die Sie damals für die Annalen haben wollten. Falls Sie noch ebenso denken, was nach der langen Zeit nicht unbedingt notwendig der Fall zu sein braucht, so würde ich mich freuen, wenn sie dort gedruckt werden könnte, wäre Ihnen aber sehr dankbar, wenn der Druck möglichst schnell geschehen könnte. Die längere Zeit, die ich gebraucht habe, um die Arbeit fertigzustellen, ist ihr, wie ich glaube, angediehen, ich wollte die Resultate und Methoden so darstellen, dass sie sich in die gewöhnliche Idealtheorie unmittelbar einfügen.[224]

Bereits 1897 hatte er angekündigt: "Die grössere Abhandlung für die Annalen liefere ich Ihnen dann bald nach."[225] Als er Hilbert 1898 um Hilfe in Bezug auf eine Berufung nach Königsberg bat, schrieb er, er sei

[221] [39, 1901, 494].
[222] [39, 1901, 495].
[223] [39, 1901, 497].
[224] Undatierter Brief 146.9 Hensels an Hilbert. Da er im nächsten Brief darauf Bezug nimmt, kann man den Brief auf Ende Juni/Anfang Juli 1900 datieren.
[225] Brief Hensels an Hilbert vom 19.10.1897.

mit dem Fortgang seiner Arbeit sehr zufrieden und er werde ihm "sehr bald die besprochene Arbeit für die Annalen sowie eine kleinere zusenden."[226] Im August 1899 hoffte er "nun auch mit meinen eigenen Sachen so weit zu sein, dass ich sie jetzt mit gutem Gewissen drucken lassen kann."[227] Auch als er Ende März 1900 das Manuskript der im vorigen Abschnitt besprochenen Arbeit [39, 1901] an Hilbert schickte, kam er nochmals auf die zahlentheoretische Arbeit zu sprechen:

> Ihr Versprechen bezog sich allerdings auf eine andere Arbeit, welche ich auch zu $\frac{3}{4}$ fertig habe, aber doch in voller Ruhe ausreifen lassen möchte, so dass das wohl noch $\frac{1}{2}$ Jahr dauern kann.[228]

Am 26.11.1900 betonte Hensel in einem Brief an Hilbert in Bezug auf die bereits eingereichten Manuskripte der Arbeiten [39, 1901] und [41, 1902], "es wäre mir doch recht erwünscht, wenn sie bald herauskämen."[229] 1901 bzw. 1902 wurden beide Arbeiten schließlich in den Mathematischen Annalen veröffentlicht.

Im ersten Teil der Arbeit leitete Hensel die Potenzreihen ab, die er im zweiten Teil benutzte. Er ging dazu von Entwicklungen modulo der Potenzen eines Primdivisors $P$ aus.[230] In diesen treten neben ganzzahligen Koeffizienten zwei Entwicklungselemente auf: eines ($\pi$), nach dessen Potenzen entwickelt wird und das genau einmal durch den Primdivisor $P$ teilbar ist, sowie ein weiteres ($\alpha$), dessen Potenzen ein vollständiges Restsystem modulo $P$ erzeugen. Hensel modifizierte diese Entwicklungselemente, damit sie ganzzahlige Kongruenzen modulo $P^M$ erfüllen, wobei $\alpha$ in der Kongruenz für $\pi$ vorkommt. Im zahm verzweigten Fall führt das vorgestellte Verfahren zu sehr einfachen Ergebnissen und auch im wild verzweigten Fall ist es möglich, die Koeffizienten der Kongruenz für $\pi$ nach oben abzuschätzen.
Anschließend konstruierte Hensel zu den entsprechenden Entwicklungen in den konjugierten Körpern jeweils kongruente Entwicklungen in sogenannten *Abbildungskörpern.* Dazu werden die konstruierten Kongruenzen als Gleichungen aufgefaßt. Die algebraischen Wurzeln dieser Gleichungen werden als neue Entwicklungselemente benutzt und erzeugen die Abbildungskörper.[231]
Sei $F(x) = 0$ die irreduzible, ganzzahlige Gleichung $n$-ten Grades, die ein geeignet gegebenes $x$ nebst seinen Konjugierten erfüllt. Betrachtet man die Entwicklungen dieser Konjugierten, deren Elemente aus den Abbildungskörpern stammen, so erhält man eine Zerlegung von $F(x)$ in Linearfaktoren modulo $P'^M$, wobei $P'$ ein Primdivisor von $P$ im benötigten Zahlkörper ist. Da die hierbei benutzten Entwicklungselemente algebraisch einfacher sind, zerfällt $F(x)$ modulo $P'^M$ auch (entsprechend der Konjugationsstruktur dieser Entwicklungselemente) in Faktoren mit ganzzahligen Koeffizienten. Diese Zerlegung besteht auch modulo $p^{M'}$.
Hensel behauptete (und deutete an), daß man umgekehrt von der eindeutigen Zerlegung modulo $p^M$ ausgehen und mit deren Hilfe ohne Benutzung der Idealtheorie zu den Entwicklungen gelangen könne.

---

[226] Brief Hensels an Hilbert vom 26.8.1898. Um welche kleinere Arbeit es ging, ist nicht nachvollziehbar.
[227] Brief Hensels an Hilbert vom 12.8.1899.
[228] Brief Hensels an Hilbert vom 28.3.1900.
[229] Brief Hensels an Hilbert vom 26.11.1900.
[230] Solche gab es auch schon bei [Dedekind/Weber, 1882, 288f]. Allerdings betrachteten diese nur endliche Anfangsstücke und benutzten sie nicht für weiterführende Aussagen.
[231] Konkret entsteht ein Abbildungskörper, indem man erst eine der Wurzeln $\alpha_i$ zu $\mathbb{Q}$ adjungiert und anschließend über dem so entstandenen Körper $\pi$ definiert.

Im zweiten Teil arbeitete Hensel mit den Abbildungskörpern: In jedem solchen hat $p$ nur einen Primdivisor $P_i$. Hensel stellte ein Fundamentalsystem für den Modul $P_i$ auf und berechnete den $p$-Anteil von dessen Diskriminante. Aus diesen Fundamentalsystemen in den verschiedenen Abbildungskörpern setzte Hensel ein Fundamentalsystem modulo $p$ für den Zahlkörper zusammen.
Anschließend untersuchte er Systeme von $n$ linear unabhängigen Elementen lokal, indem er die Konjugierten dieser Elemente durch ihre Entwicklungen in den Abbildungskörpern ersetzte. Modulo $p^M$ gibt es auch hier einen Algorithmus, der ein Fundamentalsystem für ein Ideal in ein äquivalentes System in Blockdiagonalform überführt. Daraus folgt wiederum, daß ein System genau dann ein Fundamentalsystem ist, wenn es lokal in Partialsysteme zerfällt. Diese Charakterisierung erlaubt es, für ein gegebenes Ideal ein Fundamentalsystem aufzustellen und dessen Diskriminante zu berechnen.
Abschließend führte Hensel einen Verzweigungsteiler ein. Ist ein Fundamentalsystem eines Ideals gegeben, so läßt sich mit diesem bestimmen, für welches Ideal das komplementäre System ein Fundamentalsystem ist. Im Fall der wilden Verzweigung enthält dieser eine höhere Potenz als $P^{d-1}$, wenn $P^d$ die in $P$ enthaltene Potenz des Primdivisors ist.

### 4.4.2 Aufstellung der Potenzreihen

**Kongruenzen für Entwicklungselemente**

Sei $K$ ein Körper $n$-ten Grades über $\mathbb{Q}$, $P$ ein Primdivisor von $p$ mit $N(P) = p^k$ und $P^d$ die maximale Potenz dieses Primdivisors, die $p$ teilt. Hensel begann mit einer Darstellung der Elemente des Körpers modulo $P^M$ für ein beliebiges, groß gedachtes $M$. Er operierte in dieser Arbeit nur mit endlichen Anfangsstücken von Potenzreihen, seine Schreibweise verwischte diesen Unterschied jedoch bewußt.
Genügt die ganze algebraische Zahl $\alpha \in K$ mod $P$ einer irreduziblen Kongruenz $k$-ten Grades mit mod $p$ reduzierten Koeffizienten: $\varphi(t) = t^k + a_1 t^{k-1} + \cdots + a_k \equiv 0 \pmod{P}$, so ist jede ganze Zahl des Körpers $K$ genau einer der $p^k$ Zahlen $A = u_0 + u_1\alpha + \cdots + u_{k-1}\alpha^{k-1} \quad (u_i \in \{0, \ldots, p-1\})$ modulo $P$ kongruent. Ist daher $\pi$ durch $P$, aber nicht durch $P^2$ teilbar, so hat jede Zahl $w$ des Körpers eine Darstellung der Form (3) $\quad w \equiv A_r\pi^r + A_{r+1}\pi^{r+1} + \cdots + A_{M-1}\pi^{M-1} \quad (\mathrm{mod.}\, P^M)$, wobei $r$ angibt, welche Potenz von $P$ in $w$ enthalten ist, also auch negativ sein kann.

Die Beliebigkeit der Zahl $M$ betonte Hensel durch die folgende Schreibweise:

> Wenn eine solche Congruenz (3) wie dies im Folgenden häufig vorkommt, für jede noch so hohe Potenz des Moduls gilt, falls man die Coefficienten $A_r, A_{r+1}, \ldots$ nur weit genug berechnet, soll das letzte Glied und der Modul mitunter fortgelassen und diese Beziehung so geschrieben werden:
>
> $$\omega \equiv A_r\pi^r + A_{r+1}\pi^{r+1} + A_{r+2}\pi^{r+2} + \ldots,$$
>
> ebenso, wie dies bei der Entwickelung einer analytischen Function in eine Potenzreihe geschieht.[232]

Hensel hatte das Ziel, die Entwicklungszahlen $\alpha$ und $\pi$ so zu modifizieren, daß sie anschließend in den Kongruenzen modulo $P^M$ durch einfachere algebraische Zahlen ersetzt werden können. Für $\alpha$ ist dies relativ leicht: Es erfüllt die Kongruenz $\varphi(t) \equiv 0$ mod $P$ und soll so modifiziert werden, daß es auch die

[232] [41, 1902, 301f].

Kongruenz $\varphi(t) \equiv 0 \bmod P^M$ erfüllt. Dies wird schrittweise für wachsende Potenzen von $P$ erreicht. Falls also nur $P^l|\varphi(\alpha)$, so bestimmte Hensel einen Korrekturterm $A_l\pi^l$, so daß anschließend $\varphi(\alpha + A_l\pi^l)$ durch eine höhere Potenz von $P$ teilbar ist.[233] Dies kann man offenbar fortführen, bis $\varphi(\alpha) \equiv 0 \bmod P^M$ ist.[234] Für $\pi$ mußte Hensel zunächst eine Kongruenz konstruieren. In einem ersten Schritt erhielt er eine Schar von Kongruenzen, deren Koeffizienten mit $M$ wachsen. Hensel hielt eine geeignete dieser Kongruenzen fest und modifizierte stattdessen $\pi$. Seine Konstruktion beruhte darauf, daß der Quotient $\frac{\pi^d}{p}$ nicht durch $P$ teilbar ist:

> Da n.d.V. $P$ den Grad $d$ hat, so ist der Quotient $\frac{\pi^d}{p}$ genau von der nullten Ordnung; man kann also $d$ Zahlen $B_0, B_1, \ldots B_{d-1}$ des Körpers $K(\alpha)$ so bestimmen, dass die Summe
>
> $$\frac{\pi^d}{p} + B_{d-1}\pi^{d-1} + B_{d-2}\pi^{d-2} + \cdots + B_0 = B'$$
>
> mindestens durch $P^d$ theilbar ist; hierzu muss man nämlich für $B_{d-1}, \ldots B_0$ die negativ genommenen Coefficienten in der Entwicklung der Zahl $\frac{\pi^d}{p}$ nach Potenzen von $\pi$ wählen; speciell ist dabei $B_0$ sicher von Null verschieden.[235]

Ganz ebenso kann man jetzt von $\frac{B'}{p}$ ausgehen und erhält $\frac{B'}{p} + B'_{d-1}\pi^{d-1} + B'_{d-2}\pi^{d-2} + \cdots + B'_0 = B''$, wobei $B''$ mindestens durch $P^d$ teilbar ist usw. Multipliziert man diese Gleichungen mit $p$ und setzt sie ineinander ein, so erhält man eine Kongruenz

$$\psi(\pi) = \pi^d + pC_{d-1}\pi^{d-1} + \cdots + pC_0 \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, P^M),$$

wobei $C_0$ nicht durch $p$ teilbar ist und die $C_i$ ganze ganzzahlige Funktionen von $\alpha$ sind, die durch die Gleichungen $C_i = B_i + pB'_i + p^2B''_i + \ldots$ bestimmt sind.[236] Diese Koeffizienten wachsen offenbar mit $M$, da dann für $C_i$ mehr Summanden berücksichtigt werden müssen.

Anschließend setzte Hensel fest, welches Anfangsstück dieser Kongruenz berücksichtigt werden soll. Die Anforderung ist, daß $\pi$ für jedes $M$ modifiziert werden kann, bis es die erhaltene Kongruenz erfüllt. Dazu betrachtete er die Summanden $p^hB_i^{(h)}\pi^i$ in $\psi(\pi)$ einzeln und faßte zunächst alle Glieder mit einer Ordnungszahl kleiner als ein noch zu bestimmendes $\kappa$ in $\psi_0$ zusammen. Er setzte $\pi$ in das so erhaltene $\psi_0$ ein und erhielt $\psi_0(\pi) \equiv D_l\pi^l + D_{l+1}\pi^{l+1} + \ldots \mod P^M$, wobei $l > \kappa$ ist und $D_l \neq 0$ sein soll.[237]
Aus dieser Entwicklung sollen schrittweise die niedrigsten Glieder entfernt werden, bis $\psi_0(\pi) \equiv 0 \mod P^M$ ist. Der Ansatz $\overline{\pi} = \pi + \lambda\pi^r$ führt mit Taylorentwicklung auf

$$\psi_0(\overline{\pi}) = \psi_0(\pi) + \lambda\pi^r\psi'_0(\pi) + \lambda^2\pi^{2r}\frac{\psi''_0(\pi)}{2!} + \cdots \equiv (D_l\pi^l + D_{l+1}\pi^{l+1} + \ldots) + \lambda\pi^r\psi'_0(\pi) + \ldots$$

Hensel zeigte, daß die beiden noch freien Konstanten $\kappa$ und $r$ so gewählt werden können, daß die Entwicklung auf der rechten Seite genau zwei Terme der Ordnung $l$ enthält, aus denen $\lambda$ bestimmt werden kann: Er bezeichnete mit $\varrho_m$ die Ordnungszahl von $\frac{\psi_0^{(m)}(\pi)}{m!}$. Da $\psi(\pi)$ nur zusätzliche Terme höherer Ordnung

[233] Ist $\varphi(\alpha) = C_l\pi^l + C_{l+1}\pi^{l+1} + \ldots$ so ergibt die Taylorentwicklung $\varphi(\alpha + A_l\pi^l) \equiv \pi^l(C_l + A_l\varphi'(\alpha)) + \ldots$. Da $\varphi'(\alpha)$ nicht durch $P$ teilbar ist, kann man $A_l \equiv -\frac{C_l}{\varphi'(\alpha)} \bmod P$) setzen. [41, 1902, 302f].
[234] Für endliches $M$ braucht man nur endlich viele Schritte und daher liegt das so bestimmte $\alpha$ auch weiterhin in $K$.
[235] [41, 1902, 303].
[236] [41, 1902, 303].
[237] [41, 1902, 304]. Die Beziehung $l > \kappa$ folgt daraus, daß von der Kongruenz $\psi(\pi) \equiv 0$ auf beiden Seiten ein Term abgezogen wird, dessen Ordnung größer als $\kappa$ ist.

enthält, sind diese Konstanten unabhängig von $\kappa$, denn sie können auch aus der Betrachtung von $\psi(\pi)$ gewonnen werden.

Die Ordnungszahl des Summanden $\lambda^i \pi^{ir} \frac{\psi_0^{(i)}(\pi)}{i!}$ ist dann $\varrho_i + ri$. Bestimmt man $r_0$ minimal ganz so, daß $\varrho_1 + r_0 < \varrho_i + ir_0$ für $i = 2, \ldots, d$, so ist $r \geq r_0$ die Bedingung dafür, daß der Term minimaler Ordnung außerhalb der Klammer von der Entwicklung von $\lambda \pi^r \psi_0'(\pi)$ stammt. Sei der Anfangsterm von letzterer $C\lambda\pi^{r+\varrho_1}$.

Hensel setzte $\kappa = r_0 + \varrho_1$. Das entsprechende $l$ erfüllt dann $l - \varrho_1 \geq r_0$, daher kann man $r = l - \varrho_1$ setzen. Dann hat $D_l \pi^l$ die gleiche Ordnung wie $C\lambda\pi^{r+\varrho_1}$ und durch $\lambda \equiv -\frac{D_l}{C} \mod P$ läßt sich das Glied $D_l\pi^l$ in der Entwicklung von $\psi_0(\pi)$ beseitigen. Durch Wiederholung dieses Schrittes kann man "beliebig viele weitere Glieder zum Verschwinden bringen" und die so erhaltene Kongruenz $\psi_0(\pi) \equiv 0 \mod P^M$ hat beschränkte Koeffizienten.[238]

Die entscheidenden Konstante $r_0, \varrho_1$ ergaben sich aus den Ordnungszahlen der Ableitungen von $\psi(\pi)$. Im zweiten Paragraphen zeigte Hensel, welche Abschätzungen man treffen kann, jenachdem welche Potenz von $p$ in $d$ enthalten ist. Im Fall der zahmen Verzweigung, also $p \not| d$, ist $\varrho_1 = d - 1$, denn in $\psi'(\pi) = d\pi^{d-1} + p(d-1)C_{d-1}\pi^{d-2} + \cdots + pC_1$ ist der erste Summand genau durch $\pi^{d-1}$ teilbar, während alle übrigen durch $p$ und daher durch $\pi^d$ teilbar sind. Analog folgt $\varrho_i \geq d - i$, man kann also $r = 2$ setzen. Nimmt man in $\psi_0$ nur die Glieder auf, deren Ordnung gleich $d$ ist, so kann man mit $r = 2$ das Anfangsglied von $\lambda\pi^2\psi'(\pi)$ beseitigen und daher "durch das im vorigen Abschnitte auseinandergesetzte Verfahren aus $\psi(\pi)$ alle Glieder von höherer als der $d^{ten}$ Ordnung herausschaffen"[239] und die Form $\psi(\tau) = \tau^d - Cp \equiv 0 \mod P^M$ ereichen, wobei $C$ mod $p$ reduzierte Koeffizienten hat.

Ist hingegen $d = p^s e$ mit $p \not| e$, so ist $\varrho_1 \leq sd + d - 1, \varrho_i \geq d$ und man kann $r = sd > 1$ wählen. Dann kann man $\kappa = sd + sd + d - 1$ setzen und daher aus $\psi(\tau)$ alle Glieder beseitigen, deren Ordnungszahl größer als $2sd + d - 1$ ist. Da die Koeffizienten der Kongruenz die Form $pC_i$ haben und $p^{2s}\pi^{d-1}$ die maximale Ordnungszahl $2sd + d - 1$ hat, ergibt sich die folgende Beschränkung der Koeffizienten dieser Kongruenz:

> Ist die Ordnungszahl $d = p^s e$ des Primtheilers $P$ durch $p$ theilbar, so kann man die Entwickelungszahl $\pi$ innerhalb des Körpers $K$ stets so auswählen, dass $\pi$ für jede noch so hohe Potenz des Moduls $P$ einer Congruenz $\psi(\tau) = \tau^d + pC_{d-1}\tau^{d-1} + \cdots + pC_0 \equiv 0\,(\mathrm{mod.}\, p^M)$ genügt, deren Coefficienten $C_i = c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_{k-1}\alpha^{k-1}$ ganze Functionen von $\alpha$ mit modulo $p^{2s-1}$ reducirten Zahlencoefficienten $c_k$ sind.[240]

Hensel setzte also die zu erfüllenden Kongruenzen geeignet fest und konnte für ein beliebig großes $M$ ein $\alpha$ bzw. ein $\pi$ in $K$ bestimmen, das diese Kongruenzen erfüllt.[241]

**Eindeutigkeit**

In den folgenden Argumenten veränderte Hensel jeweils den Modul so, daß er prim in dem minimalen galoisschen Oberkörper ist, der alle aktuell benötigten Elemente enthält. Sei $\wp$ stets ein solcher Primdivisor von $P$. Dann gelten alle Kongruenzen mod $P^M$ a posteriori auch mod $\wp^M$.

[238] [41, 1902, 305f]. Nach der Festlegung von $\kappa$ bleibt die Kongruenz fest und es geht nur noch darum, $\pi$ zu modifizieren.
[239] [41, 1902, 308].
[240] [41, 1902, 308].
[241] Jedes dieser $\alpha(M)$ bzw. $\pi(M)$ ist also (wie man aus der Modifikationsform sieht) ein Näherungswert für ein $\alpha$ bzw. $\pi$, das diese Kongruenz für alle $M$ erfüllen würde. Ein solches würde jedoch unendlich viele Modifikationen benötigen und müßte daher als unendliche Summe von Elementen des Körpers nicht mehr in $K$ liegen.

Betrachtet man dann einen Unterkörper dieses galoisschen Körpers, z.B. den ursprünglichen Zahlkörper $K$, so muß man zunächst bestimmen, welchen Grad der Divisor $\wp$ in diesem konjugierten Körper hat und durch welche Potenz von ihm $p$ teilbar ist.

Im dritten Paragraphen konstruierte Hensel einen *Abbildungskörper* $K(\alpha_1, \pi_1^{(1)})$ des Grades $\nu = dk$, so daß jede Zahl von $K$ modulo $\wp^M$ kongruent zu genau einer Zahl von $K(\alpha_1, \pi_1^{(1)})$ ist.

Dazu betrachtete er die Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ der *Gleichung* $\varphi(t) = 0$ und die Wurzeln $\pi_j^{(i)} (j = 1, \ldots, d)$ der Gleichung $\psi(\tau) = 0$, wenn in die Koeffizienten $C_l$ der Wert $\alpha_i$ eingesetzt wird.

Er behauptete, daß genau ein $\alpha_i \equiv \alpha \mod \wp^M$ ist und genau ein $\pi_j^{(i)} \equiv \pi \mod \wp^M$. Die Argumente verlaufen analog, so daß hier nur das komplexere vorgeführt wird. Sei also schon $\alpha_1 \equiv \alpha \mod \wp^M$. Hensel betrachtete die Kongruenz $\psi(\pi) \equiv \left(\pi - \pi_1^{(1)}\right)\left(\pi - \pi_2^{(1)}\right) \ldots \left(\pi - \pi_d^{(1)}\right) \equiv 0 \mod \wp^M$, die man erhält, wenn man $\pi$ in die Definitionsgleichung der $\pi_j^{(1)}$ einsetzt. Dann muß mindestens einer der Faktoren durch $\wp$ teilbar sein. Da die Gleichungsdiskriminante von $\psi(\tau)$ nur eine endliche Potenz $\wp^K$ von $\wp$ enthält, können nicht zwei der Faktoren durch eine beliebig hohe Potenz von $\wp$ teilbar sein. Wären nämlich zwei der Faktoren durch die Potenz $\wp^{K+1}$ teilbar, so auch deren Differenz und die Diskriminante der Gleichung.

Also können zumindest $d-1$ der Faktoren maximal durch $\wp^K$ teilbar sein. Wird dann $M$ beliebig groß, so wird auch $M_h = M - (K \cdot (d-1))$ beliebig groß. Dies ist dann die Potenz von $\wp$, durch die der letzte Faktor teilbar sein muß, d.h. dieser liefert das $\pi_1^{(1)}$.[242]

Ist $\alpha_1 \equiv \alpha$ und $\pi_1^{(1)} \equiv \pi \mod \wp^M$, so ist jede Zahl von $K$ mod $\wp^M$ der entsprechenden Entwicklung innerhalb $K(\alpha_1, \pi_1^{(1)})$ kongruent, in der man $\alpha$ durch $\alpha_1$ und $\pi$ durch $\pi_1^{(1)}$ ersetzt hat.

Analog konstruiert man die Abbildungskörper für die zu $K$ konjugierten Körper, wobei i.A. andere $k$ und $d$ auftreten.

Im vierten Paragraphen versuchte Hensel, die Eindeutigkeit der Entwicklungen unabhängig von den Primdivisoren zu zeigen. Sei dazu $w_1$ eine ganze Zahl $n$-ter Ordnung des Körpers $K$, seien $w_2, \ldots, w_n$ ihre paarweise verschiedenen Konjugierten und $w_i^{(0)}$ die Entwicklungen in den entsprechenden Abbildungskörpern. Dann erfüllen die $w_i^{(0)}$ die Kongruenz $F(w) \equiv 0 \mod \wp^M$, wenn $F(w) = (w - w_1) \ldots (w - w_n)$ die von $w_1$ erfüllte irreduzible ganzzahlige Gleichung ist. Die $w_i^{(0)}$ sind modulo $\wp^M$ inkongruent, da sonst "die Gleichungsdiscriminante von $F(w)$ durch $\wp^M$ theilbar, also identisch Null sein müsste."[243] Weiterhin sind sie aber auch die einzigen Wurzeln dieser Kongruenz:

> Ist ferner $\overline{w}$ irgend eine algebraische Zahl, welche ebenfalls die Congruenz $F(w) \equiv 0$ für die $M^{te}$ Potenz von $\wp$ oder eines Primtheilers $\overline{\wp}$ von $\wp$ für einen Oberkörper befriedigt, so folgt aus der Congruenz:
>
> $$F(\overline{w}) \equiv \left(\overline{w} - w_1^{(0)}\right)\left(\overline{w} - w_2^{(0)}\right) \ldots \left(\overline{w} - w_n^{(0)}\right) \equiv 0 \quad \left(\text{mod.}\, \overline{\wp}^M\right),$$
>
> dass $\overline{w}$ einer, aber auch nur einer der $n$ Zahlen $w_i^{(0)}$ congruent sein muss für eine beliebig hohe Potenz eines Primtheilers $\overline{\wp}$ von $\wp$ innerhalb des Körpers $K(w_i^{(0)}, w_i, \overline{w})$.[244]

[242] [41, 1902, 311]. Es geht also (in dem Argument) konkret darum, daß $M$ größer als die Ordnung der Diskriminante von $\psi(\tau)$ gewählt werden kann und $\pi$ dann entsprechend weit berechnet wird. Überlegungen dazu, inwiefern $\pi$ von $M$ abhängt etc. blendete Hensel in dieser Arbeit völlig aus.

[243] [41, 1902, 312].

[244] [41, 1902, 312]. Der angesprochene Oberkörper muß evtl. nicht galoissch sein. Hensel äußerte sich hierzu nicht explizit.

Die $w_i^{(0)}$ erfüllen die Kongruenz $F(w) \equiv 0$ aber auch mod $p^M$. Zum Beweis zeigte Hensel, daß die $\nu$ algebraischen Zahlen $\alpha_1^g {\pi_1^{(1)}}^h$ modulo $\wp^M$ linear unabhängig sind. Dann ist

$$F(w_1^{(0)}) \equiv \sum_g \sum_h a_{gh} \alpha_1^g {\pi_1^{(1)}}^h \mod \wp^M \text{ mit ganzen } a_{gh}$$

und für $F(w_1^{(0)}) \equiv 0 \mod \wp^M$ müssen alle $a_{gh}$ durch eine beliebig hohe Potenz $\wp^M$ und daher durch eine beliebig hohe Potenz $p^{\overline{M}}$ teilbar sind.

Umgekehrt stimmt jede weitere Wurzel der Kongruenz $F(w) \equiv 0$ mod $p^M$ modulo $\overline{\wp}^M$ mit einem der $w_i^{(0)}$ überein, denn sie erfüllt auch die Kongruenz $F(w) \equiv 0$ mod $\overline{\wp}^M$, und deren Wurzeln sind eindeutig modulo $\overline{\wp}^M$ die Zahlen $w_i^{(0)}$.

Da die $\nu$ konjugierten Entwicklungen zu $w_i^{(0)}$ ebenfalls die Kongruenz $F(w) \equiv 0 \mod p^M$ erfüllen, sind sie zu $\nu$ der $n$ Entwicklungen $w_1^{(0)}, \ldots, w_n^{(0)}$ kongruent modulo einer geeigneten Primdivisorpotenz. Man kann daher $\nu$ der $n$ konjugierten Körper $K(w_i)$ zueinander konjugierten Abbildungskörpern zuordnen. Bildet man entsprechend alle $n$ Körper $K(w_i)$ auf solche Systeme konjugierter Abbildungskörper ab, wobei die Körper eines Systems alle den Grad $\nu_j$ haben, so gilt $\sum_j \nu_j = n$. Jeder der Körper $K(w_i)$ wird dabei auf einen Körper des minimalen Grades abgebildet, dem er mod $\wp^M$ isomorph ist:

> Man beweist nun leicht, dass dies die Körper niedrigster Ordnung sind, auf welche jene Körper $K(w_\varrho)$ [modulo $\wp^M$] eindeutig abgebildet werden können.[245]

Im nächsten Paragraphen deutete Hensel an, wie man umgekehrt die Theorie mit Hilfe dieser Ergebnisse (und also ohne Idealtheorie) aufbauen könnte. Es

> eröffnet sich hier der Weg, um die ganze Theorie der algebraischen Körper ohne Benutzung auch nur eines Satzes der Idealtheorie sondern genau ebenso wie die Untersuchung der algebraischen Functionen einer Variablen durch Benutzung der zugehörigen Reihenentwicklungen darzustellen.[246]

Den $n$ Wurzeln von $F(w) = 0$ hatte Hensel insgesamt $n$ Entwicklungen $e_l$ zugeordnet, die in Tupeln $T_m$ zu $k_i d_i$ konjugiert sind. Dann ist $F(w) \equiv \prod_{l=1}^n (x - e_l)$. Bildet man für ein Tupel $T_m$ das Produkt

$$\prod_{e_i \in T_M} (x - e_i),$$ so ist dieses symmetrisch in den auftretenden algebraischen Zahlen und hat daher ganzzahlige Koeffizienten. Daher bilden diese Faktoren auch eine Zerlegung von $F(w)$ modulo $p^M$:

$$F(w) \equiv F_1(w) \ldots F_h(w) \mod p^M.$$

Hat man umgekehrt die (eindeutige) Zerlegung von $F(w)$ mod $p^M$ für ein ausreichend großes $M$ gegeben, ist $F_1(w)$ deiner der Faktoren und werden seine Kongruenzwurzeln mit $\gamma_1, \ldots, \gamma_\lambda$ bezeichnet, so behauptete Hensel, man könne "durch eine endliche Anzahl von Versuchen" die Gleichungen

$$\varphi(t) = t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \cdots + a_0 = 0 \quad \text{und } \psi(\tau) = \tau^d + pC_{d-1}^{(1)} \tau d - 1 + \cdots + pC_0^{(1)} = 0$$

mit $kd = \lambda$ finden, so daß $\gamma_1$ eine Darstellung der Form

$$\gamma_1 \equiv A_r^{(0)} {\pi_1^{(1)}}^r + A_{r+1}^{(0)} {\pi_1^{(1)}}^{r+1} + \ldots \quad (\mathrm{mod}\, p^M) \text{ hat.}$$ [247]

[245] [41, 1902, 314]. Die hier genannte Ordnung ist für einen bestimmten Körper $K(w_i)$ von der Wahl des Primdivisors $\wp$ abhängig.

[246] [41, 1902, 315f].

[247] [41, 1902, 316]. Die $A_i^{(0)}$ sind dabei wieder ganze Funktionen maximal $k-1$-ten Grades einer Wurzel von $\varphi(t)$ mit modulo $p$ reduzierten Koeffizienten.

Führt man dies für alle Faktoren durch, so erhält man eine Zerlegung von $F(w)$ modulo $p^M$ in Linearfaktoren $F(w) \equiv (w-\gamma_1)\dots(w-\gamma_\lambda)(w-\delta_1)\dots(w-\delta_\mu)\dots \mod p^M$, wobei die $\gamma_i, \delta_j$ die Entwicklungen sind. Dann entspricht jedem erhaltenen $\pi$ die gebrochene Potenz $p^{\frac{1}{d}}$, d.h. eine Entwicklung ist genau durch $p^{\frac{r}{d}}$ teilbar, wenn sie mit einem Term $A\pi^r$ beginnt.

Hensel leitete folgendermaßen zum zweiten Teil über, in dem er die Eigenschaften der Abbildungskörper nutzte:

> Diese wenigen Andeutungen mögen genügen, um zu zeigen, dass und wie die Theorie der algebraischen Zahlen allein auf ihre Reihenentwicklungen modulo $p^M$ gegründet werden können. Ich gehe jetzt zu einer genaueren Untersuchung der hier gefundenen Abbildungskörper $K(\gamma)$ auf der hier benutzten Grundlage der Idealtheorie über.[248]

### 4.4.3 Nutzung der Abbildungskörper

**Die Diskriminante der Abbildungskörper**

Ab dem sechsten Paragraphen untersuchte Hensel die Abbildungskörper $K(\gamma_i)$ (und nicht mehr Potenzreihen). Die Primzahl $p$ hat in $K(\gamma_1)$ nur einen Primdivisor $\mathcal{P}$, der dem ursprünglich betrachteten Primdivisor $P$ entspricht. Das bedeutet, daß eine algebraische Zahl in $K(w_1)$ genau dann durch $P^r$ teilbar ist, wenn ihr Bild in $K(\gamma_1)$ durch $\mathcal{P}^r$ teilbar ist.
Die $\lambda$ Zahlen $\alpha_1^g {\pi_1^{(1)}}^h$ bilden ein Fundamentalsystem für die modulo $p$ ganzen Zahlen von $K(\gamma_1)$.[249] Die Diskriminante $D_0(\gamma)$ ist daher $\left|\alpha_r^g {\pi_r^{(1)}}^h\right|^2$ und kann "durch eine einfache Determinantenumformung" in der Form $D_0(\gamma) = D(\varphi)^d N_\alpha(D(\psi^{(1)}))$ geschrieben werden, wobei $D(\varphi)$ die Diskriminante von $\varphi$ und $D(\psi^{(1)})$ die Diskriminante von $\psi$ bezeichnet, nachdem in den Koeffizienten $\alpha_1$ eingesetzt wurde.[250]
Für den $p$-Anteil der Diskriminante liefert $D(\varphi)$ keinen Beitrag und es ist $N_\alpha(D(\psi^{(1)})) = N_\pi(\psi'(\pi))$, wobei die zweite Norm über alle $\lambda = kd$ Konjugierten gebildet wird. Diese Konjugierten sind alle durch die gleiche (gebrochene) Potenz von $p$ teilbar und um den $p$-Anteil der Diskriminante $D_0(\gamma)$ leichter beschreiben zu können, definierte Hensel die *Verzweigungszahl* $\overline{d}$ dadurch, daß $\overline{d}-1$ die Ordnung von $\psi'(\pi_1^{(1)})$ in Bezug auf $\mathcal{P}$ ist. Dann ist der $p$-Anteil der Diskriminante $D_0(\gamma)$ gleich $p^{kd\frac{\overline{d}-1}{d}} = p^{k(\overline{d}-1)}$. Im Fall der zahmen Verzweigung ist $\overline{d} = d$, während Hensel im Fall $d = p^s e$ wie in [29, 1897, 253] die Grenzen $d+1 \leq \overline{d} \leq (s+1)d$ fand.[251]
Analog bilden die $\lambda$ Zahlen $\alpha_1^g {\pi_1^{(1)}}^{h+\varrho}$ ein "vollständiges System aller rational unabhängigen Multipla von $\mathcal{P}^\varrho$ für den Körper $K(\gamma_1)$", und dessen Diskriminante enthält genau $(p^{k\varrho})^2 p^{k(\overline{d}-1)}$.[252]

**Die Ersetzung der Konjugierten**

Im siebenten Paragraphen setzte Hensel die in den verschiedenen Abbildungskörpern erhaltenen Ergebnisse zusammen. Sei dazu $K(w_1)$ ein beliebiger Körper $n$-ter Ordnung und der Einfachheit wegen

[248] [41, 1902, 317].
[249] Die modulo $p$ ganzen Zahlen sind dabei, wie in früheren Arbeiten Hensels, diejenigen, in deren Minimalgleichung $p$ nicht im Nenner vorkommt.
[250] [41, 1902, 318].
[251] [41, 1902, 320], vgl. das Ende von 4.2.4.
[252] [41, 1902, 321].

$p \sim P^d Q^e R^f$. Seien $k, l, m$ die Ordnungen von $P, Q, R$ und $\lambda = kd, \mu = le, \nu = mf$, also $n = \lambda+\mu+\nu$. Dann werden die $n$ konjugierten Körper $K(w_i)$ modulo $\wp^M$ eindeutig auf die konjugierten Abbildungskörper $K(\gamma_1), \ldots, K(\gamma_\lambda), K(\delta_1), \ldots, K(\delta_\mu)$ und $K(\varepsilon_1), \ldots, K(\varepsilon_\nu)$ abgebildet, die von den Ordnungen $\lambda, \mu$ bzw. $\nu$ sind.[253]

Betrachtet man die Konjugierten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ eines beliebigen Elements $\xi_1 \in K(w_1)$ nur modulo $\wp^M$, so kann man zu den Darstellungen in den entsprechenden Abbildungskörpern mit den Fundamentalsystemen $\alpha_1^g {\pi_1^{(1)}}^h$ usw. übergehen. Seien die Elemente der Fundamentalsysteme für $K(\gamma_1), K(\delta_1)$ bzw. $K(\varepsilon)$ (in beliebiger aber fester Reihenfolge) $\gamma_1^{[1]}, \ldots, \gamma_1^{[\lambda]}, \delta_1^{[1]}, \ldots, \delta_1^{[\mu]}$ und $\varepsilon_1^{[1]}, \ldots, \varepsilon_1^{[\nu]}$, sowie $\gamma_i^{[j]}, \delta_i^{[j]}$ und $\varepsilon_i^{[j]}$ ihre Konjugierten.[254]
Da Hensel in den konjugierten Abbildungskörpern die konjugierten Fundamentalsysteme benutzte, erhielt er für die Konjugierten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ modulo $\wp^M$ je $\lambda, \mu$ bzw. $\nu$ Darstellungen mit den gleichen Koeffizienten. Konkret:
Aus $\xi_1 \equiv a_1\gamma_1^{[1]} + a_2\gamma_1^{[2]} + \cdots + a_\lambda\gamma_1^{[\lambda]} \bmod \wp^M$ folgt $\xi_g \equiv a_1\gamma_g^{[1]} + a_2\gamma_g^{[2]} + \cdots + a_\lambda\gamma_g^{[\lambda]} \bmod \wp^M$ für $g = 2, \ldots, \lambda$. Ebenso ist mit $\xi_{\lambda+1}$auch $\xi_{\lambda+h} \equiv b_1\delta_g^{[1]} + b_2\delta_g^{[2]} + \cdots + b_\mu\delta_g^{[\mu]}$ für $h = 1, \ldots, \mu$ und mit $\xi_{\lambda+\nu+1}$ auch $\xi_{\lambda+\mu+i} \equiv c_1\varepsilon_g^{[1]} + c_2\varepsilon_g^{[2]} + \cdots + c_\nu\varepsilon_g^{[\nu]}$ für $i = 1, \ldots, \nu$ bestimmt.[255]

Hensel definierte den *Teiler der $n$ konjugierten Zahlen* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ anhand der von ihm zugeordneten Entwicklungen als die gebrochene Potenz $p^\varrho$ von $p$, die in allen Summanden $a_i\gamma_g^{[i]}, b_i\delta_g^{[i]}, c_i\varepsilon_g^{[i]}$ mindestens und in mindestens einem genau enthalten ist. Von den Summanden die den Teiler genau enthalten, legte Hensel willkürlich einen als *das zum Teiler $p^\varrho$ gehörige Produkt* fest.[256] Dabei ist $\alpha_1\pi_1^{(1)}$ durch $p^{\frac{1}{d}}$ teilbar und die entsprechenden Elemente der anderen beiden Fundamentalsysteme durch $p^{\frac{1}{e}}$ bzw. $p^{\frac{1}{f}}$. In den rationalen Koeffizienten ist stets eine ganzzahlige Potenz von $p$ enthalten, während jedes Element des Fundamentalsystems eine Potenz mit einem Exponenten kleiner als Eins beisteuert.

Hensel formulierte als sein Ziel, für ein beliebiges linear unabhängiges System $\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_1^{(n)}$ die aus den Konjugierten gebildete Matrix $S = \left(\xi_h^{(i)}\right)$ "auf ihre Theilbarkeit durch die Primzahl $p$ zu untersuchen."[257]
Daß seine Theorie geeignet für diese Zielstellung ist, begründete er folgendermaßen:

> Offenbar genügt es, ihre $n^2$ Elemente $\xi_h^{(i)}$ modulo $\wp^M$ zu betrachten; denn die für diesen Primdivisor gefundenen Resultate gelten dann auch für jeden anderen und somit auch für $p$ selbst.[258]

Hensels Grundgedanke war also, daß der Übergang zu dem Primdivisor $\wp$ die weitere Gültigkeit der technischen Argumente sichert, die Allgemeinheit der Ergebnisse aber nicht einschränkt.[259]

Für die Untersuchung bezüglich der Teilbarkeit durch $p$ ersetzte Hensel alle $n^2$ Einträge durch die zu-

[253] Hierbei ist $\wp$ irgendein Primteiler von $p$ "für den Galois'schen Körper niedrigster Ordnung unter welchem die conjugirten Körper" $K(w_i), K(\gamma_i), K(\delta_i), K(\varepsilon_i)$ enthalten sind, [41, 1902, 321].
[254] Diese Schreibweise wird hier zur besseren Lesbarkeit eingeführt. Hensel schrieb $\gamma_i^{(j)}$ etc.
[255] [41, 1902, 322].
[256] Hensel schrieb, "das erste", aber die Anordnung der Elemente, auf die sich das bezieht, ist willkürlich, [41, 1902, 323].
[257] [41, 1902, 323].
[258] [41, 1902, 323].
[259] Ob dieser Gedanke richtig ist,läßt sich so allgemein nicht entscheiden.

geordneten Zahlen der Abbildungskörper, ordnete der $i$-ten Spalte den Teiler $p^{\varrho_i}$ zu und sortierte die Elemente $\xi_1^{(i)}$ so, daß $\varrho_1 \leq \varrho_2 \leq \cdots \leq \varrho_n$ ist. Anschließend führte er einen Algorithmus durch, nach dem in jeder Spalte noch genau ein Element der verschiedenen Fundamentalsysteme steht.

**Algorithmus**

Hensel begann mit dem zu $p^{\varrho_1}$ zugeordneten Produkt, das aufgrund der Sortierung in der ersten Spalte auftritt. Dieses sei ohne Einschränkung $a_i\gamma_1^{[i]}$. Durch elementare Umformungen wird dann $\gamma_1^{[i]}$ aus den übrigen Spalten der ersten $\lambda$ Zeilen und damit aus den Spalten der gesamten Matrix entfernt:

> Dann kann man von jeder der $(n-1)$ folgenden Zahlen $\xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \ldots \xi^{(n)}$ ein solches Multiplum von $\xi^{(1)}$ abziehen, dass in ihnen die entsprechenden mit $\gamma_i^{[1]}$ multiplicirten Elemente sämmtlich fortfallen, da ja ihre Zahlcoefficienten $a_i^{(1)}, \ldots a_i^{(n)}$ mindestens dieselbe Potenz von $p$ enthalten als $a_i^{(1)}$.[260]

Das so modifizierte System hat weiterhin als minimalen Teiler $p^{\varrho_1}$ und außer in der ersten Spalte kommen alle $\lambda$ Konjugierten von $\gamma_1^{[i]}$ nicht mehr vor.[261] Da mit den übrigen Elementen auch ihre Teiler modifiziert worden sein können, müssen die Elemente nach den neuen Teilern $p^{\overline{\varrho}_2}, \ldots, p^{\overline{\varrho}_n}$ sortiert werden. Dann werden wiederum elementare Umformungen durchgeführt, so daß das zu $p^{\overline{\varrho}_2}$ gehörige Produkt in den letzten $(n-2)$ Spalten nicht mehr auftritt. Führt man dieses Verfahren fort, so erhält man ein äquivalentes System, dessen letzte Spalte noch genau eines der Elemente $\gamma_i, \delta_j, \varepsilon_k$ enthält, denn diese Umformungen lassen die Determinante modulo $p$ äquivalent und die Elemente waren linear unabhängig.

Nachdem Hensel das System so auf untere Blockdreiecksform gebracht hatte, begann er einen neuen Paragraphen, um zu zeigen,

> dass und wie man von einem beliebigen Systeme $(\xi^{(1)}, \ldots \xi^{(n)})$ von unabhängigen ganzen Zahlen ausgehend zu einem Fundamentalsystem für die ganzen Zahlen des Körpers $K(w)$ kommen, und zugleich, und das ist das Wesentliche, die charakteristischen Eigenschaften jener Systeme auffinden kann.[262]

Hensel führte zunächst die vorgestellten Umformungen an dem System der $\xi^{(i)}$ aus, wodurch er das System $(\eta_h^{(i)})$ erhielt. Sei dann (ohne Einschränkung) $\gamma_1^{[\varrho]}$ das einzige Element der Fundamentalsysteme, das in der letzten Spalte noch vorkommt. Dann bestehen Kongruenzen $\eta_i^{(n)} \equiv a\gamma_i^{[\varrho]} \bmod \wp^M$ mit $a \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, \ldots, \lambda$ und $\eta_j^{(n)} \equiv 0 \bmod \wp^M$ für $j = \lambda + 1, \ldots, n$. Sei $a = p^\nu e$ mit zu $p$ primem $e$. Dann kann man $\eta^{(n)}$ durch $p^\nu$ teilen und danach Vielfache des neuen Elements $\overline{\eta}^{(n)}$ von den vorherigen Elementen abziehen, so daß $\gamma_i^{[\varrho]}$ in den vorherigen Spalten des Systems nicht mehr auftritt.[263] Nachdem die vorletzten Spalte nur noch eines der $\gamma_1^{[i]}, \delta_1^{[j]}, \varepsilon_1^{[k]}$ enthält, kann man dieses genauso aus den davor liegenden Spalten entfernen. Am Ende tritt also in jeder Spalte genau eines der Elemente der Fundamentalsysteme auf und indem man $e\gamma_i^{[\varrho]}$ wieder mit $\gamma_i^{[\varrho]}$ bezeichnet etc., erhält man:

260 [41, 1902, 324]. Noch auf der gleichen Seite spezifizierte Hensel, daß man "ganzzahlige Multipla" abziehen solle. Daß dies möglich ist, liegt daran, daß $M$ beliebig groß, aber fest gewählt ist, denn man muß den Anteil von $a_i^{(1)}$, der prim zu $p$ ist, modulo $p^M$ invertieren.

261 [41, 1902, 324]. Hensel wechselte in seinem Text die Bezeichnungen: Für ihn sind jetzt $\gamma_i^{(j)}$ die Konjugierten von $\gamma_i^{(1)}$. Hier wird aus Gründen der Übersichtlichkeit die zuerst eingeführte Notation beibehalten.

262 [41, 1902, 325].

263 Dies ist möglich, da in den ersten $\lambda$ Entwicklungen von $\overline{\eta}^{(n)}$ der Koeffizient $e$ von $\gamma_i^{[\varrho]}$ eine Einheit modulo $p$ ist und jeder frühere Koeffizienten von $\gamma_i^{\varrho}$ "$p$ mindestens ebenso oft enthält, wie die Einheit $e$." [41, 1902, 325]. Auch hier ist das (implizite) Argument, daß $e$ als Einheit mod $p$ auch eine Einheit mod $p^M$ ist und man bei Betrachtung mod $\wp^M$ die Koeffizienten mod $p^M$ reduzieren kann.

Es giebt stets ein System $(\xi^{(1)},\dots\xi^{(n)})$ von ganzen algebraischen Zahlen eines beliebigen Körpers $K(w)$ für welche das zugehörige algebraische System $(\xi_k^{(i)})$ modulo $\wp^M$ congruent ist dem folgenden einfachen Systeme:

$$(S)\equiv\begin{pmatrix}\gamma_1^{[1]} & \dots & \gamma_1^{[\lambda]}, & 0 & \dots & 0, & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & & & & & & & \\ \gamma_\lambda^{[1]} & \dots & \gamma_\lambda^{[\lambda]}, & 0 & \dots & 0, & 0 & \dots & 0\\ 0 & \dots & 0, & \delta_1^{[1]} & \dots & \delta_1^{[\mu]}, & 0 & \dots & 0\\ & & & \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & 0, & \delta_\mu^{[1]} & \dots & \delta_\mu^{[\mu]}, & 0 & \dots & 0\\ 0 & \dots & 0, & 0 & \dots & 0, & \varepsilon_1^{[1]} & \dots & \varepsilon_1^{[\nu]}\\ & & & & & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0, & 0 & \dots & 0, & \varepsilon_\nu^{[1]} & \dots & \varepsilon_\nu^{[\nu]}\end{pmatrix},$$

wo

$\Gamma=\left(\gamma_i^{[\kappa]}\right),\Delta=\left(\delta_{i'}^{[\kappa']}\right),E=\left(\varepsilon_{i''}^{[\kappa'']}\right)$ Fundamentalsysteme modulo $\wp$ für die Abbildungskörper

$K(\gamma),K(\delta),K(\varepsilon)$ sind. Für diese Systeme ist also:

$$S\equiv\begin{pmatrix}\Gamma, & 0, & 0\\ 0, & \Delta, & 0\\ 0, & 0, & E\end{pmatrix}\pmod{\wp^M}$$

d.h. es zerfällt modulo $\wp^M$ in die drei Partialsysteme $\Gamma,\Delta,E$ entsprechend den zugehörigen Abbildungskörpern.[264]

Hensel zeigte weiter, daß ein solches System ein Fundamentalsystem modulo $p$ ist, denn eine Zahl $\xi=u_1\xi_1^{(1)}+\dots+u_n\xi_1^{(n)}$ ist "nur dann durch $p$ algebraisch teilbar, wenn alle ihre $n$ Conjugirten den Galois'schen Primtheiler $\wp$ ebenso oft enthalten, als dieser in $p$ vorkommt."[265]
Teile genau $\wp^r$ die Primzahl $p$. Betrachtet man dann das System der $n$ konjugierten Kongruenzen, deren erste $u_1\gamma_1^{[1]}+\dots+u_\lambda\gamma_1^{[\lambda]}\equiv 0 \bmod \wp^r$ ist, so zerfällt dieses in drei unabhängige Kongruenzensysteme. Daher folgt aus den Eigenschaften der Fundementalsysteme $\Gamma,\Delta,E$, daß $\xi$ genau dann durch $p$ teilbar ist, wenn alle $u_i$ es sind. Man erhält daher:

Ein System $(\xi^{(1)},\dots\xi^{(n)})$ ist dann und nur dann ein Fundamentalsystem für die ganzen Zahlen des zugehörigen Körpers, wenn es für jede Primzahl $p$ äquivalent ist einem anderen, welches modulo $\wp^M$ in die zu $p$ gehörigen Partialsysteme $\Gamma,\Delta,\dots E$ zerfällt, wenn $\wp$ irgend einen Galois'schen Primtheiler von $p$ für das betrachtete Gebiet bedeutet.[266]

## Allgemeinere Aufgabenstellung

Anschließend formulierte Hensel als "Grundproblem der höheren Arithmetik" die Aufgabe, ein Fundamentalsystem für Zahlen mit vorgegebenen Teilbarkeitseigenschaften zu konstruieren:

Es sei $\mathcal{D}=P^\varrho Q^\sigma R^\tau\dots S^\nu$ ein beliebiger Divisor des Körpers $K(w_1)$, $P,Q,\dots S$, also Primfactoren innerhalb $K(w_1)$, welche natürlich auch zu verschiedenen reellen Primzahlen $p,q,\dots$ gehören können, und $\varrho,\sigma,\dots,\nu$ bedeuten ganzzahlige Exponenten, welche positiv, oder negativ, oder aber auch Null sein können. Die Gesammtheit aller Zahlen von $K(w_1)$ welche Multipla von $\mathcal{D}$ sind, bildet dann einen Theilbereich dieses Körpers, *das zu $\mathcal{D}$ gehörige Ideal $J(\mathcal{D})$*. Wir stellen uns nun die Aufgabe, ein Fundamentalsystem für alle Multipla von

264 [41, 1902, 326f].
265 [41, 1902, 327]. Hier benutzte Hensel also explizit die Möglichkeit, statt aller konjugierten Primdivisoren bezüglich einer algebraischen Zahl alle Konjugierten bezüglich eines Primdivisors zu betrachten.
266 [41, 1902, 327].

$\mathcal{D}$ zu suchen, d.h. ein System: $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(n)}$ von $n$ solchen Zahlen von $J(\mathcal{D})$ zu finden, dass alle Multipla von $\mathcal{D}$ und nur sie in der Form $u_1\eta^{(1)} + \cdots + u_n\eta^{(n)}$ mit ganzzahligen Coefficienten darstellbar sind.[267]

Er formte hierzu ein beliebiges linear unabhängiges System innerhalb dieses Ideals mit Hilfe des obigen Algorithmus so um, daß es "ein Fundamentalsystem zunächst für das Product $P^\varrho Q^\sigma R^\tau$ der zu $p$ gehörigen Primfactoren von $\mathcal{D}$ ist, während es in Bezug auf jede andere Primzahl $q, r, \ldots$ gar nicht geändert wird."[268] Die schon am Ende des sechsten Paragraphen betrachteten Fundamentalsysteme für Vielfache von $P^\varrho$ bezeichnete Hensel mit $\Gamma_\varrho$ und nannte sie jetzt *Partialsysteme $\varrho$ter Ordnung*. Damit erhielt er:

In dem zu einem Divisor $\mathcal{D}$ gehörigen Ideal $J(\mathcal{D})$ existirt stets ein System $(\xi^{(1)}, \ldots \xi^{(n)})$ algebraischer Zahlen, dessen zugehöriges System $S = (\xi_g^{(h)})$ modulo $\wp^M$ dem folgenden Systeme äquivalent ist:

$$S \equiv \begin{pmatrix} \Gamma_\varrho, & 0, & 0 \\ 0, & \Delta_\sigma, & 0 \\ 0, & 0, & E_\tau \end{pmatrix} \quad (\text{mod.}\, \wp^M).$$

[...] ein solches System $(\xi^{(1)}, \ldots \xi^{(n)})$ ist umgekehrt auch sicher ein Fundamentalsystem für alle Multipla von $P^\varrho Q^\sigma R^\tau$.[269]

Betrachtet man alle Primzahlen, von denen Teiler in $\mathcal{D}$ vorkommen, und führt man die entsprechenden Umformungen für alle diejenigen davon aus, für die das aktuelle System noch kein lokales Fundamentalsystem für den entsprechenden Teildivisor von $\mathcal{D}$ ist, so kommt man zu einem absoluten Fundamentalsystem für die Multipla von $\mathcal{D}$.

Da alle solchen Fundamentalsysteme äquivalent sind, muß ein gegebenes Fundamentalsystem auch umgekehrt eine solche Umformung zulassen und es

ergiebt sich der folgende wichtige und meines Wissens noch nicht ausgesprochene Satz, welcher einmal die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür enthält, dass ein System $(\xi^{(1)}, \ldots \xi^{(n)})$ überhaupt ein Fundamentalsystem für einen algebraischen Divisor ist, und der zweitens erlaubt den zugehörigen Divisor $\mathcal{D}$ aus seinem Fundamentalsysteme zu bestimmen.

I) Ein System $(\xi^{(1)}, \ldots \xi^{(n)})$ ist dann und nur dann ein Fundamentalsystem für ein Ideal, wenn es für einen beliebigen Galois'schen Primtheiler $\wp$ modulo $\wp^M$ in Partialsysteme $\Gamma_\varrho, \Delta_\sigma, \ldots E_\tau$ zerfällt, entsprechend der Zerlegung $p \sim P^d Q^e \ldots R^f$ der zu $\wp$ gehörigen Primzahl $p$ in ihre Primfactoren für $K(w_1)$, und wenn dasselbe für jede andere Primzahl $q, r, \ldots$ der Fall ist.

II) Ist ferner $P$ irgend ein Primtheiler des Körpers $K(w_1)$ und $\varrho$ die Ordnung des zugehörigen Partialsystems $\Gamma_\varrho$ für das System $(\xi^{(1)}, \ldots \xi^{(n)})$, so ist

$$\mathcal{D} = \prod_{(P)} P^\varrho$$

der Divisor, für welchen $(\xi^{(1)}, \ldots \xi^{(n)})$ ein Fundamentalsystem ist, wenn das Product auf alle Primfactoren des Körpers $K(w_1)$ erstreckt wird.[270]

Im neunten Paragraphen behauptete Hensel, man könne jetzt

die Richtigkeit einer grösseren Anzahl von Fundamentalsätzen der Idealtheorie direct in Evidenz setzen, deren Beweis sonst grosse und manchmal nicht völlig überwundene Schwierigkeiten bot.[271]

---

[267] [41, 1902, 327f]. Diese allgemeinere Aufgabenstellung könnte eine von denjenigen sein, die Hensel in dem Brief an Weber als aus der umfassenderen Theorie der algebraischen Funktionen angeregt ansprach, vgl. 4.2.1.

[268] [41, 1902, 328]. Hensel schrieb, wenn man das System "wörtlich ebenso" transformiere, gelange man "auch wörtlich zu demselben Resultate," [41, 1902, 329].

[269] [41, 1902, 329].

[270] [41, 1902, 329f].

[271] [41, 1902, 330].

Dazu verwies er zunächst auf die "zwei kleinere[n] Notizen" [29 & 30, 1897]. Anschließend definierte er (analog zum Fall der algebraischen Funktionen) mit Hilfe der Verzweigungszahlen $\overline{d}$, die er im sechsten Paragraphen eingeführt hatte, den *Verzweigungsteiler* $\mathcal{Z}_w = \prod_{(P)} P^{\overline{d}-1}$, um die Informationen über die jeweiligen $p$-Anteile der Diskriminante $D(\mathcal{D})$ des Fundamentalsystems für $\mathcal{D}$ zusammensetzen zu können. Mit seiner Hilfe gelangte er zu der einfachen Formel $D(\mathcal{D}) = \pm(N(\mathcal{D}))^2 \cdot (N(\mathcal{Z}_w))$, die insbesondere für die Körperdiskriminante $D(1) = N(\mathcal{Z}_w) = \prod_P p^{k(\overline{d}-1)}$ ergibt, wobei $k$ durch $N(P) = p^k$ bestimmt ist.[272]

Im abschließenden Paragraph betrachtete Hensel, ebenfalls wie in der Theorie der algebraischen Funktionen, die komplementären Systeme. Sein Ziel war es, einen "wichtigen[,] auf einem ganz anderen Wege von Herrn Dedekind bewiesenen Satz" abzuleiten.[273]
Hensel zeigte dazu, daß das komplementäre System eines Fundamentalsystems wieder ein Fundamentalsystem ist. Anschließend zeigte er durch eine ausführliche Rechnung, daß das komplementäre System in Partialsysteme gleicher Größe zerfällt, wenn das ursprüngliche System dies tut. Ist $\varrho$ die Ordnung eines Partialsystems zum Primdivisor $P$, $\overline{\varrho}$ die Ordnung des entsprechenden Partialsystems des komplementären Systems und $\overline{d}$ die Verzweigungszahl zu $P$, so erhielt er die Formel $\varrho + \overline{\varrho} = -(\overline{d} - 1)$. Damit gelang ihm

> ein neuer und einfacher Beweis des folgenden wichtigen Satzes: Ist $(\xi^{(1)}, \dots \xi^{(n)})$ ein Fundamentalsystem für einen beliebigen Divisor $\mathcal{D}$, so ist das complementäre System $(\overline{\xi}^{(1)}, \dots \overline{\xi}^{(n)})$ ebenfalls ein Fundamentalsystem für einen anderen Divisor $\overline{\mathcal{D}}$ und zwischen diesen beiden Divisoren besteht stets die Gleichung: $\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}} = \frac{1}{\mathcal{Z}_w}$, wenn $\mathcal{Z}_w$ den Verzweigungstheiler jenes Körpers bedeutet.[274]

## 4.5 Exkurs: Die Theorie der algebraischen Funktionen zweier Variablen

Hensel verallgemeinerte seine Herangehensweise und seine Ergebnisse aus dem zahlentheoretischen Fall und dem Fall der algebraischen Funktionen einer Variablen auch auf den Fall zweier Variablen. Er trug darüber 1898 und 1899 auf den DMV-Tagungen vor ([36, 1899] bzw. [37, 1900]), hielt im Wintersemester 1898/99 eine Vorlesung zu diesem Themenkomplex und veröffentlichte 1900 eine ausführliche Darstellung der Theorie in den Acta Mathematica [38, 1900].

**Der erste Vortrag**

In dem Vortrag *Ueber die Theorie der algebraischen Functionen zweier Variabeln* 1898 in Düsseldorf ging Hensel vom Fall einer Variablen aus und begann damit, die Form des Entwicklungselements zu motivieren. Dazu interpretierte er den Linearfaktor $(x - a)$ als die rationale Funktion, die im Punkt $x = a$ von minimaler Ordnung verschwindet. Die gesuchte Entsprechung fand er in einer irreduziblen Funktion $P(x, y)$, die eine irreduzible Kurve $\mathcal{P}$ definiert.

[272] [41, 1902, 331].
[273] [41, 1902, 332].
[274] [41, 1902, 336].

> Von diesem Gesichtspunkt aus betrachtet wird die Theorie der analytischen Functionen zweier Variablen genau so einfach und übersichtlich wie die von einer Veränderlichen.[275]

Für eine rationale Funktion von $x$ und $y$ erhielt er eine Darstellung

$$Z = P^{\varrho}(E_0 + E_1 P + E_2 P^2 + \dots) = P^{\varrho}\mathcal{E} = P^{\varrho} \cdot \frac{f(x,y)}{g(x,y)}.$$

Ist dabei $P(x,y)$ in $y$ vom Grad $\nu$, so haben die $E_i$ die Gestalt $E_i = a_0^{(i)} + a_1^{(i)} y + \dots + a_{nu-1}^{(i)} y^{\nu-1}$, wobei die $a_j^{(i)}$ gebrochene rationale Funktionen von $x$ sind. Die Potenzreihe $\mathcal{E}$ konvergiert gleichmäßig in einer Umgebung der Kurve $\mathcal{P}$. Ausnahmen hiervon sind nur die Schnittpunkte von $g(x,y) = 0$ und $P(x,y) = 0$. Er betrachtete $K = \mathbb{Q}(x,y)$ als Grundkörper und eine algebraische Erweiterung $n$-ten Grades. Für eine Funktion dieses Körpers erhielt er

$$Z = P^{\frac{\varrho}{\alpha}}(E_0 + E_1 P^{\frac{1}{\alpha}} + E_2 P^{\frac{2}{\alpha}} + \dots),$$

wobei außer für endlich viele Verzweigungskurven $\alpha = 1$ ist. Die Koeffizienten $E_i$ liegen in einem Körper $K(\eta)$, wobei $\eta$ einer irreduziblen Gleichung $\sigma$-ten Grades mit modulo $P(x,y)$ reduzierten ganzen Funktionen als Koeffizienten genügt.

Insgesamt gibt es $n$ solche Entwicklungen, wobei je $\alpha$ sich nur durch die gewählte $\alpha$-te Wurzel aus $P$, und je $\sigma$ sich nur durch konjugierte Werte von $\eta$ unterscheiden, so daß mit einer Entwicklung bereits $\alpha\sigma$ weitere Entwicklungen mitbestimmt sind. Diese Entwicklungen konvergieren ebenfalls gleichmäßig in einer Umgebung von $\mathcal{P}$, wobei zusätzlich noch die Schnittpunkte der Verzweigungskurven mit $\mathcal{P}$ ausgeschlossen werden müssen.

### Der zweite Vortrag

Der zweite Vortrag *Ueber eine neue Theorie der algebraischen Functionen zweier Variabeln* stellte Hensels Theorie als analytisch neben die geometrischen Theorien von Clebsch und Noether. Hensel bezeichnete sie als "directe Verallgemeinerung der Weierstraßschen Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen auf Functionen von zwei und beliebig vielen Variablen".[276] Sein Ziel sei es zu zeigen,

> daß und in welcher Weise der gesamte Wertvorrat einer $n$-wertigen algebraischen Function von zwei Variablen stetig, d.h. in $n$ Zweigen, ausgebreitet werden kann, und wie die einzelnen Zweige derselben ineinander übergehen.[277]

Sei diesmal $K(x,y,z)$ durch $f(x,y,z) = A_n(x,y)z^n + \dots + A_0(x,y) = 0$ definiert, d.h. algebraisch vom Grad $n$ über $\mathbb{Q}(x,y)$. Hensel ordnete einem Punkt $\mathcal{P}_0$ mit den Koordinaten$(x = a_0, y = b_0)$ die $n$ darüberliegenden Punkte zu, veränderte den Ausgangspunkt $\mathcal{P}_0$ stetig und betrachtete die Ausnahmepunkte, für die die so erhaltenen Zweige zusammenfallen. Diese liegen auf der Polkurve $A_n(x,y) = 0$ sowie auf den durch die Diskriminante von $f$ definierten Kurven. Da diese singulären Punkte nicht isoliert liegen, ergibt sich die Aufgabe, die Funktion in der Umgebung einer kritischen Kurve oder allgemeiner einer beliebigen Kurve zu entwickeln.

[275] [36, 1899, 58].
[276] [37, 1900, 221f].
[277] [37, 1900, 222].

Hensel entwickelte zuerst einen Zweig $l_0$ einer beliebigen Kurve $P$ in der Umgebung eines Punktes $\mathcal{P}_0$ in eine Potenzreihe $y_0(x|a_0)$, die nach gebrochenen Potenzen von $(x - a_0)$ fortschreitet. Als "Fundamentalaufgabe" bezeichnete er dann die folgende Aufgabe:

> Es sollen die Wurzeln $z_1, z_2, \ldots z_n$ der Gleichung $f(z, xy) = 0$ in einer endlichen Umgebung von $l_0$ durch Reihen dargestellt werden, welche hier gleichmäßig convergieren.[278]

Hensel schrieb, daß als allgemeine Form einer solchen Reihe $\sum_h e_h(x|a_0)(y - y_0)^{\frac{h}{b}}$ angenommen werden kann, wobei er den "algebraischen Charakter der Coefficienten $e_h(x|a_0)$" nachgewiesen habe, indem er ein "rein arithmetisches Verfahren [nutzte], in welchem die Coefficienten und Exponenten einzeln und successive berechnet werden."[279] Hier ist vermutlich die erste Stelle, an der Hensel im Zusammenhang mit Eigenschaften einer Größe von *Charakter* sprach.[280]

Die Diskriminantenkurve von $K(x, y, z)$ zerfällt in Doppelkurven, die auftreten, wenn die Anfangsglieder zweier Entwicklungen übereinstimmen, und Verzweigungskurven. Das Auftreten von Doppelkurven, die zugleich Verzweigungskurven sind, läßt sich vermeiden.

Die Koeffizienten $e_i(x|a_0)$ sind algebraische Funktionen einer festen Ordnung, liegen also

> auf einer und derselben Kugelfläche $R_\nu$ ausgebreitet, auf der auch $y_0$ eindeutig ist, weil alle Coefficienten $e_i(x|a_0)$ von $y_0$ algebraisch abhängen.[281]

Die Diskriminantenkurve gehört nicht zum Konvergenzbereich von Entwicklungen, die mit negativen Exponenten beginnen. Der Konvergenzbereich wird für endlich viele Punkte "in $x$ und $y$ unendlich klein", nämlich für die Verzweigungspunkte der Riemannschen Flächen $R_\nu$, die Pole der Koeffizienten $e_i(x|a_0)$ und für die Schnittpunkte der Kurve $P(x, y) = 0$ mit der Diskriminantenkurve.[282]

> In jenen kritischen Punkten selbst besitzt aber die bezügliche Entwickelung wieder einen endlichen Convergenzbereich, und es giebt eine und nur eine von den $n$ dort vorhandenen Reihen, welche in der ganzen Umgebung mit den dort gültigen Entwickelungen coincidirt.[283]

Hensel ordnete jeder Koeffizientenfläche $R_\nu$ einen Primdivisor zu und sagte, eine Funktion enthalte seine $h$-te Potenz, wenn die entsprechende Entwicklung mit $(y - y_0)^{\frac{h}{b}}$ beginnt.

Im zweiten Teil des Vortrags skizzierte Hensel eine Divisorentheorie,[284] die der später für algebraische Funktionen einer Variablen in [39, 1901] dargestellten vollständig entspricht. Dazu ordnete er jeder Funktion des Körpers $K(x, y, z)$ einen Divisor zu, der beschreibt, durch welche Primdivisoren er teilbar ist. Dieser läßt sich als Quotient ganzer Divisoren schreiben. Er nannte eine Funktion *ganz*, wenn sie nur für $x = \infty$ oder $y = \infty$ unendlich wird, der Nenner also keine im Endlichen liegenden Divisoren enthält.

Hensel behauptete, es gäbe ein Fundamentalsystem für die ganzen Funktionen mit $n$ Elementen, womit er einer Aussage Kroneckers widerspräche:

[278] [37, 1900, 224].

[279] Beide [37, 1900, 224].

[280] Bei der Erarbeitung der Einführung der $p$-adischen Zahlen u.a. in der Vorlesung 1902 benutzte Hensel diese Sprechweise systematisch, vgl. 5.1.1, 5.2 und 5.3.

[281] [37, 1900, 225]. Die Ordnung von $y_0$ ist daher ein Teiler von $\nu$.

[282] [37, 1900, 225].

[283] [37, 1900, 226]. Es geht also darum, daß man in diese kritischen Punkte nicht mit Fortsetzungen hineinkommt, während man durchaus Entwicklungen von dort kommend fortsetzen kann.

[284] Dies bedeutet insbesondere, daß Hensel seine Ergebnisse nur referierte.

> Leopold Kronecker, der diesen Fragen zuerst nähergetreten ist, zeigte in seiner Festschrift, daß diese Aufgabe zwar lösbar ist, behauptete jedoch, daß dieses Fundamentalsystem im allgemeinen mehr als $n$ Elemente besitzen müsse.[285]

Weiter wollte er analog zum zahlentheoretischen Fall bestimmen, wie oft der Teiler $P$ in der Körperdiskriminante auftritt: Gehören zu $P$ genau drei Primdivisoren mit den Verzweigungsordnungen $b, b', b''$ und den Koeffizientenordnungen $\lambda, \lambda', \lambda''$, so sei der Exponent von $P$:

$$\varrho = \lambda(b-1) + \lambda'(b'-1) + \lambda''(b''-1) = n - (\lambda + \lambda' + \lambda'') = n - l,$$

wenn $l$ die Summe der Koeffizientenordnungen der Primdivisoren von $P$ ist.

Ebenfalls analog zum zahlentheoretischen Fall könne ein Fundamentalsystem für einen Divisor $\vartheta$ aufgestellt werden, dessen Diskriminante $D(\vartheta) = N(\theta)D(1)$ ist. Das reziproke System ist dann Fundamentalsystem für den Divisor $\overline{\vartheta}$, der durch $\vartheta\overline{\vartheta} \sim \frac{1}{\mathcal{Z}}$ bestimmt ist, wobei $\mathcal{Z} \sim \prod \mathcal{P}^{b-1}$ der Verzweigungsteiler ist.
Mit Hilfe dieses Satzes könne man ein vollständiges System von Integranden erster Gattung aufstellen und zu einer Verallgemeinerung des Satzes von Riemann-Roch gelangen. Ebenso wie die Funktionen könnten auch die Differentialquotienten durch Divisoren beschrieben werden, und dies gewähre "wohl den einfachsten Eingang in dieses schwierige und bisher noch wenig behandelte Gebiet" der mit dem Körper $K(x, y, z)$ zusammenhängenden Integrale.[286]
Die Zielstellungen der geplanten Divisorentheorie in der Theorie der algebraischen Funktionen zweier Variablen orientiert sich sehr eng an der Vorgehgensweise der später beendeten Arbeit [39, 1901].

**Ausarbeitung**

Die ausführliche Arbeit [38, 1900], ebenfalls mit dem Titel *Ueber eine neue Theorie der algebraischen Functionen zweier Variabeln*, behandelt ziemlich genau den Inhalt des ersten Teiles des zweiten Vortrags. Hensel ging von der Zerlegung der rationalen Funktionen zweier Variablen in Linearfaktoren an der Stelle $x = a$ aus und leitete daraus deren Entwicklung in Potenzreihen ab. Anschließend bestimmte er die Entwicklungen algebraischer Funktionen in der Umgebung eines regulären Kurvenzweigs $y_0$,[287] die nach ganzen Potenzen von $(y - y_0)$ verlaufen.

Ist der Kurvenzweig $y_0$ singulär, so gab Hensel die Form der Entwicklung vor:

$$z_0 = e_0(x|a)(y - y_0)^{\varepsilon_0} + e_1(x|a)(y - y_0)^{\varepsilon_1} + \dots$$

und bestimmte dann mit Hilfe Newtonscher Polygone, welche Exponenten $\varepsilon_i$ auftreten sollen.[288]
Die Reihe zerfällt in einen endlichen irregulären und einen regulären Teil. Die Koeffizienten des regulären Teils sind rationale Funktionen von den endlich vielen irregulären Koeffizienten und $y_0$.[289]

[285] [37, 1900, 229]. Das ist nicht ganz richtig: Kronecker machte an der angesprochenen Stelle keine Aussage speziell für den Fall zweier Variablen, [Kronecker, 1882, §§ 6-8]. Hensel kam später nicht auf seine Behauptung zurück, hat sie also insbesondere nicht bewiesen.
[286] [37, 1900, 231].
[287] Dies bedeutet, daß der Kurvenzweig nicht der Diskriminantenkurve der definierenden Gleichung angehört.
[288] [38, 1900, 366f]. Diese werden durch eine Formel bestimmt, so daß Hensel in einem nächsten Schritt noch nachweisen mußte, daß sie streng monoton steigen.
[289] [38, 1900, 400].

Hensel zeigte zuerst, daß die von ihm bestimmten Reihen die geforderte Gleichung formal befriedigen, anschließend aber auch noch, daß sie innerhalb einer endlichen Umgebung gleichmäßig konvergieren und die Gleichungswurzeln darstellen.

Die Arbeit endet mit der Einführung je eines Primdivisors zu der Riemannschen Fläche $R_\nu$, "auf welcher alle jene Coefficienten und $y_0$ eindeutig ausgebreitet sind,"[290] und der Aussage, daß eine Funktion des Körpers $K(x, y, z)$ bis auf eine Konstante durch den zugehörigen Divisor bestimmt ist.
Abschließend behauptete Hensel, auf der gegebenen Grundlage ließe sich eine "vollständige arithmetisch strenge Theorie der algebraischen Functionen von zwei Variablen" geben und auf die Theorie der algebraischen Integrale anwenden, die "keine wesentlich grösseren Schwierigkeiten als die entsprechende für Functionen einer Variablen" böte.[291]

[290] [38, 1900, 400]. "Jene" bezieht sich dabei auf die Koeffizienten einer Entwicklung.
[291] [38, 1900, 416].

# Kapitel 5

# Die $p$-adischen Zahlen als neues mathematisches Objekt

In diesem Kapitel geht es darum, wann und in welchem Sinne Hensel die $p$-adischen Zahlen als neues mathematisches Objekt einführte, und welche mathematischen Behauptungen er damit verband. Die wesentlichen Quellen hierfür sind die Vorbereitungen für die von ihm im Sommersemester 1902 in Berlin gehaltenen Vorlesungen (VL), sowie die Arbeiten [47, 1904] und [49, 1905].
Interpretationshinweise geben die Vorträge [43, 1902] und [52, 1905]. Den ersten hielt Hensel gegen Ende des Wintersemesters 1901/02 vor der Berliner Akademie, den zweiten im September 1905 vor der Naturforscherversammlung in Meran. In letzterem lassen sich die nicht explizierten Behauptungen Hensels deutlich erkennen, da sie auf falsche Transzendenzbeweise (für $e, \pi, e^e$ etc.) führten.
Während es bei der Betrachtung der Vorlesungen um die mathematischen Inhalte geht, geraten bei den gedruckten Arbeiten auch die Darstellungsmittel in den Fokus.
Hensel ordnete nicht länger nur Potenzreihenentwicklungen zu, sondern betrachtete auch weitere Potenzreihen, die nicht von einer (bekannten) algebraischen Zahl herstammen. Er benötigte diese ($p$-adischen Zahlen) als Koeffizienten einer Zerlegung modulo $p^M$ mit beliebig großem $M$, wie er in der Arbeit [40, 1902] schon angedeutet hatte.[1] Hierzu führte er sie in Analogie zu den reellen Zahlen ein, wobei die Zerlegung modulo $p^M$ analog zur Zerlegung in Faktoren mit reellen Koeffizienten wird.

Unter Hinzunahme der reellen Zahlen läßt sich die Analogie zur Theorie der algebraischen Funktionen vervollständigen: Neben den unendlich vielen Entwicklungen nach Potenzen der verschiedenen $p$ gibt es auch eine nach Potenzen von $\frac{1}{10}$. Letzterer entspricht in der Theorie der algebraischen Funktionen die Stelle $x = \infty$, denn an ihr wird nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ (statt von $(x-a)$) entwickelt. Auf dieser Analogie baute Hensel insbesondere seinen anschaulichen Erläuterungstext *Über analytische Funktionen und algebraische Zahlen* [43, 1902] vor der Berliner Akademie auf.

[1] In diesem Zusammenhang wirkt Peter Ullrichs Formulierung, in [47, 1904] und [49, 1905] "wagte Hensel dann den Sprung von der $p$-adischen Entwicklung zu den eigentlichen $p$-adischen Zahlen," [Ullrich, 1999, 134] irreführend, da sie vom Ergebnis her argumentiert.

## 5.1 Einstimmung auf die VL 1902

### 5.1.1 Hensels Vortrag 1902 in Berlin *Über analytische Funktionen und algebraische Zahlen*

Hensel begann seinen Vortrag mit einem Vergleich zwischen der Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen und der Theorie der algebraischen Zahlen, und diesen mit der Beobachtung, daß im Fall einer Variablen die Methoden und Resultate im Endlichen und Unendlichen "absolut identisch" seien,[2] wohingegen in der Theorie der algebraischen Zahlen die Untersuchungen bezüglich der Teilbarkeit (Idealtheorie) und der Größe (u.a. Minkowskis Geometrie der Zahlen) zwar sehr ähnliche Resultate, aber völlig verschiedene Methoden hätten.[3]

Bereits Weierstrass hatte die Theorie der Primdivisoren und der Einheiten zusammengedacht und Analoga in der Theorie der algebraischen Funktionen bemerkt:

> Sowohl für die idealen Primfactoren, wie für die Einheiten in der Theorie der algebraischen Zahlen findet sich also bei den rationalen Functionen des durch eine algebraische Gleichung verbundenen Paares $(xy)$ ein Analogon.[4]

Laut Hensel führt die allgemeinere Theorie der analytischen Funktionen

> in naturgemäßem Übergange aus dem Reiche der algebraischen Größen zu den einfachsten mit ihnen zusammenhängenden transzendenten Funktionen und ergiebt nun eine einleuchtende Einteilung derselben nach ihren charakteristischen Eigenschaften.[5]

Hensel erläuterte weiter, durch langjährige Beschäftigung mit beiden Disziplinen sei er zu einer "Auffassung der Lehre von den allgemeinen Zahlgrößen" geführt worden,[6]

> welche man als Ausdehnung der Theorie der analytischen Funktionen auf die Zahlgrößen ansehen kann, und welche mir einen neuen Einblick in die Natur der rationalen, algebraischen und transzendenten Zahlen zu gewähren scheint.[7]

Hensel behauptete also, daß die Methoden aus der Theorie der analytischen Funktionen nach ihrer Übertragung die Untersuchung transzendenter Zahlen erlauben würden. Als "gesichertes Resultat" (seiner Auffassung) nannte er jedoch nur die "vollständige und völlig einheitliche Behandlung der algebraischen Zahlen nach ihrer Teilbarkeit *und* ihrer Größe."[8]

Zur Illustration seiner Ideen stellte Hensel zunächst für analytische Funktionen seine arithmetische Interpretation der Konzepte *besitzt an jeder Stelle* $(x = a)$ *oder* $(x = \infty)$ *rationalen/algebraischen Charakter* vor. Eine $n$-deutige analytische Funktion besitzt an der Stelle $(x = a)$ bzw. $(x = \infty)$ algebraischen Charakter,

---

[2] [43, 1902, 30].

[3] Hierbei wird von Hensel erstmals implizit die Größe als "Teilbarkeit im Unendlichen" interpretiert. Im Vorwort zu [Hensel/Landsberg, 1902] ist dies nicht der Fall. Dort werden ebenfalls die völlig verschiedenen Methoden betont und bedauert, daß "sich für das [Gebiet] der transcendenten Zahlen bisher noch keine allgemeinen Methoden ergeben haben," [42, 1902, VI].

[4] [Weierstraß, 1902, 393]. Diese Ausarbeitung der Vorlesung zur Theorie der Abelschen Transzendenten in den Gesammelten Werken geht auf eine Vorlesung aus dem Wintersemester 1875/76 zurück.

[5] [43, 1902, 30]. Hensel nannte im gesamten Vortrag keine der angesprochenen Eigenschaften.

[6] [43, 1902, 30]. Bereits hier deutet sich eine der Hauptfragen an die Vorlesung an: Was ist eine "allgemeine Zahlgröße"?

[7] [43, 1902, 30].

[8] Beide [43, 1902, 30].

> wenn ihre $n$ Werte in der Umgebung derselben nach ganzen oder gebrochenen Potenzen der zugehörigen Linearfaktoren $[(x-a)$ bzw. $(\frac{1}{x})]$ entwickelt werden können, welche höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthalten, wenn sie also an jeder Stelle $(x = a)$ mit jeder vorgegebenen Genauigkeit, *d.h. für eine beliebig hohe Potenz* $(x-a)^M$ *als Modul* durch eine algebraische Funktion dargestellt werden kann.[9]

Anschließend definierte Hensel analog *überall rationalen Charakter* für Zahlgrößen:

> Genau ebenso wollen wir sagen, eine Zahlgröße $r$ hat überall rationalen Charakter, wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:
> 1) Sie kann in eine nach fallenden Potenzen einer beliebigen Zahl $m$, z.B. von 10 fortschreitende Reihe entwickelt werden, mit wohldefinierten Koeffizienten, welche ihrer Größe nach unterhalb $m$ liegen, und diese Entwickelung enthält höchstens eine endliche Anzahl positiver Potenzen von $m$. Eine solche Gleichung:
>
> $$r = \frac{a_\varrho}{m^\varrho} + \frac{a_{\varrho+1}}{m^{\varrho+1}} + \ldots$$
>
> spricht nur aus, daß $r$ eine endliche Zahl ist oder mit jeder vorgegebenen Annäherung der Größe nach durch eine rationale Zahl dargestellt werden kann.[10]
> 2) Sie kann nach steigenden Potenzen einer beliebigen ganzen Zahl $\mu$ in eine Reihe
>
> $$b_\varrho \mu^\varrho + b_{\varrho+1}\mu^{\varrho+1} + \ldots$$
>
> mit wohldefinierten Koeffizienten $b_i < \mu$ entwickelt, d.h. mit jeder Annäherung (für eine beliebig hohe Potenz von $\mu$ als Modul) durch eine rationale Zahl dargestellt werden.[11]

Jede rationale Zahl hat überall rationalen Charakter. Hensel plante, später auf die Umkehrung zurückzukommen.[12]

Peter Ullrich behauptet, Hensel habe in [52, 1905] erstmals das Lokal-Global-Prinzip der Zahlentheorie formuliert.[13] Diese Idee klang jedoch bereits im gerade vorgestellten Vortrag an.[14] Auch in der Vorlesung war sie präsent, während Hensel in [52, 1905] von seinem Prinzip abwich und anders argumentierte.

Nur ganz am Rande erwähnte Hensel, daß er nicht nur jeder Primzahl $p$, sondern auch der Größe einen Primdivisor $\wp_\infty$ zuordnen wollte.[15] Anschließend wechselte er zur Definition von *überall algebraischem Charakter*:

> Allgemeiner will ich sagen, eine $n$-wertige Zahlgröße $\xi$ hat überall algebraischen Charakter, wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:
> 1) Ihre $n$ Werte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ können nach fallenden Potenzen einer beliebigen Zahl $m$ mit wohldefinierten Koeffizienten entwickelt werden, welche ihrem absoluten Betrage nach kleiner als $m$ sind, d.h. diese $n$ Werte sind endliche reelle oder komplexe Zahlen.
> 2) Ihre $n$ Werte können nach steigenden Potenzen einer beliebigen Zahl $\mu$, z.B. einer beliebigen Primzahl $p$ in Reihen mit wohldefinierten Koeffizienten entwickelt werden, welche nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $p$ fortschreiten und höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen von $p$ enthalten.

9 [43, 1902, 31]. Hervorhebung B.P. Die Modulaussage bedeutet: Falls man die Partialsumme bis zum Exponenten $M-1$ bildet, diese von der gegebenen analytischen Funktion abzieht und die Differenz durch $(x-a)^{M-1}$ teilt, so verschwindet die erhaltene Funktion für $x = a$.

10 Eine Zahlgröße kann daher wohl auch 'unendlich' sein.

11 [43, 1902, 31].

12 [43, 1902, 31]. Dies ist nicht geschehen. Die Aussage ist jedoch richtig, vgl. 5.6.3.

13 [Ullrich, 1999, 136].

14 Hier soll daher Hensel dieses Prinzip "zugeschrieben" werden, da es ihm als Wegweiser für seine weiteren Bestrebungen diente. Ullrich argumentiert hingegen, er habe es nicht "entdeckt", weil er kein funktionierendes Beispiel zur Verfügung gehabt hätte, vgl. [Ullrich, 1999]. In einem Brief an Hasse vom 11.6.1936 formulierte Hensel (vermutlich im Zusammenhang mit Lokal-Global-Prinzipien), Hasse habe "so manche Wünsche und Hoffnungen... so schön erfüllt", die er in seinem langen Leben gehegt habe.

15 "Dasselbe [die Übertragung der Gesetze für die Ordnungszahlen von den Primzahlen auf die neuen Primdivisoren] gilt hinsichtlich der Größe jener Zahlen, wenn man ihnen für den zugeordneten Primdivisor $\wp_\infty$ eine geeignet präzisierte Ordnungszahl giebt," [43, 1902, 31].

> Eine solche Zahlgröße hat also algebraischen Charakter, wenn sie sowohl ihrer Größe nach, als auch für jede noch so hohe Potenz $\mu^M$ einer beliebigen Zahl $\mu$ als Modul mit jeder vorgegebenen Genauigkeit durch algebraische Zahlen darstellbar ist.[16]

Hensel rechtfertigte diese Definition vorläufig mit der Aussage, er habe in seiner Vorlesung im Wintersemester 1901/02 bewiesen, daß insbesondere algebraische Zahlen überall algebraischen Charakter haben.[17] Es sei hier noch zitiert, wie Hensel ausführte, seine Herangehensweise liefere eine vollständige Theorie der Ideale und der Einheiten:

> Auf alle Zahlgrößen, welche überall algebraischen Charakter haben, können die Gesetze der elementaren Arithmetik ohne weiteres angewendet werden. Ordnet man nämlich jeder Primzahl $p$ wieder $n$ gleiche oder verschiedene Primdivisoren $\wp_1, \wp_2, \ldots, \wp_n$ zu und sagt, die Zahl $\xi$ enthält z.B. den Primteiler $\wp_i$ in der $\varrho_i$-ten Potenz, wenn die Entwicklung von $\xi_i$ nach Potenzen von $p$ von der $\varrho_i$-ten Ordnung ist,[18] so gelten für das Rechnen mit diesen Primteilern die einfachen Gesetze der elementaren Zahlentheorie, und die Anwendung derselben auf algebraische Zahlen liefert die vollständige Theorie der Ideale.
> Ebenso kann man die Entwickelungen jener Zahlen nach fallenden Potenzen von $m$ behandeln, und wenn man auch hier die Ordnungszahlen geeignet definiert, so erhält man eine vollständige Theorie der Einheiten.[19]

Hierbei wird die $n$-wertige Zahlgröße algebraischen Charakters also auch als "Zahl" angesprochen. Die Entwicklungen sind je einem "Wert" der Zahlgröße, also einem der verschiedenen Konjugierten zugeordnet.

Die Themen der folgenden Auseinandersetzung mit der Vorlesung klangen bereits an: Was ist eine Zahlgröße? Was bedeutet Entwicklung, d.h. Kongruenz für eine Potenz $p^M$ als Modul für beliebige Zahlgrößen? Während es aber hier (und im Vortrag in Meran) nur um eine Folge beliebiger algebraischer Zahlen als Näherungswerte ging, beschäftigte Hensel sich im zahlentheoretischen Kontext der Vorlesung auch mit Strukturen, in denen die Zahlgrößen mit einem bestimmten Typ algebraischer Entwicklungen zusammengefaßt werden.

### 5.1.2 Überblick über die Vorlesungen 1902

In der Vorlesung traten die heutigen $p$-adischen Zahlen ohne jedes Pathos als naheliegendes Hilfsmittel auf. Bereits 1897 wollte Hensel die lokalen Potenzreihen nutzen, um aus ihnen die Primdivisoren abzuleiten. Wie bei Kummer ist ein Primdivisor dann kein zahlentheoretisches *Objekt* mehr, sondern nur abstrakt durch die Kriterien dafür definiert, wann eine gegebene algebraische Zahl durch eine bestimmte Potenz des Primdivisors genau teilbar ist.

Jede lokale Potenzreihe entspricht einem Primdivisor und aus ihrem Anfangsterm läßt sich ablesen, durch welche Potenz des Primdivisors die algebraische Zahl genau teilbar ist.[20]

[16] [43, 1902, 31f]. (Dabei ist $m \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{N}$.)

[17] Für nicht-algebraische Zahlen ist nicht klar, was die Darstellung mit einer vorgegebenen Genauigkeit bedeutet: Sei $t$ die gegebene nicht-algebraische Zahl, $p$ eine Primzahl und $E = a_0 + a_1 p + \cdots + a_{M-1} p^{M-1}$ mit algebraischen Zahlen $a_i$ ein Kandidat für das Anfangsstück der Entwicklung von $t$. Um zu prüfen, ob $E$ die Zahl $t$ mit der vorgegebenen Genauigkeit, d.h. modulo $p^M$, darstellt, müsste man prüfen, ob $Q = \frac{t-E}{p^M}$ in Bezug auf $p$ algebraisch ganz ist. Da auch $Q$ nicht-algebraisch ist, ist algebraisch ganz in Bezug auf $p$ aber nicht definiert worden. (Für den entsprechenden Test im Fall der algebraischen Funktionen kann man einfach $x = a$ einsetzen.)

[18] Dies bedeutet, daß die Entwicklung mit der $\frac{\varrho_i}{e_i}$-ten Potenz von $p$ beginnt, wobei $e_i$ von $\wp_i$ abhängt.

[19] [43, 1902, 32].

[20] Dem Primdivisor $P$ wird eine gebrochene Potenz von $p$ zugeordnet, durch die das Entwicklungselement $\pi$ genau teilbar ist. Die algebraische Zahl ist durch $P^a$ genau teilbar, wenn die Entwicklung mit $\varepsilon\pi^a$ beginnt für $a \in \mathbb{Z}$ und $\varepsilon$ eine Einheit modulo $p$. Auch Sellings Idee war es gewesen, aus den konstruierten Kongruenzwurzeln die Teilbarkeit bestimmen zu können, vgl. 4.2.2.

Hensel führte die $p$-adischen Zahlen in der Vorlesung 1902 ein, um die lokalen Potenzreihen abzuleiten. Genauer benötigte er sie, um die definierende Gleichung des Zahlkörpers in Faktoren zu zerlegen, die den Primdivisoren von $p$ entsprechen.
Die Einführung der algebraischen $p$-adischen Zahlen erhielt deutlich mehr Raum als die der gewöhnlichen. Hensel lotete hierbei die verschiedenen Möglichkeiten aus, eine Reihe mit ganzzahligen Bestandteilen zu verallgemeinern.
Die (algebraischen) $p$-adischen Zahlen sind ein neues Beschreibungsmittel, mit dessen Hilfe vor allem Teilbarkeitsaussagen über algebraische Zahlen abgeleitet werden können. Allerdings treten in Hensels Theorie auch $p$-adische Zahlen auf, die zunächst keinen Bezug zu bekannten *Zahlgrößen* haben. Ob Hensel davon ausging, daß ein solcher Bezug trotzdem besteht, läßt sich anhand der Quellen nicht endgültig entscheiden.[21] Daher bleibt auch offen, in welchem Sinn Hensel die $p$-adischen Zahlen als neue mathematische Objekte betrachtete.

Sei $K(\alpha)$ weiterhin ein Zahlkörper $n$-ten Grades und $p$ eine Primzahl. Wie im dritten Kapitel gezeigt wurde, hatte Hensel zu jedem $x \in K(\alpha)$ genau $n$ lokale Entwicklungen konstruiert, die je einem Primdivisor von $p$ zugeordnet waren. Die Entwicklungen zu einem Primdivisor waren untereinander konjugiert. Daher erfüllten sie eine Gleichung, deren Koeffizienten keine algebraischen Bestandteile mehr enthielten. Da Hensel modulo $p^M$ für ein beliebig großes, aber festes $M$ arbeitete, waren die Koeffizienten dieser Gleichung Reste modulo $p^M$.
Die Betrachtung der Primdivsioren führte somit auf eine Zerlegung der von $x$ erfüllten Gleichung $n$-ten Grades modulo $p^M$.[22]

Hensels Ziel war es, den umgekehrten Weg zu gehen: Er wollte mit Hilfe der definierenden Gleichung eines Zahlkörpers für ein Element $x$ die Teilbarkeit durch die Primdivisoren von $p$ ableiten. Dazu führte er eine neue lokale Herangehensweise ein, die Betrachtung *für den Bereich von $p$*.
Zerlegt man die definierende Gleichung für den Bereich von $p$, so entspricht jedem irreduziblen Faktor ein Primdivisor.
Jeder irreduzible Faktor erlaubt es dann, lokale Entwicklungen von $x$ zu bestimmen. Die Entwicklungen zu einem Faktor haben die gleiche Ordnung. Diese gibt an, durch welche Potenz des Primdivisors $x$ teilbar ist.[23]

Es ergibt sich das folgende Programm: Zunächst muß die Betrachtung für den Bereich von $p$ eingeführt werden. Danach wird nachgewiesen, daß die Zerlegung in irreduzible Faktoren für den Bereich von $p$ eindeutig ist. Anschließend wird der Spezialfall behandelt, in dem die Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten irreduzibel bleibt. Der allgemeine Fall wird auf den speziellen zurückgeführt, indem die Ergebnisse geeignet zusammengesetzt werden. Abschließend definierte Hensel noch die Primdivisoren eines so erhal-

[21] In Anbetracht von Abschnitt 5.6 erscheint es allerdings wahrscheinlich.
[22] Die “von $x$ erfüllte Gleichung $n$-ten Grades” meint die Gleichung, die man mit Hilfe der Konjugierten bestimmen kann. Sie ist irreduzibel oder die Potenz eines irreduziblen Faktors.
[23] Ist $\pi$ ein einmal durch den Primdivisor $P$ teilbares Element und beginnt die Entwicklung mit $\pi^c$, so ist $x$ durch $P^c$ teilbar.

tenen Primdivisors, wenn der Zahlkörper algebraisch erweitert wird.

### Äquivalenz für den Bereich von $p$

Hensels *Betrachtung für den Bereich von p* soll das leisten, was die lokale Betrachtung im Fall der Riemannschen Flächen auch leistete: Durch die Konzentration auf den Zusammenhang zu $p$ erhält man einfachere Objekte, an denen man Strukturen im Zusammenhang mit $p$ leicht ablesen kann.
Im einfachsten Fall ordnete Hensel einer rationalen Zahl $x$ eine Entwicklung $x_p$ der Gestalt

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i p^i \quad \text{zu} \quad (\text{mit } k \in \mathbb{Z}, a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}).$$[24]

Die Beziehung zwischen $x$ und seiner Entwicklung nannte er *Äquivalenz für den Bereich von p* und schrieb sie $x \sim x_p$. Für sie wird eine unendliche Folge von Kongruenzen für die Partialsummen gefordert: Für jedes $k_1 \geq k$ soll $x \equiv \sum_{i=k}^{k_1} a_i p^i$ modulo $p^{k_1+1}$ sein.
Im Wesentlichen brechen die Entwicklungen der natürlichen Zahlen ab, die der negativen und der Brüche nicht.[25]

Hat eine beliebige Zahlgröße $x$ eine Entwicklung der obigen Gestalt, so sagte Hensel, sie habe *für den Bereich von p rationalen Charakter*. Man kann dann sofort ablesen, durch welche Potenz von $p$ sie genau teilbar ist. Hensel behauptete (wie in seinem Vortrag), eine Zahlgröße, die für jedes $p$ rationalen Charakter habe, sei rational. (Rationale Zahlen haben überall rationalen Charakter.)
Er verallgemeinerte das Konzept, indem er algebraische Einheiten modulo $p$ als Koeffizienten zuließ und nach gebrochenen Potenzen von $p$ entwickelte. Ist dann $\pi$ genau durch $p^{\frac{1}{e}}$ teilbar, so müssen für die Äquivalenz für den Bereich von $p$ wieder Kongruenzen mit den Partialsummen bestehen:

$$x \equiv \sum_{i=k}^{k_1} a_i \pi^i \ \text{ modulo } p^{\frac{k_1+1}{e}} \ \text{ für alle } k_1 \geq k.$$[26]

Existiert eine solche Entwicklung, so hat die Zahlgröße *$x$ für den Bereich von p algebraischen Charakter*.

### Zerlegung für den Bereich von $p$

Da Hensel nicht mehr nur (endliche) Entwicklungen modulo $p^M$ betrachtete, benötigte er auch eine Verallgemeinerung der Zerlegung modulo $p^M$ für eine Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten. Als potentielle Koeffizienten dieser Zerlegung für den Bereich von $p$ führte Hensel *wohldefinierte p-Reihen* (die späteren $p$-adischen Zahlen) ein. Eine solche Reihe hat ebenfalls die Gestalt

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i p^i \ \text{ mit } a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}, k \in \mathbb{Z},$$

tritt hier aber unabhängig von einem anderen Objekt auf, deren Entwicklung sie wäre.
Hensel faßte die wohldefinierten $p$-Reihen zu einem Körper $K(p)$ zusammen und entwickelte die Koeffizienten der gegebenen Gleichung für den Bereich von $p$. Sucht man Faktoren mit Koeffizienten aus $K(p)$,

[24] Bezeichnung $x_p$ von B.P.
[25] Hat eine rationale Zahl nur Potenzen von $p$ im Nenner, so bricht ihre Entwicklung ebenfalls ab.
[26] Die $a_i$ stammen aus einem (endlichen) vollständigen Restsystem modulo $\pi$.

so kann die zuvor irreduzible Gleichung zerfallen.

Hensel zeigte über mehrere Vorlesungen hinweg, daß die Zerlegung für den Bereich von $p$ eindeutig ist und konstruktiv durchgeführt werden kann (Hensels Lemma).
Dabei bestimmte er anhand der Diskriminante der Gleichung jeweils einen Ausgangspunkt $p^k$, so daß aus der Zerlegung modulo $p^{k+1}$ schrittweise Zerlegungen modulo $p^{k+2}, p^{k+3}, \ldots$ anhand eines Algorithmus bestimmt werden können. Die Faktoren modulo $p^{k+1}$ lassen sich durch Probieren bestimmen und die Eindeutigkeit folgt aus allgemeinen Gründen.
Ist eine Gleichung $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ gegeben, so betrachtet man den $k$-ten Näherungswert $f_k(x) = x^n + a_{1,k} x^{n-1} + \cdots + a_{n,k} \equiv f(x)$ modulo $p^{k+1}$ mit $a_{i,k} = b_{i,0} + b_{i,1} p + \cdots + b_{i,k} p^k$ und sucht nach Zerlegungen von $f_k$.
Hat man eine solche gefunden, z.B. $f_k \equiv g_k h_k$ modulo $p^{k+1}$, so wird diese anschließend beliebig weit verfeinert: Im nächsten Schritt erhalten die Koeffizienten von $g_k$ und $h_k$ zusätzliche Terme $c_{k+1} p^{k+1}$. Für die so erhaltenen $g_{k+1}$ und $h_{k+1}$ gilt dann $f_{k+1} \equiv g_{k+1} h_{k+1}$ modulo $p^{k+2}$ usw.

Die entstehenden irreduziblen Faktoren beliebiger Grade mit nicht-abbrechenden Koeffizienten betrachtete Hensel als analog zu den irreduziblen Faktoren ersten und zweiten Grades bei der Zerlegung mit reellen Koeffizienten.

**Das vollständige Bild**

Hensel faßte reelle bzw. komplexe Zahlen als Reihen nach Potenzen von $\frac{1}{10}$ auf und betrachtete die Situation parallel bezüglich der Größe (genannt: für den Bereich von $\wp_\infty$) und für den Bereich der übrigen $p$. In allen Fällen gibt es eine eindeutige Zerlegung der definierenden Gleichung in irreduzible Faktoren.
Dann ergibt sich für $\wp_\infty$ bzw. jedes $p$ die Aufgabe, so viele konjugierte Potenzreihen als Wurzeln des Faktors für den jeweiligen Bereich zu konstruieren, wie der Grad angibt.
Hat man dies erreicht, so korrespondiert das zahlentheoretische Bild im Ganzen der funktionentheoretischen Situation: Die zu einem $p$ gehörenden Entwicklungen entsprechen denen, die zu einem $(x - a)$ gehören und über $x = a$ liegen. Die zu $\wp_\infty$ gehörenden Entwicklungen entsprechen denen über $\infty$.
Aufgrund dieser vollständigen Entsprechung hoffte Hensel auf zahlentheoretische Lokal-Global-Prinzipien.
Ein erstes Beispiel war seine Behauptung, eine Zahl sei genau dann rational, wenn sie überall rationalen Charakter habe.
Ein Leitgedanke von Hensels Untersuchungen war die entsprechende Aussage für algebraische Zahlen: Eine Zahl sei genau dann algebraisch, wenn sie überall algebraischen Charakter habe. Er hoffte, hieraus Transzendenzaussagen ableiten zu können.[27]

[27] Dazu braucht man nur die einfachere Richtung, die er bereits gezeigt hatte: Eine algebraische Zahl hat überall algebraischen Charakter. Weiter bräuchte man aber einen Nachweis, daß eine irgendwie gegebene Zahl für ein $p$ keinen algebraischen Charakter hat. Hierfür hatte Hensel anscheinend keine konkreten Ideen.

## 5.2 Die Vorlesung 1902: Der Spezialfall, in dem nur ein Primdivisor die Primzahl $p$ teilt

Die Vorlesung *Theorie der algebraischen Zahlen* wurde von Hensel im Sommersemester 1902 an der Berliner Universität gehalten. Gewöhnlich fanden zwei Vorlesungen pro Woche statt (montags und donnerstags), von insgesamt 24 Vorlesungen zwischen dem 28.4.1902 und dem 31.7.1902 sind Aufzeichnungen Hensels erhalten. Diese befinden sich auf zusammen 52 gefalteten A4-Blättern, so daß jedem Blatt vier A5-Seiten entsprechen.[28] Eine neue Vorlesung beginnt stets auf einem neuen Blatt.

Die folgende Darstellung kann nicht der gesamten Vorlesung gerecht werden, zumal diese auch bekannte Teile der Theorie der algebraischen Zahlen mit behandelte. Ein Schwerpunkt der Darstellung liegt auf Hensels (zum Teil changierenden) Antworten auf die folgenden Fragen: Ist das Objekt der Untersuchung die Entwicklung oder die Zahlgröße, zu der die Entwicklung gehört? Kann man eine Wurzel der Gleichung benutzen oder muß man eine konstruieren? usw.
Der erste Teil der Vorlesung behandelt relativ ausführlich und vollständig den einfacheren Spezialfall, in dem nur ein Primdivisor über $p$ liegt.

### 5.2.1 Betrachtung von Gleichungen für den Bereich von $p$

Der mathematische Inhalt dieses Abschnitts entspricht in etwa dem von [47, 1904], d.h. er beinhaltet den Beweis, daß eine gegebene Gleichung eindeutig in für den Bereich von $p$ irreduzible Gleichungen zerlegt werden kann.

#### Die Entwicklung rationaler Zahlen - Äquivalenz für den Bereich von $p$

Schon in [43, 1902], behandelt in 5.1.1, hatte Hensel die Eigenschaft 'endlich zu sein' für eine Zahlgröße ausdrücklich gefordert, also nicht vorausgesetzt. Auch hier erläuterte er den Begriff der *Zahlgröße* nicht, sondern schrieb: Es bilden die rationalen Zahlen

> einen Bereich von Zahlgrößen, dessen Individuen sich durch die elementaren Rechenoperationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division wiedererzeugen... Jedes System von Zahlgrößen, welches diese Eigenschaft besitzt, wollen wir nach Dedekind einen Zahlkörper nennen.[29]

Es ist wahrscheinlich, daß die Bedingung an die Operationen für Hensel die 'unendlichen' Zahlgrößen aus einem Zahlkörper ausschloss. Selbst dann bleibt aber die Frage, ob jede endliche Zahlgröße eine komplexe Zahl ist.[30]

Hensel begann mit der Aussage, daß rationale Zahlen in periodische Dezimalbrüche entwickelt werden können. Anschließend definierte er für sie eine Ordnungszahl in Bezug auf $p$.[31] Er behauptete

> Kann aber auch für Primzahl $p$ entsprechende Entwicklung finden nach steigenden Potenzen von $p$.[32]

[28] Zwischen die Blätter ist ein späterer Vortrag Hensels vor der Berliner Akademie gerutscht, der nicht mitgezählt wird.
[29] VL 1 vom 28.4.1902, S. 1/2. Die erste Ziffer gibt das Blatt, die zweite die Seite darauf an.
[30] Der Bezug auf Dedekind legt dies jedoch nahe, denn bei ihm bestand jeder Zahlkörper aus komplexen Zahlen.
[31] Sei dazu $\mu = p^c \frac{m}{n}$, wobei $m, n \in \mathbb{Z}$ prim zu p sind. Dann ist $c \in \mathbb{Z}$ die Ordnungszahl von $\mu$.
[32] VL 1 vom 28.4.1902, S. 2/1.

Während diese Darstellung für positive ganze Zahlen offensichtlich ist, brechen die gesuchten Reihen für negative bzw. gebrochene Zahlen nicht ab. Hensel mußte daher zunächst definieren, in welchem Sinne die Reihe der gegebenen Zahl entspricht. Dazu betrachtete er als erstes Beispiel:

$$\frac{1}{1-p} = 1 + p + p^2 + \cdots + p^\varrho + \frac{p^{\varrho+1}}{1-p}, \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{1-p} \equiv 1 + p + p^2 + \cdots + p^\varrho \bmod p^{\varrho+1}.$$

(Hierbei ist $R = \frac{p^{\varrho+1}}{1-p}$ offenbar durch $p^{\varrho+1}$ teilbar, da $R$ die Ordnungszahl $\varrho + 1$ hat.)
Er interpretierte es dahingehend, daß die gegebene rationale Zahl $\frac{1}{1-p}$ "nach jeder vorgegebenen Genauigkeit modulo $p^M$ durch die ganze Zahl $1+p+p^2+\cdots+p^{M-1}$ ersetzt" werden könne,[33] was die folgende Notation und Sprechweise motiviere:

> *Für den Bereich von p* ist mit jeder Genauigkeit $\frac{1}{1-p} \sim 1+p+p^2+\ldots$, denn wenn weit genug abbreche, so unterscheiden sich beide Seiten um beliebig großes rationales Multiplum von $p^M$.[34]

Die Kennzeichnung *für den Bereich von p* bedeutet also die schrittweise Betrachtung modulo wachsender Potenzen von $p$ und Hensel führte ein Symbol $\sim$ ein, das er als *äquivalent* ansprach.
Aus der Entwicklung von $\frac{1}{1-p}$ folgerte Hensel diejenige von $-1 = \frac{p-1}{1-p}$ und damit die aller negativer Zahlen $m(-1)$. Die Entwicklung von $e = \frac{m}{n}$ mit zu $p$ primen $m$ und $n$ führte er auf die von $\frac{1}{1-p^\theta}$ zurück, wobei $\theta$ der Exponent von $p$ modulo $n$ ist.[35]
Alle diese Entwicklungen sind periodisch und da jede rationale Zahl eine Darstellung $\mu = p^\varrho e$ hat, schlußfolgerte Hensel:

> Alle rationalen Zahlen sind für den Bereich einer beliebigen Primzahl $\mu \sim c_\varrho p^\varrho + c_{\varrho+1}p^{\varrho+1} + \ldots$, wo die Aequivalenz so zu verstehen ist, dass $\mu - (c_\varrho p^\varrho + \ldots c_{M-1}p^{M-1})$ durch $p^M$ teilbar ist, d.h. es ist $\mu \equiv \sum c_k p^k (\bmod p^M)$ für beliebig hohe Potenzen von $p$ als Modul.[36]

Entscheidend für diesen Begriff der Äquivalenz ist die Teilbarkeit durch $p^M$, die für rationale Zahlen (also insbesondere die hier auftretenden Differenzen $\mu - (c_\varrho p^\varrho + \ldots c_{M-1}p^{M-1})$) definiert worden war.

### Zahlgrößen, die überall rationalen Charakter haben

Hensel verallgemeinerte anschließend die für die rationalen Zahlen gefundenen Eigenschaften, indem er nur noch die Existenz der entsprechenden Entwicklungen, aber keine Periodizität Wert mehr forderte. Er betrachtete dazu den "allgemeinere[n] Körper von Zahlgrößen"[37], mit den Eigenschaften:

> 1) Jede Zahlgröße $\mu$ des Körpers ist endlich, kann also nach fallenden Potenzen etwa von 10 entwickelt werden
> 2) $\mu$ kann nach <u>steigenden</u> Potenzen einer jeden ganzen Zahl, speziell jeder Primzahl entwickelt werden, in der Weise, daß $\mu \sim c_\varrho p^\varrho + c_{\rho+1}p^{\rho+1} + \ldots$, d.h. dass für $\mu$ modulo $p^M$
> $\mu \equiv c_\varrho p^\varrho + \cdots + c_{M-1}p^{M-1} \mod p^M$.[38]

Hensel bezeichnete diesen mit $\overline{K(1)}$, sagte, seine Elemente hätten "überall rationalen Charakter"[39] und behauptete, man könne zeigen, daß er mit $K(1)[= \mathbb{Q}]$ übereinstimmt.[40]

---

[33] VL 1 vom 28.4.1902, S. 2/2.
[34] VL 1 vom 28.4.1902, S. 2/2, Hervorhebung B.P.
[35] D.h. $\theta$ ist minimal mit $p^\theta - 1 = nn_1$ für ein $n_1 \in \mathbb{N}$.
[36] VL 1 vom 28.4.1902, S. 2/3. Die Koeffizienten stammen aus $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. Erst in VL 5 vom 15.5.1902, S. 9/3 sprach Hensel explizit an, daß periodische Entwicklungen umgekehrt auch rationalen Zahlen entsprechen.
[37] VL 2 vom 1.5.1902, S. 3/2.
[38] VL 2 vom 1.5.1902, S. 3/2.
[39] VL 2 vom 1.5.1902, S. 3/3.
[40] VL 2 vom 1.5.1902, S. 3/3. Unklar bleibt auch hier, wie Hensel seine Aussage zeigen wollte, vgl. auch FN 12 in 5.1.1 und den Abschnitt 5.6.3.

Die Bedingung 1) legt wiederum nahe, daß es auch unendliche Zahlgrößen gibt.[41] Es bleibt jedoch unklar, aus welchen Zahlgrößen Hensel diejenigen mit den obigen Eigenschaften aussondern wollte. Insbesondere ist die für die Äquivalenz benötigte Teilbarkeit durch $p^M$ für allgemeinere Zahlgrößen noch nicht erklärt.[42]
Eine Zahlgröße $\mu$ hat *für den Bereich von $p$ rationalen Charakter*, wenn sie eine Entwicklung nach Potenzen von $p$ mit Koeffizienten in $\{0, \ldots, p-1\}$ hat. Mit Hilfe dieser Entwicklung definierte Hensel Ganzheit für den Bereich von $p$, eine Ordnungszahl sowie Einheiten modulo $p$:

> Will nun sagen: $\mu$ ist für Bereich von $p$ ganz, wenn Entwicklung mit nicht negativen Potenzen von $p$ beginnt, sie ist gebrochen, wenn mit negativen Potenzen anfängt. Sie ist genau durch $p^\varrho$ teilbar, wenn Entwicklung mit $p^\varrho$ anfängt. Sie ist Einheit mod $p$, wenn Ordnung Null hat.[43]

Daß sich die Ordnungszahlen bei Multiplikation addieren, bei Division subtrahieren, drückte Hensel folgendermaßen aus:

> Also für Elemente des Körpers $\overline{K(1)}$ bestehen die Elementargesetze der Arithmetik.[44]

Hensel arbeitete wesentlich mit den Entwicklungen. Deren Operationen waren für ihn wohl so selbstverständlich, daß er sie nicht thematisierte. Die Objekte der Theorie sind jedoch Zahlgrößen, für die Entwicklungen eines bestimmten Typs vorausgesetzt werden.[45] Das Ziel ist, aus den bekannten Eigenschaften aller Entwicklungen Eigenschaften der Zahlgröße selbst zu folgern.
Die Betrachtung der Zahlgröße für den Bereich von $p$ bedeutet in etwa, daß mit der entsprechenden Entwicklung gearbeitet wird.

### Polynome, deren Koeffizienten im Bereich von $p$ rationalen Charakter haben

Ist eine über $\mathbb{Q}$ irreduzible Gleichung $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$ mit rationalen Koeffizienten gegeben, so hatte Hensel das Ziel zu zeigen:

> 1) Wurzeln der Gleichung haben Eigenschaft, dass alle endlich reell oder komplex, also nach fallenden Potenzen entwickelbar
> 2) In Umg. [Umgebung] von Stelle $p$ alle nach steigenden Potenzen von $p$, aber manchmal gebrochen.[46]

Um seine Herangehensweise zu motivieren, formulierte Hensel den Fundamentalsatz der Algebra in der Form, daß die Funktion $f(x)$ eindeutig in Faktoren ersten bzw. zweiten Grades mit reellen Koeffizienten zerlegbar ist. Diese Umformulierung gibt dann "sogar an, wie für den Bereich von $p$ verfahren muß."[47]
Um die Gleichung (statt der Größe nach) *für den Bereich von $p$* zu betrachten, entwickelte Hensel die Koeffizienten für den Bereich von $p$ und fragte anschließend, ob es eine Zerlegung gibt, "deren Coeffi. [Koeffizienten] *wohldefinierte $p$-Reihen* sind."[48]

---

[41] Vgl. 5.1.1 und [43, 1902, 31].
[42] Definiert hatte Hensel sie nur für rationale Zahlen, für algebraische Zahlen betrachtete er sie vermutlich ebenfalls als bekannt.
[43] VL 2 vom 2.5.1902, S. 3/3.
[44] VL 2 vom 1.5.1902, S. 3/3.
[45] Wie Zahlgröße und Entwicklung in den allgemeinsten Fällen zusammenhängen könnten, ist dabei noch nicht erklärt worden.
[46] VL 2 vom 1.5.1902, Randbemerkung auf S. 3/4. Dies bedeutet, daß die Reihe nach gebrochenen Potenzen von $p$ verläuft.
[47] VL 2 vom 1.5.1902, S. 4/1.
[48] VL 2 vom 1.5.1902, S. 4/2, Hervorhebung B.P. Hensel merkte ausdrücklich an, die Reihen zu einer solchen Zerlegung könnten nicht periodisch sein. Dies legt (wie auch die Analogie zur Größe) nahe, daß verschiedene Zahlgrößen für den Bereich von $p$ unterschiedliche Entwicklungen haben. Siehe auch FN 58 und 5.2.3. FN 109 für weitere Argumente, die diese Interpretation unterstützen.

Als erstes Beispiel betrachtete Hensel $x^2 + 1$ für den Bereich von 5. Es ist $x^2 + 1 \sim (x - \xi)(x + \xi) \quad (5)$, wobei $\xi$ eine wohldefinierte 5-Reihe ist. Hensel erläuterte:

> also zerfällt absolut irreductible Func[tion] $x^2 + 1$ im Bereich von 5 in zwei Linearfact[oren] oder beide Wurzeln sind für Bereich von 5 nach ganzen Potenzen von 5 entwickelbar mit wohldefinierten ganzzahligen Koeffizienten.[49]

Bereits an diesem sehr einfachen Beispiel läßt sich eine der Hauptinterpretationsfragen stellen: Die wohldefinierten $p$-Reihen $\pm\xi$ sind offenbar Wurzeln von $x^2 + 1 = 0$ für den Bereich von 5. Sie sind aber (nach Hensel) auch die Entwicklungen der komplexen Wurzeln $\pm i$. Die entscheidende Frage ist, ob es eine eindeutige Zuordnung zwischen den jeweiligen Wurzeln gibt. Für die allgemeinere Situation formuliert: Ist eine algebraische Wurzel genau einem der irreduziblen Faktoren für den Bereich von $p$ zugeordnet?
Um $f(x)g(x) \sim F(x)$ für den Bereich von $p$ definieren zu können, legte Hensel fest, was $f(x)g(x) \equiv F(x) \mod p^M$ bedeuten soll, nämlich, daß die Koeffizienten des ausmultiplizierten Produkts $f(x)g(x)$ den Koeffizienten von $F(x)$ modulo $p^M$ kongruent sind. Nach der Definition:

> Eine Funktion $f(x)$ heißt für Bereich von Primzahl $p$ irreductibel, wenn nicht in Factoren niedrigeren Grades zerlegbar, deren Coeff. wohldefinierte $p$-Reihen sind, im anderen Falle heisst sie irreductibel,[50]

behauptete Hensel, daß die Zerlegung in irreduzible Faktoren eindeutig ist. Er betonte dabei noch einmal die Analogie zur Zerlegung über $\mathbb{R}$:

> Jede Function $n^{\text{ten}}$ Grades kann im Bereich beliebiger Primzahl auf eine und nur eine Weise in irreductible Functionen zerlegt werden.
> Ist genau derselbe Satz, wie Zerlegung der Größe nach in Faktoren ersten und zweiten Grades, nur kann hier Grad eben auch höher sein.[51]

Zum Beweis führte Hensel zunächst den allgemeinen Fall auf den zurück, in dem alle Koeffizienten der Ausgangsgleichung für den Bereich von $p$ ganz sind und formulierte als Ziel, er wolle “zeigen, dass so zu eindeutiger Zerlegung komme, indem Verfahren angebe, wie aus Zerlegung modulo $p^M$ eine modulo $p^{M+1}$ herleite.”[52] Der Beweis verläuft quasi identisch mit dem in der späteren Veröffentlichung, so daß hier nicht genauer auf ihn eingegangen wird.[53]

Hensel hatte zunächst die Koeffizienten der irreduziblen Gleichung in $p$-Reihen entwickelt und als Koeffizienten der Faktoren für den Bereich von $p$ wohldefinierte $p$-Reihen zugelassen. Damit war er von der Ebene der Zahlgrößen auf die ihrer bzw. der Entwicklungen gewechselt. Zu Beginn der nächsten Vorlesung benutzte Hensel die Formulierung aus der Abschnittsüberschrift, daß nämlich die Koeffizienten der irreduziblen Faktoren “im Bereich von $p$ rationalen Charakter” haben.[54] Dies deutet darauf hin, daß Hensel den wohldefinierten $p$-Reihen, die Koeffizienten der irreduziblen Faktoren sind, auch Zahlgrößen

[49] VL 2 vom 1.5.1902, S. 4/2.
[50] VL 2 vom 1.5.1902, S. 4/3.
[51] VL 2 vom 1.5.1902, S. 4/3.
[52] VL 2 vom 1.5.1902, S. 4/4.
[53] Allerdings beschränkte Hensel sich in der Vorlesung darauf, die Diskriminante und die Resultante von Gleichungen mit gewöhnlichen rationalen Koeffizienten zu benutzen. Vgl. vor allem VL 4 vom 12.5.1902, [47, 1904, 73ff] und 4.4.3. Der Beweis zieht sich über mehrere Vorlesungen: Zunächst wird die Zerlegung modulo $p$ eingeführt, dann der Fall behandelt, in dem die Zerlegung modulo $p$ keine mehrfachen Faktoren enthält. Für den technischen Satz, der im allgemeinen Fall die Darstellbarkeit einer Funktion $p^r F(x)$ sichert, vgl. 5.4.3. (Dabei ist $\delta \leq r$ die Ordnungszahl der Resultante von $f(x)$ und $g(x)$ und gesucht wird $ff_1 + gg_1 = p^r F$.)
[54] VL 3 vom 5.5.1902, S. 5/1.

zuordnen wollte, um von der Ebene der Entwicklungen zurück auf die Ebene der Zahlgrößen zu gelangen. Noch expliziter ist diese Verschiebung in der übernächsten Vorlesung, denn in ihr sind die Koeffizienten "wohldefinierte Zahlgrößen..., welche für den Bereich von $p$ rationalen Charakter haben."[55]

Die von Hensel eingeführten Entwicklungen konnten rationalen Zahlen zugeordnet werden und bisher darüberhinaus anderen Zahlgrößen zugeordnet sein. Bei der Zerlegung einer irreduziblen Gleichung mit rationalen Koeffizienten für den Bereich von $p$ traten jedoch Reihen ohne apriori geklärten Rückbezug auf.

Hinter Hensels Umgang mit dieser Situation könnten zwei Überzeugungen stehen: Einmal die, es gebe sowieso zu jeder wohldefinierten $p$-Reihe eine Zahlgröße, deren Entwicklung sie ist.[56] Zum anderen könnte er in der konkreten Situation die Zahlgrößenkoeffizienten der Zerlegung auch als symmetrische Funktionen von Gruppen der (algebraischen) Wurzeln der Gleichung betrachtet haben.[57]

### 5.2.2 Konstruktionen zu einem Zahlkörper $K(\alpha)$

#### Erweiterung der Koeffizienten - ein erstes $K(p, \alpha)$

Nachdem Hensel den Begriff der *für den Bereich von p irreduziblen Gleichung* gemäß den konstruktiven Anforderungen eingeführt hatte, formulierte er als nächstes Ziel die "genauere Untersuchung der Zahlen des Körpers $K(\alpha)$ für den Bereich einer beliebigen Primzahl $p$."[58] Dabei ist $\alpha$ eine Wurzel der auch für den Bereich von $p$ irreduziblen Gleichung $F(x) = 0$ mit ganzen Koeffizienten und $K(\alpha)[= \mathbb{Q}(\alpha)]$ ein Zahlkörper.

Um eine Zahl $x \in K(\alpha)$ für den Bereich von $p$ zu untersuchen, entwickelte Hensel ihre (rationalen) Koeffizienten in $p$-Reihen. Zusätzlich betrachtete er aber auch rationale Funktionen von $\alpha$, deren Koeffizienten nur rationalen Charakter haben:

> Zu diesem Zwecke betrachte den Körper $K(p, \alpha)$ aller derjenigen Zahlgrößen, welche rationale Funktionen von $\alpha$ mit Koeffizienten sind, welche im Bereich von $p$ rationalen Charakter haben. Unter diesen Zahlgrößen sind auch alle Zahlen des Körpers $K(\alpha)$ enthalten, sind nämlich alle und nur die, deren Koeffizienten im Bereich von $p$ periodisch sind.[59]

Für $x = f(\alpha) \in K(p, \alpha)$ ist also lediglich bekannt, daß die Koeffizienten der rationalen Funktion wohldefinierten $p$-Reihen äquivalent sind. Aus diesen Entwicklungen läßt sich durch Zusammenfassung der Koeffizienten der gleichen Potenzen eine Entwicklung von $x$ für den Bereich von $p$ ablesen.[60]

#### Eine formale Theorie der Äquivalenz $\sim$ (statt "=")

Hensel hatte den Begriff *algebraischer Körper* eingeführt und einige grundlegende Aussagen formuliert. Es läßt sich am Manuskript ablesen, daß Hensel diese ohne den Begriff der ganzen algebraischen Zahl

[55] VL 4 vom 12.5.1902, S. 7/1.
[56] Diese Meinung formulierte Hensel (fast explizit) 1905 in seinem Meraner Vortrag, vgl. [52, 1905, 549] und 5.6.1.
[57] Hierbei würde benutzt, daß für die algebraischen Wurzeln schon Entwicklungen bekannt sind, aus denen man die nichtrationalen Teile durch Symmetrisierung entfernen kann. Auch diese Sichtweise ist naheliegend, da Hensel in [40, 1902] die einzelnen Faktoren aus den Entwicklungen aufgebaut hatte.
[58] VL 5 vom 15.5.1902, S. 9/2.
[59] VL 5 vom 15.5.1902, S. 9/3. Vgl. FN 47 oben. Auch dies spricht dafür, daß Hensel davon ausging, daß verschiedene Zahlgrößen verschiedene Entwicklungen haben.
[60] Betrachtet man diese Entwicklung von $x$ für den Bereich von $p$, so stellt sich wiederum die Frage, ob jede mögliche Entwicklung wirklich auftritt. Hensel würde das vermutlich bejahen, vgl. FN 55.

formulierten Aussagen auch ohne ihn auf die Äquivalenz für den Bereich von $p$ übertragen wollte. Dazu benutzte er die folgende Definition:

> Eine Aequivalenz $\Phi(\alpha) \sim 0\,|p$ wenn $\Phi(\alpha)$ ganze Funct. von $\alpha$ soll heißen, dass auf linker Seite alle Coeffi[cienten] $\sim$ Null bei Reduction.[61]

Damit plante Hensel eine Theorie aufzubauen, deren Elemente Funktionen von $x$ modulo $F(x)$ bezüglich $\sim$ sind. Es ist $\Phi(\alpha) \sim 0$ genau dann, wenn $\Phi(x) \sim F(x)G(x)$.[62] Analog zur Körpertheorie formulierte Hensel:

> 1) Eine Äquivalenz $\Phi(\alpha_i) \sim 0|p$ bleibt bestehen, wenn $\alpha_i$ durch ein konjugiertes $\alpha_j$ ersetzt wird.
>
> 2) Zu $\eta_i \in K(p, \alpha_i)$ gibt es $n$ Konjugierte $\eta_1, \ldots, \eta_n$, die man erhält, indem man $\alpha_i$ durch alle $\alpha_j$ ersetzt. "Jede symmetrische Funktion der $\eta_i$ ist rationale Größe des Bereichs $K(p)$."[63]
>
> 3) "Jedes Element $\eta$ von $K(p,\alpha)$ ist auf eine und nur eine Weise in der Form $u_0+u_1\alpha+\cdots+u_{n-1}\alpha^{n-1}$ darstellbar, wenn $u_0\ u_1 \ldots u_n$ Zahlgrößen des Bereiches $K(p)$ sind."[64]
>
> 4) "Jedes Element $\eta$ von $K(p,\alpha)$ genügt mit seinen $n$ conjugierten $\eta_1\ \eta_2 \ldots \eta_n$ einer Aequivalenz $n^{\text{ten}}$ Grades $\quad G(y) \sim (y-\eta_1)\ldots(y-\eta_n) = y^n - b_1 y^{n-1} + \cdots \pm b_n \quad$ deren Coefficienten rationalen Charakter."[65]

Ist die Äquivalenz $G(y)$ irreduzibel für den Bereich von $p$, nennt man $\eta$ ein primitives Element der Erweiterung $K(p,\alpha)$. Andernfalls bestimmt es einen Unterkörper $K(p,\eta)$ des Grades $e$, wenn $G(\eta) \sim g(\eta)^f$ und $ef = n$.

> 5) Weiter bilden $n$ Elemente $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)}$ genau dann eine Basis von $K(p,\alpha)$, wenn ihre Diskriminante $D(\eta^{(i)}) = |\eta_k^{(i)}|^2$ nicht äquivalent Null ist.

Mit Hilfe der so erhaltenen Gleichung $G(y)$ definierte Hensel anschließend, wann eine Zahlgröße $\eta \in K(p,\alpha)$ "für den Bereich von $p$ den *Charakter einer ganzen Zahl* hat,"[66] nämlich, wenn die Koeffizienten $b_i$ von $G(y)$ alle "den ganzen Charakter"[67] haben.

Hensel hatte zuvor angemerkt, daß er im weiteren in $K(p,\alpha)$ arbeiten wolle:

> Sehe so, wenn $\eta^{(1)} \ldots \eta^{(n)}$ eine Basis für $K(p,\alpha)$ so durch sie auch alle Elemente von $K(\alpha)$ darstellbar mit Coeffi. die rationalen Charakter haben, da $K(\alpha)$ in $K(p,\alpha)$ enthalten. Aber $K(p,\alpha)$ sehr viel einfacher zu behandeln und beherrsche mit ihm auch Körper $K(\alpha)$.[68]

Als Ziel nannte er, "die Zahlgröße $\eta$ für Bereich $p$", also ein Element von $K(p,\alpha)$ "in Bezug auf die Theilbarkeit durch die Primzahl $p$" zu untersuchen.[69]

---

[61] VL 5 vom 15.5.1902, S. 9/3.
[62] VL 5 vom 15.5.1902, S. 9/3.
[63] VL 5 vom 15.5.1902, S. 9/3. Die Schreibweise $K(p)$ tritt hier erstmalig auf und bezeichnet den Bereich der Zahlgrößen, die in Bezug auf $p$ rationalen Charakter haben.
[64] VL 5 vom 15.5.1902, S. 9/4.
[65] VL 5 vom 15.5.1902, S. 9/4.
[66] VL 5 vom 15.5.1902, S. 10/1.
[67] VL 5 vom 15.5.1902, S. 10/2.
[68] VL 5 vom 15.5.1902, S. 10/1.
[69] Beide VL 5 vom 15.5.1902, S. 10/2.

Hensels erste Idee im Fall einer für den Bereich von $p$ irreduziblen Gleichung war es also, zu einem Körper $K(p, \alpha)$ überzugehen, indem er die Äquivalenzbeziehung in $K(p)$ analog zur Gleichheit in $K(1)$ behandelte, also die (Kroneckersche) formale Körpertheorie benutzte. Zusätzlich verwendete er die gewöhnlichen algebraischen Konjugierten von $\alpha$, um zu einer von $x$ erfüllten Äquivalenz zu gelangen, anhand von deren Koeffizienten er dann (wiederum analog) Ganzheit für den Bereich von $p$ definieren wollte.
Er beschloß jedoch anschließend, den Aufbau umzukehren. In der im folgenden vorgestellten Theorie ist *ganz für den Bereich von p* ein unabhängiger Begriff, mit dessen Hilfe Kongruenzen und Äquivalenzen definiert werden.

### Lokale Ganzheit

Auf dem Rand der Seiten 9/2 und 9/3 fügte er (leider sehr schlecht lesbar) die benötigten Definitionen von *ganz für den Bereich von p* ein. Weiter notierte er die Definitionen von Kongruenzen modulo $p^M$, die sich daraus ergeben:

> Jetzt zuerst No. 5. II [Dann:][70]
> Sage $\eta$ ist für Bereich zu $p$ algebraisch ganz, wenn Coeff. alle mod $p$ ganz
> auch hier Summe Diffe. Prod. Quot.
> auch hier bei algebraischen Coeffizienten[71]
> Eine Congruenz $\Phi(\alpha) \equiv 0 | p^i$ heißt $\Phi(\alpha) = p^i \gamma$, wo $\gamma$ algebraisch ganz für den Bereich zu $p$, d.h. Glg. deren Nenner prim zu $p$. Allgemein $\Phi \equiv \Psi | p^i$.[72]

Wie Hensel ebenfalls in der fünften Vorlesung einführte, ist eine algebraische Zahl $\eta$ durch eine gebrochene Potenz von $p$ teilbar, wenn $\xi = \frac{\eta}{p^\delta}$ algebraisch ganz ist.[73] Dies läßt sich anhand der normierten Gleichung mit rationalen Koeffizienten für $\eta$ überprüfen, denn sei diese $\eta^n + b_1 \eta^{n-1} + \cdots + b_n = 0$, so erhält man durch Einsetzen von $p^\delta \xi$ für $\eta$ eine Gleichung $\xi^n p^{n\delta} + b_1 \xi^{n-1} p^{(n-1)\delta} + \cdots + b_n = 0$ und daher für $\xi$ die normierte Gleichung

$$\xi^n + \frac{b_1}{p^\delta} \xi^{n-1} + \frac{b_2}{p^{2\delta}} \xi^{n-2} + \cdots + \frac{b_n}{p^{n\delta}} = 0.$$

Sind für die $b_i$ Darstellungen $b_i = p^{\beta_i} e_i$ gegeben, worin die $e_i$ Einheiten für den Bereich von $p$ sind, dann ist $\delta = \min\{\beta_1, \frac{\beta_2}{2}, \frac{\beta_3}{3}, \ldots, \frac{\beta_n}{n}\}$ der maximale Exponent, für den $\eta$ durch $p^\delta$ teilbar ist.[74]
In der sechsten Vorlesung kam Hensel zur "Untersuchung der algebraischen Zahlen von $K(\alpha)$ für den Bereich von $p$" zurück.[75] Dazu formulierte er ausführlich die zuvor nur auf den Rand gezwängte Definition der lokalen Ganzheit:

> Sage $\gamma$ ist für Bereich von $p$ algebraisch ganz, wenn irgendeiner Gleichung $m$-ten Grades mit für $p$ ganzen rationalen Zahlcoeffi. genügt: $G(x) = x^m + g_1 x^{m-1} + \cdots + g_m = 0$ wo nur Nenner der $g_i$ nicht $p$ enthält.[76]

Er wies darauf hin, daß dann auch Summen, Differenzen und Produkte für den Bereich von $p$ ganzer Zahlen algebraisch ganz für diesen Bereich sind. Es reicht auch aus, wenn die $g_i$ *algebraisch* ganze Zahlen

[70]Dies bezieht sich auf die Ausführungen zu "algebraisch ganz", VL 5 vom 15.5.1902, S. 10/4.
[71]VL 5 vom 15.5.1902, Rand von 9/2.
[72]VL 5 vom 15.5.1902, Rand von 9/3.
[73]Hier sind zwei Punkte nicht ganz geklärt: Dürfte auch $\eta \in K(p, \alpha)$ sein? (Wahrscheinlich nicht.) Schwächt sich die Bedingung in 'algebraisch ganz für den Bereich von $p$' ab, nachdem die lokale Ganzheit erklärt wurde? (Wahrscheinlich ja.)
[74]Diese Teilbarkeit durch gebrochene Potenzen hatte Hensel in der Theorie der algebraischen Funktionen schon in [20, 1895] systematisch eingeführt (und schon in [9, 1891] am Rande benutzt), ihr zahlentheoretisches Pendant aber noch nicht verwendet.
[75]VL 6 vom 26.5.1902, S. 11/1.
[76]VL 6 vom 26.5.1902, S. 11/1.

für den Bereich von $p$ sind.[77]

Damit kann auch der Kongruenzbegriff auf gebrochene Potenzen erweitert werden. Sei $\varrho \in \mathbb{Q}$: "$\gamma \equiv 0 \pmod{p^\varrho}$ heisst $\gamma = p^\varrho \beta$ wo $\beta$ für den Bereich von $p$ algebraisch ganz ist."[78]

**Eine neue Möglichkeit zur Konstruktion von $K(p, \alpha)$**

An dieser Stelle hatte Hensel zunächst geplant, den Körper $K(\alpha)$ ebenso zu erweitern, wie zuvor $K(1)$ zu $K(p)$:

> In derselben Weise will auch hier Körper $K(\alpha)$ erweitern, indem sage eine Zahlgröße $\xi$ ist für den Bereich von $p$ wohldefiniert, wenn auf irgend eine Weise weiss, dass
>
> $$\xi \equiv \xi_0 | p,\ \xi \equiv \xi_0 + \xi_1 p \,|\, p^2,\ \xi \equiv \xi_0 + \xi_1 p + \xi_2 p^2 \,|\, p^3$$
>
> wo $\xi_0\, \xi_1\, \ldots$ bestimmte mod $p$ ganze algebraische Zahlen von $K(\alpha)$ sind, so daß also für jede noch so hohe Potenz $p^\varrho$ immer eine bestimmte algebraische Zahl angeben kann, der sie congruent ist.[79]

Weiter wollte er zeigen, daß jede Zahlgröße $u_0 + u_1\alpha + \cdots + u_{n-1}\alpha^{n-1}$ zu $K(p, \alpha)$ gehört, wenn die $u_i$ zu $K(p)$ gehören, daß also die beiden Definitionen von $K(p, \alpha)$ äquivalent sind.[80]

Er entschloß sich jedoch, die Erweiterung an dieser Stelle nicht zu machen.

Stattdessen definierte er, $\Phi(\alpha) \sim 0$ solle bedeuten, daß für jede noch so hohe Potenz $p^k$ von p als Modul $\Phi(\alpha) = p^k \cdot \gamma$ ist, wobei $\gamma$ für den Bereich von $p$ algebraisch ganz ist. Anschließend zeigte er, daß diese Definition zu seiner ursprünglichen Definition paßt:

> Ist $\alpha$ eine Wurzel von $F(x)$, $F(x)$ irreduzibel für den Bereich von $p$ und $\Phi(\alpha) \sim 0$, so folgt $\Phi(x) \sim F(x)G(x)$.[81]

Mit Hilfe dieses Satzes trug er dann die oben bereits angeführten Aussagen nach, hier allerdings beschränkt auf Elemente von $K(\alpha)$:

> Eine Aequivalenz $\Phi(\alpha_1) \sim 0$ bleibt also bestehen, wenn $\alpha_1$ durch conjugirte ersetze.[82]
> Jedes Element $\eta$ von $K(\alpha)$ genügt nebst conj. einer Glchg [Gleichung] $n^{\text{ten}}$ Grades, deren linke Seite für Bereich von $p$ entweder selbst irred. oder Potenz irreductibler Function.[83]

### 5.2.3 Bestimmung geeigneter Bestandteile für äquivalente Potenzreihen

**Teilbarkeit und Norm**

Sei weiter $\alpha$ Wurzel der auch für den Bereich von $p$ irreduziblen Gleichung $f(x) = 0$ mit rationalen Koeffizienten. Hensel untersuchte, durch welche Potenzen von $p$ die Elemente von $K(\alpha)$ genau teilbar

---

[77] Er wiederholte auch die Bestimmung der genauen Potenz von $p$, durch die $\gamma$ teilbar ist. Sei dazu wieder $g_i = p^{c_i} e_i$, wobei $e_i$ eine (ggf. algebraische) Einheit für den Bereich von $p$ ist. Dann ist die algebraische Zahl $\gamma$ durch $p^\varrho$ teilbar ist, wenn "$\varrho \le (c_1, \frac{c_2}{2}, \frac{c_3}{3}, \ldots \frac{c_m}{m})$" ist,VL 6 vom 26.5.1902, S. 11/1.

[78] VL 6 vom 26.5.1902, S. 11/2.

[79] VL 6 vom 26.5.1902, S. 11/3, durchgestrichen.

[80] Um umgekehrt zu zeigen, daß jedes Element von $K(p, \alpha)$ nach der neuen Definition in die alte Form gebracht werden kann, muß man ggf. die Exponenten von $\alpha$ reduzieren. Dazu sollte der Satz dienen, den Hensel trotzdem im Anschluß bewies, VL 6 vom 26.5.1902, S.11/3 und 11/4.

[81] VL 6 vom 26.5.1902, S.11/4, vgl. oben Text bei FN 60.

[82] VL 6 vom 26.5.1902, S. 12/1.

[83] VL 6 vom 26.5.1902, S. 12/1.

sind und nannte eine algebraische Zahl $\varepsilon \in K(\alpha)$ *Einheit mod* $p$, wenn sie für den Bereich von $p$ ganz und genau durch $p^0$ teilbar ist.[84] Er zeigte dann:

> $\varepsilon[\in K(\alpha)]$ ist dann und nur dann algebraische Einheit, wenn $N(\varepsilon) = e_n$ eine rationale Einheit ist.[85]

Zum (indirekten) Beweis nahm er an, daß in der Gleichung für die Einheit $\varepsilon$ mit für $p$ ganzen Koeffizienten $G(y) = y^n - e_1y^{n-1} + e_2y^{n-2} - \cdots \pm e_n = 0$ der Koeffizient $e_n$ durch $p$ teilbar ist. Sei dann $i$ maximal mit $p \not| e_i$. Dann ließe sich die teilerfremde Zerlegung $G(y) \equiv y^{n-i}(y^i - e_1y^{i-1} + \cdots \pm e_i) \equiv \psi(y)\varphi(y)$ mod $p$ zu einer Äquivalenz $G(y) \sim \Phi(y)\Psi(y)$ verfeinern, in der $\Phi$ und $\Psi$ mod $p$ teilerfremd sind. Dies steht aber im Widerspruch dazu, daß $G(y)$ entweder irreduzibel oder Potenz einer irreduziblen Funktion ist.[86]
Aus diesem Satz schlußfolgerte Hensel:

> Eine algebraische Zahl $\eta$ von $K(\alpha)$ ist dann und nur dann genau durch $p^\delta$ teilbar, wenn $N(\eta)$ genau durch $p^{n\delta}$ teilbar ist.[87]
> Jede Zahl $\eta$ ist stets durch gebrochene Potenz $p^{\frac{\mu}{\nu}}$ genau teilbar, deren Nenner in reduzierter Form ein Teiler von $n$ ist.[88]

Hensel ging anschließend zur Untersuchung der in Bezug auf $p$ ganzen Zahlen von $K(\alpha)$ über. Dazu nahm er $\alpha$ als ganz für den Bereich von $p$ an und setzte eine Basis aus für den Bereich von $p$ ganzen Elementen voraus.

### Fundamentalsystem und Primelement für den Bereich von $p$

Hensel nannte $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$, ein "Fundamentalsystem für die für $p$ ganzen Zahlen von $K(\alpha)$",[89] wenn "alle und nur die für $p$ ganzen Zahlen auf eine einzige Art in Form $c_0\eta_0 + c_1\eta_1 + \cdots + c_{n-1}\eta_{n-1}$ darstellbar"[90] sind mit für den Bereich von $p$ ganzen rationalen $c_i$.
Er gab einen an [Kronecker, 1881] orientierten Algorithmus an, um ein solches System zu konstruieren, und stellte fest, daß ein zweites System $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$ mod $p$ ganzer Elemente genau dann ebenfalls ein Fundamentalsystem für die für $p$ ganzen Zahlen ist, wenn die Diskriminanten $D(\xi_i) = |\xi_i^{(j)}|^2$ und $D(\eta_i) = |\eta_i^{(j)}|^2$ in ihrem $p$-Anteil übereinstimmen.[91]
Hensel benutzte das Fundamentalsystem für die für den Bereich von $p$ ganzen Zahlen, um ein vollständiges Restsystem modulo $p$ aufzustellen. Dazu kann man in $\xi = u_0\eta_0 + u_1\eta_1 + \cdots + u_{n-1}\eta_{n-1}$ für die $u_i$ jeweils die Zahlen $0, 1, \ldots, p-1$ einsetzen, denn es gilt der Satz:

> 2) Zwei Zahlen $\xi$ und $\xi'$ sind dann und nur dann modulo $p$ kongruent, wenn ihre Koordinaten modulo $p$ kongruent.
> 1)Eine Zahl $\xi = \sum u_i\eta_i^{(i)} \equiv 0|p$ wenn alle $u_i \equiv [0]$, [92]

[84] VL 6 vom 26.5.1902, S. 12/3. Etwas allgemeiner nannte er $\varepsilon$ auch *algebraische Einheit mod* $p$, wenn in einer beliebigen Gleichung für $\varepsilon$ alle Koeffizienten mod $p$ algebraisch ganz sind und mindestens einer eine Einheit mod $p$ ist, VL 7 vom 29.5.1902, S. 13/1, Rand.
[85] VL 7 vom 29.5.1902, S. 13/2, jeweils mod $p$. In VL 6 vom 26.5.1902, S. 12/3 schrieb Hensel $N(\epsilon) = e_n \sim 1$. Er benutzte auch im Folgenden gelegentlich (zusätzlich) diesen abweichenden Äquivalenzbegriff, der sich auf die Ordnungszahl bezieht.
[86] Sind hingegen alle Koeffizienten von $G(y)$ durch $p$ teilbar, so ist $\varepsilon$ offenbar nicht genau durch $p^0$ teilbar.
[87] VL 7 vom 29.5.1902, S. 13/3. Für ganzzahliges $\delta$ folgt dies unmittelbar aus der Betrachtung der Einheit $\varepsilon = \frac{\eta}{p^\delta}$. Ist $\delta = \frac{r}{s}$ gebrochen, so ist $\varepsilon = \frac{\eta}{p^{\frac{r}{s}}}$ eine algebraische Einheit eines anderen Körpers. Dann ist $\eta^s$ ebenfalls eine Einheit und genau durch $p^r$ teilbar, also $N(\eta)^s$ genau durch $p^{nr}$. Damit ist aber $N(\eta)$ genau durch $p^{n\delta}$ teilbar.
[88] VL 6 vom 26.5.1902, S. 12/4, diese zweite Aussage folgt einfach daraus, daß $N(\eta) = b_n$ eine ganzzahlige Potenz von $p$ enthält.
[89] VL 7 vom 29.6.1902, S. 14/3.
[90] VL 7 vom 29.6.1902, S. 14/3.
[91] Dabei bezeichnen die $\eta_i^{(j)}$ wieder die Konjugierten zu $\eta_i$ etc.
[92] VL 7 vom 29.5.1902, S. 15/2, Reihenfolge so bei Hensel.

Unter diesen $p^n$ Elementen wählte Hensel eines, das durch die minimale Potenz von $p$ teilbar ist und wies nach, daß dieses dann einen Exponenten $\frac{1}{e}$ mit $e|n$ hat.[93] Wäre nämlich der minimale Exponent von $\pi$ noch $\frac{d}{e}$, also $\pi = p^{\frac{d}{e}}\varepsilon$ mit teilerfremden $d$ und $e$, so gäbe es (nach dem Euklidischen Algorithmus) ganze Zahlen $e_1$ und $d_1$ mit $dd_1 = 1 - ee_1$, also wäre

$$\pi^{d_1} = p^{\frac{dd_1}{e}}\varepsilon^{d_1} = p^{\frac{1-ee_1}{e}}\varepsilon^{d_1} = p^{\frac{1}{e}}\varepsilon^{d_1}p^{-e_1} \quad \text{und} \quad w := p^{e_1}\pi^{d_1} = p^{\frac{1}{e}}\varepsilon^{d_1} = p^{\frac{1}{e}}\overline{\varepsilon}$$

wäre durch eine kleinere Potenz von $p$ teilbar. Weiter ist dann jedes Element von $K(\alpha)$ durch eine ganzzahlige Potenz von $\pi$ genau teilbar:

> Jede Zahl von $K(\alpha)$ ist für Bereich von $p$ genau durch $\pi^r$ teilbar, wo $r$ ganzzahliger Exponent. Denn wenn $\gamma = p^\delta\varepsilon$ wo $\delta = \frac{r}{e} + \delta_1$ und $\delta_1 < \frac{1}{e}$ so ist $\frac{\gamma}{\pi^r}$ eine Zahl des Körpers dieses $\theta$ genau durch $p^{\delta - \frac{r}{e}} = p^{\delta_1}$ teilbar und $\delta_1 < \frac{1}{e}$.[94]

Diese beiden technischen Argumente für die Eigenschaften des Elements mit minimalem $p$-Anteil der Norm finden sich bereits bei [Selling, 1865], so daß es eher wahrscheinlich ist, daß Hensel von der Lektüre dieser Arbeit (trotz seiner abfälligen Bemerkungen im Brief an Hilbert vom 19.10.1897) doch noch profitierte.[95] Für diese Behauptung spricht, daß Hensel in seinem Brief an Weber vom 23.11.1897 als idealtheoriefreie Methode offenbar nicht die hier dargestellte Herleitung beschrieb, da in ersterer Newtonsche Parallelogramme vorkamen.[96]

In der nächsten Vorlesung präzisierte Hensel die Formulierung der obigen Aussage noch:

> Sei also $\pi \sim p^{\frac{1}{e}}$ ein solches Element niedrigster Ordnung. Dann gilt der Satz: Jede Zahl des Körpers $K(\alpha)$ $\eta$ (ganz oder gebrochen) ist durch ganzzahlige Potenz $\pi^r$ von $\pi$ für Bereich von $p$ genau teilbar in der Weise, dass $\frac{\eta}{\pi^r}$ für Bereich von $p$ eine Einheit von $K(\alpha)$.[97]

Die so definierte Zahl $r$ nannte er die Ordnungszahl von $\eta$. Sie ist für für den Bereich von $p$ gebrochene Zahlen negativ, für Einheiten modulo $p$ Null und für die übrigen positiv.

Er merkte an, daß das Produkt zweier Einheiten mod $p$ wieder eine solche ist, die Ordnungszahlen sich bei Multiplikation also addieren, und begann mit einer näheren Untersuchung der Einheiten.

### Ein Restsystem modulo $\pi$

Um die Elemente aus $K(\alpha)$ auch modulo $\pi$ zu untersuchen, paßte Hensel zunächst den Begriff der Kongruenz und damit den der Äquivalenz an:

> Eine Zahl des Körpers $\eta \equiv 0 \;/\; \pi^r$ wenn $\eta = \pi^r g$ und $g$ ganz, wenn also $\eta$ von positiver Ordnung $\geq r$. Zwei Zahlen $\eta$ und $\eta'$ $\eta \equiv \eta'$ wenn $\eta - \eta'$ durch $\pi^r$ teilbar.[98]

Bereits zuvor hatte Hensel in einer Randbemerkung einen Primdivisor $\wp$ von $p$ eingeführt, strich diesen aber wieder.[99] Jetzt merkte er in einer nicht genau zu entziffernden Randbemerkung an, daß $\eta\xi \equiv 0$ mod $\pi$ nur dann möglich ist, wenn $\eta$ oder $\xi$ durch $\pi$ teilbar sind.[100]

---

[93] VL 7 vom 29.5.1902, S. 15/2.
[94] VL 7 vom 29.5.1902, S. 15/3, $\theta$ ist der Name, den Hensel implizit für $\frac{\gamma}{\pi^r}$ vergab.
[95] Vgl. die Zitate aus diesem Brief in 4.2.1 sowie die Darstellung von Sellings Theorie in 4.2.2.
[96] Vgl. den Abschnitt zu diesem Brief in 4.2.1.
[97] VL 8 vom 1.6.1902, S. 16/1. Das Zeichen $\sim$ bedeutet hierbei, daß beide Seiten durch die gleiche (gebrochene) Potenz von $p$ genau teilbar sind.
[98] VL 8 vom 1.6.1902, S. 16/3.
[99] VL 8 vom 1.6.1902, S. 16/2.
[100] VL 8 vom 1.6.1902, S. 16/3. Dies ist die übliche Formulierung dafür, daß $p$ prim ist.

Anschließend wählte Hensel aus dem vollständigen Restsystem modulo $p$ ein solches modulo $\pi$ aus. Dazu nahm er jeweils ein $k+1$-tes Element des Fundamentalsystems hinzu, falls unter den $p^n$ Elementen des vollständigen Restsystems modulo $p$ einige zu keinem der $p^k$ Elemente modulo $\pi$ kongruent sind, die sich aus den bisherigen $k$ Elementen mit Koeffizienten $0, 1 \ldots, p-1$ als Linearkombination ergeben ($k = 0, \ldots, f-1$). Damit erhielt er ein Fundamentalsystem modulo $\pi$ mit den Elementen $\xi_1, \ldots, \xi_f$, genau $p^f - 1$ inkongruente Einheiten modulo $\pi$ und ein vollständiges Restsystem modulo $\pi$ mit $p^f$ Elementen.[101]

### Die Potenzreihen, die algebraischen Zahlen äquivalent sind

Hensel meinte, die "gleich richtige Folgerung" sei:[102]

> Jede Zahl $\xi$ des Körpers $K(\alpha)$ ist für Bereich $p$ äquivalent $\xi \sim \varepsilon^{(r)}\pi^r + \varepsilon^{(r+1)}\pi^{r+1} + \ldots$, wenn $\varepsilon^{(r)}, \varepsilon^{(r+1)}$ wohldefinierte Zahlen der Reihe $u_1\xi^{(1)} + \cdots + u_f\xi^{(f)}$ sind, von denen die erste $>< 0$ ist.[103]

Er erläuterte, dann gelte

> $\xi \equiv \varepsilon^{(n)}\pi^n \ / \pi^{n+1}$, $\qquad \xi \equiv \varepsilon^{(n)}\pi^n + \varepsilon^{(n+1)}\pi^{n+1} \ / \pi^{n+2}$ etc. So und nur so soll eine solche Äquivalenz verstanden werden.[104]

Insbesondere ist jede ganze Zahl $\xi$ modulo $\pi^e$ in der Form $\xi \equiv \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}\pi + \varepsilon^{(2)}\pi^2 + \cdots + \varepsilon^{(e-1)}\pi^{e-1}$ darstellbar. Dann gilt diese Darstellung auch modulo $p$, d.h. es ist $\xi^{(1)} \ldots \xi^{(f)}; \pi\xi^{(1)} \ldots \pi\xi^{(f)}; \ldots;$ $\pi^{e-1}\xi^{(1)} \ldots \pi^{e-1}\xi^{(f)}$ ein Fundamentalsystem modulo $p$, also ist $n = ef$.[105]

Daraus leitete Hensel eine untere Schranke für den $p$-Anteil der Diskriminante her, indem er, wie ihm seit [5, 1889] geläufig, gebrochene Potenzen von $p$ aus den Spalten der Matrix zog. In:

$$D(\xi^{(i)}) = \left|\xi_i^{(1)} \ldots \xi_i^{(f)}; \pi_i\xi_i^{(1)} \ldots \pi_i\xi_i^{(f)}, \pi_i^2\xi_i^{(1)} \ldots\right|^2 \quad \text{(wobei } i \text{ die Konjugierten bezeichnet)}$$

sind die $f+1$-te bis $2f$-te Spalte durch $p^{\frac{1}{e}}$ teilbar, denn

> $\pi_i = p^{\frac{1}{e}}\overline{\varepsilon_i}$ wo $\overline{\varepsilon_i}$ ganze algebraische Zahl allerdings zu höherem Körper etc. Also ist $D(\xi^{(i)})$ mindestens durch $p^{2\frac{f}{e}(1+2+\ldots e-1)} = p^{\frac{f}{e}e(e-1)} = p^{n-f}$ teilbar.[106]

Den Vorteil der Entwicklung nach Potenzen eines festen $\pi$ (und nicht nach beliebigen Elementen $r$-ter, $r+1$-ter usw. Ordnung) sah Hensel darin, daß man durch Konjugation ($\alpha \mapsto \alpha_i$) sofort die Entwicklungen der Konjugierten erhält:

> Ist $\eta_1 \ldots \eta_n$ irgend eine Zahl von $K(\alpha)$ nebst Conjugirte, so sind diese auf eine und nur eine Art im Sinne der Aequivalenz durch die wohldefiniert conjugir[ten] Potenzreihen $\sum \varepsilon_i^{(k)}\pi_i^k$ darstellbar.[107]

D.h. jedem $\eta_i$ ist genau eine Potenzreihe $\overline{\eta_i}$ äquivalent, insbesondere sind (wie Hensel in einer Randbemerkung ausführte) die $\overline{\eta_i}$ zu verschiedenen $\eta_i$ nicht äquivalent.[108]

---

[101] Diese Technik hatte Hensel schon in seiner Dissertation benutzt. Hier übertrug er sie vom Fall eines Primdivisors als Modul auf den des Elements $\pi$ als Modul.

[102] VL 8 vom 1.6.1902, S. 17/1.

[103] VL 8 vom 1.6.1902, S. 17/1. Hensel korrigierte die untere Indizierung $\varepsilon_r$ in die obere $\varepsilon^{(r)}$, vergaß dies jedoch beim zweiten Vorkommen.

[104] VL 8 vom 1.6.1902, S. 13/1.

[105] VL 8 vom 1.6.1902, S. 13/1 u. 13/2. Eine Kongruenz modulo $\pi^e$ ist auch modulo $p$ erfüllt. Analog betrachtete Hensel auch Kongruenzen nach gebrochenen Potenzen von $p$. Diese sind äquivalent zu den entsprechenden Kongruenzen nach Potenzen von $\pi$.

[106] VL 8 vom 1.6.1902, S. 17/2.

[107] VL 8 vom 1.6.1902, S. 17/4.

[108] VL 8 vom 1.6.1902, Rand von S. 17/4. Dies beinhaltet die implizite Behauptung, daß $\sim$ transitiv ist, also für eine andere Potenzreihe $\overline{y_i}$ (ggf. auch anderer Bauart) aus $\overline{y_i} \sim \eta_i$ auch $\overline{y_i} \sim \overline{\eta_i}$ folgen würde.

Hensels Ziel war es

> in allen Fragen der Theilbarkeit die Wurzeln $\eta_1 \dots \eta_n$ durch die ihnen äquivalenten conjugierten Potenzreihen $\overline{\eta_1} \dots \overline{\eta_n}$ ersetzen. Jede solche Äquivalenz heißt nur, daß für beliebige Potenzen $\pi^M$ jene Aequivalenz durch Congruenzen ersetzbar.[109]

In der neunten Vorlesung schlußfolgerte er diese Möglichkeit direkt aus den Äquivalenzen $\eta_i \sim \tilde{\eta_i}$.[110] Aus diesen folgt auch die Zerlegung $G(y) \sim (y - \tilde{\eta_1}) \dots (y - \tilde{\eta_n})|p$.
Hensel hatte damit die Aufgabe gelöst, für die $n$ bekannten algebraischen Wurzeln der Gleichung neue Objekte zu konstruieren, welche Fragen der Teilbarkeit zu beantworten helfen.
Die von Hensel konstruierten Reihen nach Potenzen von $\pi$, deren Anfangsstücke innerhalb von $K(\alpha)$ liegen, haben den Vorteil, daß man nur die Koeffizienten vergleichen muß, um Äquivalenz festzustellen.

Anschließend untersuchte Hensel die Struktur der Reste modulo $\pi$.[111] Festgehalten sei, daß Hensel den "Primzahlcharakter" von $\pi$ betonte,[112] sowie das (geläufige) Ergebnis, daß es ein $\varepsilon$ gibt, für das die Zahlen $c_0 + c_1\varepsilon + \dots + c_{f-1}\varepsilon^{f-1}$ mit $c_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ ein vollständiges Restsystem modulo $\pi$ bilden und das eine irreduzible Kongruenz $e$-ten Grades mit ganzen Koeffizienten modulo $\pi$ erfüllt.

### 5.2.4 Algebraischer Charakter für den Bereich von $p$

Hensel begann an drei Stellen damit, allgemeinere Reihen nach Potenzen von $\pi$ als Entwicklungen zuzulassen: am Ende der achten Vorlesung, am Ende der neunten Vorlesung, sowie am Beginn der zehnten Vorlesung. (Dazwischen untersuchte er die Reste modulo $\pi$ näher.) In letzterer sprach er davon, die Größe habe dann "algebraischen Charakter".[113] Am Ende der 8. Vorlesung schrieb Hensel:

> Will jetzt Bereich der algebraischen Zahlgrößen genau ebenso erweitern, wie zuvor den Bereich der rationalen Zahlgrößen erweitert habe. Nehme an, ich weiss, dass ~~algeb~~ von Zahlgröße $\eta$ bekannt ist, dass $\tilde{\eta} \equiv \varepsilon^{(0)}$ mod $\pi$ [,] $\tilde{\eta} \equiv \varepsilon^{(0)} + \pi\varepsilon^{(1)}|\pi^2$ [,] $\tilde{\eta} \equiv \varepsilon^{(0)} + \pi\varepsilon^{(1)} + \pi^2\varepsilon^{(2)}|\pi^3 \dots$ dann will sagen, ist für Bereich von $p$ wohldefiniert. Kann ihr dann auch eine Reihe $\sum \varepsilon^{(\varrho)}\pi^\varrho$ zuordnen und sie ihr äquivalent setzen.[114]

Hierbei bezeichnet $\tilde{\eta}$ die (gesamte) Entwicklung von $\eta$, die in Beziehung zu endlichen Reihen gesetzt wird. Allerdings ist nicht genau geklärt ist, wie die Beziehung zwischen der Zahlgröße und ihrer Entwicklung aussieht. Hensel ließ dies mit der Formulierung "nehme an, ich weiß" vermutlich bewußt offen. Analog, aber beinahe noch stärker hatte er dies im gestrichenen Part der sechsten Vorlesung formuliert, in dem es hieß: "wenn auf irgend eine Weise weiss."[115]
In der 9. Vorlesung schrieb Hensel, er wolle "genau dieselbe Erweiterung des Bereiches für algebraische Körper machen, wie vorher für rationale."[116] Auch diesmal begann er zunächst, algebraische Zahlgröße zu schreiben, strich algebraisch aber wieder durch:

---

[109] VL 8 vom 1.6.1902, S. 17/4.
[110] Dann sind insbesondere die symmetrischen Funktionen in den $\eta_j$ bzw. $\tilde{\eta_j}$ äquivalent. Aus Hensels Formulierung "da zwei rationale Zahlen nur dann äquivalent sein können so sind [sie] ... einander gleich" (VL 9 vom 5.6.1902, S. 18/1) läßt sich insbesondere ablesen, daß einer rationalen Zahl keine nicht-rationale äquivalent sein kann, vgl. FN 47 und 58.
[111] Diese 'Struktuntersuchungen des Restklassenkörpers' verlaufen nicht grundsätzlich anders als in Hensels Habilitation [3, 1887], so daß hier nicht näher darauf eingegangen wird. Vgl. 2.3.2.
[112] VL 9 vom 5.6.1902, S. 18/2.
[113] VL 10 vom 9.6.1902, S. 20/1.
[114] VL 8 vom 1.6.1902, S. 17/4, z.T. am Rand.
[115] VL 6 vom 26.5.1902, S. 11/3, durchgestrichen, oben bereits zitiert.
[116] VL 9 vom 5.6.1902, S. 19/2.

> Nehme an, ich weiss für ~~algebrais~~ Zahlgrösse, dass sie modulo $p^{\frac{1}{e}}$ congruent $\varepsilon^{(0)}$ modulo $p^{\frac{2}{e}}$ congruent $\varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}\pi$ * etc. ist, dann sage ich, diese Zahlgrösse ist für Bereich von $p$ wohldefinirt und ordne ihr eine Potenzreihe $\xi \sim \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}\pi + +\varepsilon^{(2)}\pi^2 + \dots$ zu; das soll nur heißen, dass allgemein modulo $p^{\frac{r}{e}}$ $\xi \equiv \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}\pi + \cdots + \varepsilon^{(r-1)}\pi^{r-1}$ ist.[117]

Durch * ist dabei der Ort für eine Einfügung am Rand markiert, in der es heißt "d.h. kann für jede noch so hohe Potenz von $p$ Zahl in $K(\alpha)$ angeben, der congruent."[118]
Hierbei sind für die Zahlgröße $\xi$ die erfüllten Kongruenzen modulo gebrochener Potenzen von $p$ bekannt.[119] Dann wird ihr eine äquivalente Potenzreihe nach Potenzen von $\pi$ zugeordnet.
An dieser Stelle deutet Hensels Ausdrucksweise auf folgenden Grundgedanken hin: 'Wenn die Zahlgröße so gut beschrieben ist, daß man bestimmte Informationen in Bezug auf $p$ kennt, dann ist sie für den Bereich von $p$ wohldefiniert.' Genaugenommen werden hier jedoch nur diejenigen Zahlgrößen zusammengefaßt, die zum Körper $K(\alpha)$ passen.

Hensel merkte an, daß Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten von für den Bereich von $p$ wohldefinierten Zahlgrößen wieder diese Eigenschaft haben und ihnen Summe, Differenz, Produkt bzw. Quotient der entsprechenden Potenzreihen zugeordnet wird.[120]
Direkt im Anschluß hatte Hensel geschrieben, daß auch hier die konjugierten Größen den konjugierten Reihen äquivalent sind, dies jedoch durchgestrichen.[121] Vermutlich hatte er bemerkt, daß er zwar konjugierte Reihen, aber keine konjugierten Zahlgrößen zur Verfügung hat.

Auch Hensels Definition von $K(p, \alpha)$ bezieht sich explizit auf die Zahlgrößen (und nicht auf die Potenzreihen):

> Wollen daher sagen Gesammtheit aller dieser für Bereich von $p$ wohldefinierten Zahlgrössen bilden einen Körper $K(p, \alpha)$ von dem $K(\alpha)$ einen Theilbereich bildet, da seine Elemente ja diese Eigenschaft besitzen.[122]

Hensel formulierte noch einmal neu, die Elemente aus $K(p, \alpha)$ seien äquivalent "gesetzmässiger Reihe."[123]
Für einen vorgegebenen Modul $p^M$ können die Elemente von $K(p, \alpha)$ durch Zahlen aus $K(\alpha)$ dargestellt werden. Die konjugierten Potenzreihen erfüllen eine Äquivalenz $G(y) = (y - \tilde{\eta}_1) \dots (y - \tilde{\eta}_n) \sim 0$ mit Koeffizienten in $K(p)$,[124]

> was eben heisst, wenn für $y = \tilde{\eta}_i$ so wenn genügend weit fortsetze, durch jede Potenz von $p$ theilbar.[125]

An dieser Definition von $K(p, \alpha)$ sieht man das Zusammenspiel dreier Tendenzen: Die (*moderne*) Zusammenfassung von Objekten mit gemeinsamen Eigenschaften zu einer Menge, die (*Berliner*) mäßige Konstruktivität, sowie die weiterhin unselbständige Existenz der Potenzreihenentwicklungen.

[117] VL 9 vom 5.6.1902, S. 19/3.
[118] VL 9 vom 5.6.1902, S. 19/3, am Rand. Diese Einfügung könnte nachträglich sein.
[119] Auch hier ließ Hensel offen, was eine solche Kongruenz in den allgemeinsten Fällen bedeutet.
[120] Dies ist ein Hinweis darauf, daß mit Zahlgrößen zumindest operiert werden kann.
[121] VL 9 vom 5.6.1902, S. 19/3.
[122] VL 9 vom 5.6.1902, S. 19/3.
[123] VL 9 vom 5.6.1902,S. 19/4. Dies ist ein Zungenschlag der Berliner konstruktiven Schule. In einer Randbemerkung schrieb er, "$K(p, \alpha)$ enthält alle und nur die Grenzwerthe der Elemente in $K(\alpha)$," VL 9 vom 5.6.1902, S. 19/4. Abgesehen davon, daß "Grenzwert" hier interpretationsbedürftig ist, sollte man diese Bemerkung nicht überbewerten, da sie auch nachträglich erfolgt sein kann.
[124] Irritierend ist: Die so erhaltenen Koeffizienten sind Reihen, die Elemente von $K(p)$ aber (nach der impliziten Definition) Zahlgrößen, die diese Reihen als Entwicklungen haben, vgl. FN 62.
[125] VL 9 vom 5.6.1902, S. 19/4.

**Größen, die durch ihre Näherungswerte bestimmt sind**

Am Beginn der 10. Vorlesung wählte Hensel wieder leicht andere Bezeichnungen, indem er "Größe" statt "Zahlgröße" schrieb. Allerdings veränderte er die Formulierungen in seinem Manuskript. Der ursprüngliche Text lautete vermutlich:

> Will genau wie in rationalem Körper von einer solchen Reihe $\sum \varepsilon^{(i)}\pi^i$ sagen, sie ist für Bereich der Primzahl $p$ wohldefiniert, wenn allgemein [126]

Hensel änderte diese Passage jedoch, wahrscheinlich relativ schnell,[127] in:

> Will genau wie in rationalem Körper von einer Grösse sagen, sie besitzt für Bereich der Primzahl $p$ algebraischen Charakter oder gehört Körper $K(p, \alpha)$ an, wenn allgemein[128]
>
> $\eta \equiv \eta^{(k)} | p^{\frac{k}{e}}$ $k = 0\,1\ldots$ wo $\eta^{(0)}\,\eta^{(1)}\,\eta^{(2)}\ldots$ wohldefinirte Zahlen des Körpers $K(\alpha)$ sind, welche beliebig weit berechenbar. Kann a priori $\eta^{(0)}\,\eta^{(1)}\ldots$ in die Form setzen
>
> $$\eta^{(0)} = \varepsilon^{(0)} \quad \eta^{(1)} = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}\pi,\ \eta^{(2)} = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}\pi + \varepsilon^{(2)}\pi^2; \ldots$$
>
> Eine solche Grösse $\eta$ will ich auch äquivalent $\eta \sim \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}\pi + \varepsilon^{(2)}\pi^2 + \cdots \sim \varepsilon(\pi)$ unbegrenzt verlängert setzen, und durch diese Aequivalenz nur sagen, dass für das betrachtete $\eta$ jene succesiven Congruenzen erfüllt sind.[129]

Man kann dies, besonders mit Blick auf die gestrichene Formulierung, so lesen, daß die Größe auch durch eine gegebene Reihe bestimmt werden *kann*, der sie dann äquivalent gesetzt wird. Die wesentliche Bedingung der Definition ist, daß die $\eta^{(i)} \in K(\alpha)$ sind und *berechenbar* sind.

Der weitere Text macht es sehr wahrscheinlich, daß "Grösse" hier tatsächlich eine andere Bedeutung hat als "Zahlgrösse" zuvor, denn im folgenden Zitat hatte Hensel mit "Zahl" begonnen, strich diesen Wortanfang aber wieder, um "Grösse" zu schreiben:

> Sei $\eta_1 \sim \sum \varepsilon_1^{(k)}\pi^k$ eine ~~Zahl~~ Grösse von $K(p, \alpha_1)$ so existiren zu ihr genau $n$ conjugirte $\eta_2 \ldots \eta_n$ der Körper $K(p, \alpha_1), \ldots K(p, \alpha_n)$ und jede $S(\eta_1\,\eta_2 \ldots \eta_n) \sim g$ wo $g$ eine ~~Zahl~~ Grösse in $K(p) \sim a_t p^t + \ldots$.
> Jene Aequivalenz bedeutet wieder nur das Bestehen der Congruenzen
>
> $$S(\eta_1^{(r)} \ldots \eta_n^{(r)}) \equiv g^{(r)} \pmod{p^{\frac{r}{e}}}$$
>
> wenn links und rechts alle durch $p^{\frac{r}{e}}$ teilbaren Reihenelemente fortlasse.
> Jener Satz gilt, da er für alle Zahlen aus $K(\alpha)$ gilt, die bei Abbrechen erhalte.[130]

In diesem Zitat stehen die durch die Konjugationen aus der zu $\eta_1$ äquivalenten Reihe bestimmten Reihen im Vordergrund. Falls $\eta_1$ noch einen Bezug zu einer Zahlgröße hatte, so tritt dieser zurück.

Mit Hilfe der so erhaltenen konjugierten Größen schlußfolgerte Hensel das Bestehen einer Äquivalenz $n$-ten Grades für jedes Element von $K(p, \alpha)$:[131]

> Jede Grösse $\eta_1$ von $K(p, \alpha)$ genügt nebst ihren conjugirten einer Aequivalenz
>
> $$G(y) = (y - \eta_1) \ldots (y - \eta_n) \sim y^n - b_1 y^{n-1} + \cdots + b_n \sim 0$$
>
> deren Coeffi. ~~Reihen~~ für Bereich zu $p$ rationalen Charakter. Jene Aequivalenz bedeutet auch hier, dass abgebrochene Reihen für jede noch so hohe Potenz Congruenzen erfüllen.[132]

[126] VL 10 vom 9.6.1902, S. 20/1, z.T. durchgestrichen.
[127] Das Argument für eine schnelle Änderung ist das Vorkommen von "Größe" auf der gleichen Seite.
[128] VL 10 vom 9.6.1902, S. 20/1, einschließlich Rand.
[129] VL 10 vom 9.6.1902, S. 20/1. Dieser Teil gehört zu beiden Passagen.
[130] VL 10 vom 9.6.1902, S. 20/2 und 20/3.
[131] Hierbei treten nochmals Elemente rationalen Charakters, also von $K(p)$ auf, für die nur die Näherungswerte bekannt sind.
[132] VL 10 vom 9.6.1902, S. 20/3.

Bei der folgenden Ankündigung, $K(p, \alpha)$ statt $K(\alpha)$ zu betrachten, benutzte Hensel hingegen noch in der gleichen Vorlesung wieder den Ausdruck "Zahlgrössen":

> Will nun allgemeiner die Elemente von $K(p, \alpha)$ untersuchen, d.h. alle diejenigen Zahlgrössen, welche $\sim \sum \varepsilon^{(k)}\pi^k$ sind, wo $\varepsilon^{(k)}$ beliebig ~~Elemente~~ Coefficienten $u_0 + u_1\varepsilon + \cdots + u_{f-1}\varepsilon^{f-1}$ sind und $\varepsilon$ einer modulo $p^{\frac{1}{e}}$ irreductiblen Congruenz $g(\varepsilon) = \varepsilon^f + g_1\varepsilon^{f-1} + \cdots + g_f \equiv 0 \quad p^{\frac{1}{e}}$ genügt deren Coeffi.
> $g_i = (0, 1, \ldots p-1)$ sind.[133]

Hensel nutzte den Ausdruck "Größe" offenbar mit dem Ziel, Aussagen über die konjugierten Reihen treffen zu können.

Er wies explizit darauf hin, daß alle Elemente aus $K(\alpha)$ auch Elemente von $K(p, \alpha)$ seien, jedoch nicht umgekehrt. Aber für eine beliebig hohe Potenz von $p$ als Modul könne man zu jeder Größe aus $K(p, \alpha)$ stets eine kongruente Zahl aus $K(\alpha)$ finden.[134]

### 5.2.5 Reihenentwicklungen mit einfacheren algebraischen Zahlen

Hensels Ziel war es, die Reihenbausteine $\pi$ und $\varepsilon$ so zu wählen, daß jeder Konjugation $\alpha_1 \mapsto \alpha_i$ genau ein Paar von Konjugationen $(\varepsilon_1 \mapsto \varepsilon_i, \pi_1 \mapsto \pi_j)$ entspricht. Dazu veränderte er $\pi$ und $\varepsilon$ zunächst so in $K(p, \alpha)$, daß sie geeignete Äquivalenzen erfüllen, deren Koeffizienten Zahlen sind. Anschließend wählte er dann für $\pi$ und $\varepsilon$ die algebraischen Wurzeln der entsprechenden Gleichungen.

#### Der Koeffizientenkörper $K(p, \varepsilon)$

Zunächst konstruierte Hensel schrittweise eine neue Einheit $\varepsilon \in K(p, \alpha)$, die die Äquivalenz $f$-ten Grades $g(\varepsilon) \sim 0$ erfüllt.[135] Diese liegt im Allgemeinen nicht mehr in $K(\alpha)$.[136] Hensel nannte $K(p, \varepsilon)$ *Koeffizientenkörper*.[137] Er behauptete:

> Dann constituirt $K(\varepsilon, p)$ einen Körper des $f$-ten Grades, der ein Unterkörper von $K(p, \alpha)$.[138]

Hensel erläuterte:

> Jede ganze *Zahl* von $K(p, \varepsilon)$ auf eine einzige Weise in der Form
> $a(\varepsilon) = v_0 + v_1\varepsilon + \cdots + v_{f-1}\varepsilon^{f-1}$ mit rationalen Coeffn darstellbar.[139]

Vermutlich haben also die allgemeinen Elemente von $K(p, \varepsilon)$ in dieser Form Koeffizienten in $K(p)$, die Zahlen jedoch rationale Koeffizienten.

Es ist klar, daß $K(p, \varepsilon)$ in $K(p, \alpha)$ enthalten ist. Ein Körper $f$-ten Grades könnte er über $K(p)$ bzgl. $\sim$ sein.[140]

---

[133] VL 10 vom 9.6.1902, S. 20/3.

[134] Vl 10 vom 9.6.1902, S. 20/2.

[135] VL 10 vom 9.6.1902, S. 20/4. Gilt für das momentane $\varepsilon$ die Äquivalenz $g(\varepsilon) \sim b_r\pi^r + b_{r+1}\pi^{r+1} + \ldots$, so kann man mit dem Ansatz $\varepsilon_1 = \varepsilon + a_r\pi^r$ und der Taylorentwicklung ein $a_r$ bestimmen, für das $g(\varepsilon_1) \sim c_{r+1}\pi^{r+1} + \ldots$ gilt. Dies ist analog der Vorgehensweise in [40, 1901], vgl. 4.4.2.

[136] Momentan kennt man von $\varepsilon$ nur die Reihe. Hensel wechselt aber in Kürze zu einer algebraischen Zahl, die ebenfalls die Äquivalenz erfüllt.

[137] VL 10 vom 9.6.1902, S. 21/1. Hensel benutzte, meiner Meinung nach austauschbar, die Bezeichnungen $K(p, \varepsilon), K(\varepsilon, p)$ und $K(\varepsilon)$. Die Zitate wurden nicht vereinheitlicht, bei indirektem Bezug aber stets $K(p, \varepsilon)$ geschrieben.

[138] VL 10 vom 9.6.1902, S. 21/1.

[139] VL 10 vom 9.6.1902, S. 21/1, Hervorhebung B.P. Dabei ist 'ganze' nachträglich eingefügt, vermutlich mit Blick auf die folgende Aussage.

[140] Diese Interpretation paßt dazu, daß Hensel versucht hatte, eine Körpertheorie bezüglich $\sim$ aufzubauen.

Eine solche ganze Zahl $a(\varepsilon)$ ist dann und nur dann durch $p^{\frac{1}{e}}$ teilbar, wenn alle $v_i$ durch $p$ teilbar sind, denn sonst würde $\varepsilon$ eine Kongruenz niedrigeren Grades modulo $p^{\frac{1}{e}}$ erfüllen. Daraus folgt, daß die Zahlen $a(\varepsilon)$ nur durch ganze Potenzen von $p$ teilbar sein können und sie sind genau dann durch $p^r$ teilbar, wenn alle $v_i$ durch $p^r$ teilbar sind.[141]
Daher erhielt Hensel eine einfache Reihendarstellung nach Potenzen von $p$ für die Zahlen in $K(p, \varepsilon)$:

> $a(\varepsilon)$ reducirt: $v_i = 0, \ldots, p-1$. Jede Zahl von $K(p, \varepsilon)$ $A \sim a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \ldots$[142]

Die so erhaltenen Reihen erlauben es aber auch, die Elemente aus $K(p, \alpha)$ als Linearkombination von $1, \pi, \ldots, \pi^{e-1}$ darzustellen:[143]

> jede Grösse $\eta$ von $K(p, \alpha)$ einfach durch $1, \pi, \pi^2, \ldots, \pi^{e-1}, \pi^e \ldots$ mit reducirten Coeffn. darstellbar.
> Aber auch durch $1, \pi, \pi^2, \ldots \pi^{e-1}, p, p\pi \ldots p\pi^{e-1} \ldots$
>
> $$\begin{aligned} \eta &\sim a_0 + a_1\pi + \cdots + a_{e-1}\pi^{e-1} \\ &+ pa_e + pa_{e+1}\pi + \cdots + pa_{2e-1}\pi^{e-1} \\ &+ p^2 a_{2e} + \ldots \\ &\sim A_0 + A_1\pi + \cdots + A_{e-1}\pi^{e-1} \\ \text{wo jetzt } A_0 &= a_0 + pa_e + p^2 a_{2e} + \ldots \\ A_1 &= a_1 + pa_{e+1} + \ldots \end{aligned}$$

Hensel folgerte daraus:

> Jede Zahl $\eta$ des Körpers $K(p, \alpha)$ eindeutig in Form darstellbar $\eta \sim A_0 + A_1\pi + \cdots + A_{e-1}\pi^{e-1}$ wo $A_0\, A_1 \ldots A_{e-1}$ Zahlgrössen sind, welche innerhalb $K(\varepsilon, p)$ rationalen Charakter haben.
> Eine solche Zahl ist dann und nur dann durch $p$ teilbar, wenn alle Coefficienten durch $p$ teilbar sind.[144]

Hierbei sind als 'Zahlen' vermutlich alle Elemente von $K(p, \alpha)$ gemeint. Hensel bezeichnete die $A_i$ als "Zahlgrößen, welche innerhalb $K(\varepsilon, p)$ rationalen Charakter haben", weil sie nach ganzzahligen Potenzen von $p$ entwickelbar sind, wobei die Koeffizienten gar nicht durch Potenzen von $p$ teilbar sind.[145]
Da die $A_i$ hier Zahlgrößen sind, oben aber als Reihen bestimmt wurden, hat ein impliziter Übergang stattgefunden. Dies spricht dafür, daß Hensel zu jeder Reihe auch eine entsprechende Zahlgröße annahm.

Die so erhaltene Darstellung nutzte Hensel, um eine Äquivalenz für $\pi$ abzuleiten.[146] Da $\pi^e$ genau durch $p$ algebraisch teilbar ist, erhält man aus der Entwicklung für $\frac{\pi^e}{p}$ eine Äquivalenz
$\psi(\pi) = \pi^e - pB_{e-1}\pi^{e-1} - \cdots - pB_0 \sim 0$. Dabei haben alle Koeffizienten in $K(p, \varepsilon)$ ganzen Charakter und $B_0$ enthält keine Potenz von $p$.[147] Hensel formulierte dies:

> Also eine Zahl erster Ordnung genügt innerhalb $K(\varepsilon)$ stets einer Aeq. $e^{\underline{\underline{\text{ten}}}}$ Grades, deren Coeffi. ganze durch $p$ theilbare Zahlen von $K(\varepsilon)$ sind, und deren letzter genau $p$ enthält.[148]

[141] VL 10 vom 9.6.1902, S. 21/1.
[142] VL 10 vom 9.6.1902, S. 21/1 Rand.
[143] VL 10 vom 9.6.1902, S. 21/1 und 21/2.
[144] VL 10 vom 9.6.1902, S. 21/2.
[145] Konkret nicht durch gebrochene Potenzen von $p$.
[146] Dieses Vorgehen ist analog dem in [41, 1902].
[147] VL 10 vom 9.6.1902, S. 21/2.
[148] VL 10 vom 9.6.1902, S. 21/3. Die Koeffizienten brechen allerdings nicht ab, obwohl 'Zahlen' dies suggerieren könnte.

**Eine endliche Äquivalenz für $\pi$**

In der nächsten Vorlesung erfüllte Hensel die Forderung, daß $\varepsilon$ für jede Potenz von $p$ als Modul der Kongruenz $g(\varepsilon) \equiv 0\,|p^K$ genügt, indem er $\varepsilon$ als eine algebraische Wurzel von $g(x) = 0$ wählte. Er begründete dies mit den Worten: "denn wenn $= 0$, so auch theilbar durch jede noch so hohe Potenz von $p$."[149] Durch die Konstruktion einer Reihe hatte er gezeigt, daß dieses $\varepsilon$ dann ebenfalls zu $K(p, \alpha)$ gehört.[150]

Hensels nächstes Ziel war es, $\pi$ so zu verändern, daß es einer Kongruenz mit abbrechenden Koeffizienten genügt, um statt $\pi$ ebenfalls eine algebraische Zahl setzen zu können:

> Will nun aber zeigen, dass an Stelle von $\pi$ auch $\pi' \sim \pi + a_2\pi^2 + \dots$ so setzen, dass $\pi'$ einer Äquivalenz mit abbrechenden Potenzen $\psi_0(\pi) = \pi^e - pC_{e-1}\pi^{e-1} - \cdots - pC_0 \sim 0$ genügt, die also nicht bloss Charakter ganzer Zahlen von $K(\varepsilon)$ haben, sondern wirklich ganze Zahlen sind. Dann kann für $\pi$ auch Wurzel von $\psi_0(\pi) = 0$ setzen, und werde das nachher thun.[151]

Ziel ist konkret, ein Anfangsstück $\psi_0$ der Äquivalenz $\psi$ zu bestimmen, das bereits eine Wurzel in $K(p, \alpha)$ hat. Hensel erläuterte weiter, in welchen Fällen welche Transformationen auf Normalformen möglich sind. Diese Rechnung bietet keine wesentlichen Neuheiten im Vergleich zu [40, 1902], so daß hier nur Hensels Formulierung für den Fall $e \not\equiv 0|p$ vorgestellt wird:

> Ist $e \not\equiv 0|p$ so kann stets in $K(p, \alpha)$ Entwickelungszahl $\pi$ finden, dass $\pi^e - pc_0 \sim 0 \quad \pi \sim p^{\frac{1}{e}}\sqrt[e]{c_0}$
> wo $c_0$ bestimmte modulo $p$ reducirte Zahl des Körpers $K(\varepsilon)$ bedeutet.
> Ist für allgemeinste Zahlen $p$ der Fall, denn aus $e \equiv 0|p$ folgt $n \equiv 0|p$, aber nicht immer,
> z.B. $\pi^2 - 2\pi - 2 \sim 0$. Kann da nicht ein $\pi'^2 - 2 \sim 0$ finden.[152]

**Konjugationen**

Anschließend untersuchte Hensel, wie sich die neuen Entwicklungselemente unter Konjugation verändern. Er begann mit dem Übergang von $\alpha_1$ zu $\alpha_2$ und behauptete, dann sei auch $g(\varepsilon_2) \sim 0$.[153] Er folgerte weiter:

> Also sind $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ sämmtlich Wurzeln der Aequivalenz $g(\varepsilon) \sim 0$ vom $f^{\underline{\underline{\text{ten}}}}$ Grad, d.h. nur $f$ sind verschieden, alle folgenden sind diesen gleich. Ist eben $K(\varepsilon_1)$ Unterkörper zu $K(\alpha_1)$ und es ist
> $G(\varepsilon) \sim (\varepsilon - \varepsilon_1) \dots (\varepsilon - \varepsilon_f)$.[154]

Er ordnete die $\alpha_i$ so in einem rechteckigen Schema an, daß jeweils die $\alpha_{ij}$ auf $\varepsilon_i$ führen ($j = 1, \dots, e; i = 1, \dots, f$) und schrieb $\varepsilon_1 = \chi(\alpha_{11}) = \chi(\alpha_{12}) = \cdots = \chi(\alpha_{1e})$.

Dann stimmen die Koeffizienten der Äquivalenz $e$-ten Grades für $\pi$ ebenfalls für je $e$ der $\alpha_{ij}$ überein. Ist also $\pi_{11}$ als rationale Funktion (mit Koeffizienten in $K(p)$) von $\alpha_{11}$ gegeben und Wurzel der Äquivalenz $\psi_0(\pi) = \pi^e - pc_{e-1}(\varepsilon_1)\pi^{e-1} - \cdots - pc_0(\varepsilon_1) \sim 0$, so erhält man durch Einsetzen von $\alpha_{1j}$ weitere Wurzeln $\pi_{1j}$ dieser Äquivalenz und Hensel folgerte

[149] VL 11 vom 12.6.1902, S. 22/1.

[150] Dies ist eine Interpretation. Hensel expliziert insbesondere nicht, daß die konstruierte Reihe der (geeignet gewählten) algebraischen Wurzel äquivalent ist, obwohl er das vermutlich meint.

[151] VL 11 vom 12.6.1902, S. 22/1.

[152] VL 11 vom 12.6.1902, S. 22/4.

[153] Dazu muß man die Entwicklung für $\varepsilon_1$ auf eine Linearkombination mit Koeffizienten in $K(p)$ umrechnen und dann Hensels Resultate über den Körper $K(p)$ nutzen. Hensel gab diese Umrechnung nicht explizit an, sie folgte jedoch in seiner Veröffentlichung [49, 1905].

[154] VL 11 vom 12.6.1902, S. 23/1. Hierbei sind $K(\varepsilon_1)$ bzw. $K(\alpha_1)$ wiederum Abkürzungen für $K(\varepsilon_1, p)$ und $K(\alpha_1, p)$. Hensel ging also davon aus, daß eine Äquivalenz $f$-ten Grades maximal $f$ für den Bereich von $p$ verschiedene Wurzeln haben kann.

d.h. diese sind die sämmtlichen verschiedenen Wurzeln von $\psi_0(\pi, \varepsilon)$ wo
$\psi_0(\pi, \varepsilon_1) \sim (\pi - \pi_{11})(\pi - \pi_{12}) \dots (\pi - \pi_{1e})$. Sie alle sind $\sim p^{\frac{1}{e}}$ und auch alle $\not\equiv$ denn $\psi_0(\pi)$ irred.[155]

Daher werden bei einer Konjugation nur die Entwicklungselemente der Reihen durch geeignete Konjugierte ersetzt. Umgekehrt erhält man alle Konjugierten von $\eta$, indem man die Entwicklungselemente konjugiert:

Erhalte so also alle n [C]onjugirten $\eta_{ik}$ $\quad \eta_{ik} \sim a_i^{(r)} \pi_{ik}^r + a_i^{(r+1)} \pi_{ik}^{r+1} + \dots$ also erhalte alle aus einer, indem $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_f$ und jedesmal $\pi_{i1} \dots \pi_{ie}$, und alle diese $\pi_{ik}$ sind $\sim p^{\frac{1}{e}}$.[156]

Nach einer Anmerkung, daß man auch die algebraischen Wurzeln einer endlichen Gleichung statt den Wurzeln der entsprechenden Äquivalenz nutzen können, faßte Hensel sein Ergebnis zusammen:

Ist $K(\alpha)$ ein für Bereich von $p$ primitiver Körper so ~~alle~~ ~~Elemente~~ kann zwei Gleichungen
$g(\varepsilon) = 0 \qquad \psi(\pi, \varepsilon) = 0$ so finden, dass jedes Element eindeutig in Form $\eta \sim a^{(r)}\pi^r + a^{(r+1)}\pi^{r+1} + \dots$ und alle conjugirten Reihen den conjugirten Wurzeln äquivalent sind, d.h. ist
$F(y) = y^n + G_1 y^{n-1} + \dots + G_n = 0$ die Gleichung, der $\eta$ genügt, und setze dafür genügend weit verlängerte Reihe $a^{(r)}\pi^r + \dots$ ein, reducire in Bezug auf $\pi$ durch $\psi(\pi) = 0$ auf $e-1$ Grad und in Bezug auf $\varepsilon$ durch $g(\varepsilon) = 0$ auf $f-1$ Grad, so erhalte $\sum\sum D_{ik}\varepsilon^i\pi^k \equiv 0 \,.p^M$ wo $M$ belg. gross, da jedes $D_{ik} \equiv 0\, p^M$.[157]

#### Zusammenfassender Überblick

Hensel betrachtete die Situation lokal. Die Frage des Zusammenhangs seiner Reihenentwicklungen zu "globalen Objekten" beschäftigte ihn nicht, wahrscheinlich setzte er sie implizit voraus.
Durch die Hinzunahme beliebiger (berechenbarer) Potenzreihen, die der Primzahl $p$ und der (für den Bereich von $p$ irreduziblen) Körpererweiterung $K(\alpha)$ angepaßt sind, war es Hensel möglich, eine Teilerweiterung zu konstruieren, in der $p$ noch prim ist und deren Grad dem Grad der Restklassenerweiterung entspricht. Bereits in seiner Dissertation hatte Hensel das Ziel gehabt, einen solchen Zwischenkörper zu konstruieren.[158]
Diese Zwischenstruktur korrespondiert zur Konjugationsstruktur: Je $e$ der Konjugationen in $K(\alpha)$ entsprechen einer Konjugation in $K(p, \varepsilon)$. Jede Konjugation in $K(\alpha)$ entspricht einer Verknüpfung $\varepsilon_1 \mapsto \varepsilon_i, \pi_{1\varepsilon_i} \mapsto \pi_{j\varepsilon_i}$.

## 5.3 Die Vorlesung 1902: Allgemeinere Fälle

Nach dieser etwas tastenden und in mehreren Anläufen erfolgten Abhandlung des einfachen Spezialfalls, in dem die definierende Gleichung irreduzibel für den Bereich von $p$ blieb, versuchte Hensel, seine Ergebnisse zügig zu übertragen.

[155] VL 11 vom 12.6.1902, S. 23/1.
[156] VL 11 vom 12.6.1902, S. 23/2.
[157] VL 11 vom 12.6.1902, S. 23/2, z.T. auf dem Rand. Dabei wird also eine algebraische Zahl (in Anlehnung an Kronecker) durch die von ihr erfüllte Gleichung beschrieben.
[158] Vgl. 2.2.3.

### 5.3.1 Über $p$ liegen mehrere Primdivisoren

**Zerlegung der definierenden Gleichung in Linearfaktoren**

Hensel begann den Übergang zum allgemeinen Fall, in dem die definierende Gleichung des Zahlkörpers für den Bereich von $p$ (ohne Einschränkungen in drei Faktoren) zerfällt, mit der Behauptung, die Übertragung der bisherigen Ergebnisse auf diesen Fall sei sehr leicht:

> Hatten bis jetzt nur einen irreductiblen Factor untersucht und den im Sinne der Aequivalenz in Linearfactoren zerlegt; ist aber jetzt sehr leicht, dasselbe für beliebig viele zu machen.[159]

Hensels Ausgangspunkt war die eindeutige Zerlegung in für den Bereich von $p$ irreduzible Faktoren. Sei diese $F(x) \sim f(x)g(x)h(x) \quad [p]$. Dann griff er exemplarisch einen der Faktoren heraus:

> Betrachte dann Äquivalenz $f(x) \sim 0$ vom Grad $\lambda$ irred für Bereich von $p$, und Bereich aller rat. Funct. von $\alpha$ mit Coeffic. rationalen Charakters, $\alpha$ eine Wurzel.[160]

Es ist nicht klar, welche Vorstellung Hensel mit der Wurzel $\alpha$ der Äquivalenz $f(x) \sim 0$ verband. Die Entwicklungen der Koeffizienten der Äquivalenz sind wohldefinierte $p$-Reihen, die Koeffizienten selbst dementsprechend zunächst beliebige Zahlgrößen rationalen Charakters.
Das Zerfallen der Gleichung $F(x) = 0$ für den Bereich von $p$ könnte für Hensel bedeuten, daß die algebraischen Wurzeln dieser Gleichung für den Bereich von $p$ einfachere Äquivalenzen erfüllen. Dann könnte man für $\alpha$ eine dieser algebraischen Zahlen wählen. Jedem irreduziblen Faktor $f$ von $F$ wären dann bestimmte der algebraischen Wurzeln von $F$ zugeordnet.[161]

Sei dann für dieses $\alpha$ der gesamte Weg bis zu den einfacheren algebraischen Entwicklungszahlen $\pi$ und $\varepsilon$ absolviert, so daß also "jede Größe von $K(p, \alpha)$ in Potenzreihe $\gamma \sim a^{(r)}\pi^r + \dots$"[162] Dann schrieb Hensel (mit Hilfe der konjugierten Potenzreihen) $f(x) \sim (x - \gamma_1) \dots (x - \gamma_\lambda)$ und erhielt nach den gleichen Schritten für $g$ und $h$:

$$F(x) \sim (x - \gamma_1) \dots (x - \gamma_\lambda) \cdot (x - \delta_1) \dots (x - \delta_\mu) \cdot (x - \varepsilon_1) \dots (x - \varepsilon_\nu).^{163}$$

Hier wird noch einmal deutlich, daß Hensel Operationen mit Potenzreihen mit beliebigen algebraischen Zahlen als Koeffizienten unproblematisch fand.[164]

Seien die $\alpha_i$ jetzt wieder die konjugierten algebraischen Wurzeln von $F(x) = 0$. Aus der Zerlegung in Linearfaktoren folgerte Hensel $(\alpha_1 \dots \alpha_n) \sim (\gamma_1 \dots \gamma_\lambda; \delta_1 \dots \delta_\mu; \varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu)$.[165] Weiter wollte er die "Zahlen des

[159] VL 11 vom 12.6.1902, S. 23/3.
[160] VL 11 vom 12.6.1902, S. 23/3.
[161] Die Koeffizienten von $f$ wären dann, wie oben bereits angedeutet, Produkte algebraischer Zahlen, die noch nicht rational sind, aber für den Bereich von $p$ bereits rationalen Charakter haben.
[162] VL 11 vom 12.6.1902, S. 23/3.
[163] VL 11 vom 12.6.1902, S. 23/3.
[164] Es gibt hier jedoch das Problem, daß der so aufgebaute Bereich Nullteiler enthalten kann. Eine präzise Konstruktion eines 'Zerlegungskörpers', der also eine Zerlegung in Linearfaktoren erlaubt, gab Hensel erst in [55, 1909, 199ff]. Dabei muß insbesondere die Gleichung mit rationalen Koeffizienten, die die Galoissche Erweiterung bestimmt, in der alle algebraischen Konjugierten liegen, noch für den Bereich von $p$ in irreduzible Faktoren zerlegt werden.
[165] VL 11 vom 12.6.1902, S. 23/4. Diese Aussage stützt die obige Interpretation, die Wurzel $\alpha$ der Äquivalenz $f(x) \sim 0$ sei eine der algebraischen Wurzeln von $F(x)$.

Körpers"[166] untersuchen und schrieb für eine rationale Funktion $y = \psi(x)$ mit rationalen Koeffizienten:

$$(y_1 \dots y_n) \sim (\psi(\gamma_1) \dots \psi(\gamma_\lambda); \psi(\delta_1) \dots \psi(\delta_\mu); \dots) \sim (\overline{\gamma_1} \dots \overline{\gamma_\lambda}; \overline{\delta_1} \dots \overline{\delta_\mu}, \overline{\epsilon_1} \dots \overline{\epsilon_\nu}),^{167}$$

wobei er die gefundenen Potenzreihen in die rationale Funktion einsetzte und anschließend wieder entwickelte. Als Folgerung erhielt er:

> Die $n$ conjugirten Wurzeln der Aequivalenz $F(x) \sim 0$ sind äquivalent Potenzreihen,[168] welche nach ganzen oder gebrochenen Potenzen der Primzahl $p$ fortschreiten und die stets in Cyclen conjugirter Reihen zerfallen, deren Anz. jedesmal gleich der Anzahl der irred. Faktoren. In derselben Weise zerfallen auch alle Wurzeln einer Aequivalenz $G(y) \sim 0$, wenn $\eta = \psi(\alpha)$ eine Zahl des Körpers $K(\alpha)$ ist.[169]

Am Beginn der nächsten Vorlesung wiederholte Hensel seine Ergebnisse, zunächst zum irreduziblen Fall:

> Hatten gefunden, jede für Bereich von $p$ irreductible ~~Gleichung~~ Aequivalenz vom $\lambda^{\underline{\underline{\text{ten}}}}$ Grade
> $f(x) \sim 0 \qquad [p]$ besitzt genau $\lambda$ conjugirte Wurzeln $\gamma_1\, \gamma_2, \dots, \gamma_\lambda$ welche nach Potenzen von $\pi \sim p^{\frac{1}{e}}$ fortschreiten und deren Coeffi. einem bestimmten Coeffi.Körper $f^{\underline{\underline{\text{ten}}}}$ Grades $K(\varepsilon)$ angehören, so dass $ef = \lambda$ ist. $\underline{\text{Und } f(x) \sim (x - \gamma_1) \dots (x - \gamma_\lambda)}$.[170]

Hensel führte weiter aus:

> Genau das Gleiche gilt, wenn die Coeffi von $f(x)$ $f(x) = x^\lambda + A_1 x^{\lambda-1} x^{\lambda-1} + \dots + A_\lambda$ nicht rationale Zahlen <u>sind</u>, sondern nur rationalen Charakter haben, da auch dann wenn $\alpha$ eine Wurzel von $f(x) \sim 0$ so $1, \alpha, \dots, \alpha^{\lambda-1}$ eine Basis.[171]

Anschließend nannte er die Äquivalenzwurzeln $\alpha_i$, ohne auf algebraische Wurzeln Rücksicht zu nehmen.

> Nenne $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ die $n$ Wurzeln jener Äquivalenz so geordnet, daß $\alpha_1 \sim \gamma_1, \dots \alpha_\lambda \sim \gamma_\lambda$;
> $\alpha_{\lambda+1} \sim \delta_1, \dots \alpha_{\lambda+\mu} \sim \delta_\mu, \alpha_{\lambda+\mu+1} \sim \xi_1, \dots \alpha_n \sim \xi_\nu$.[172]

Ist dann $y = \psi(\alpha)$ eine rationale Funktion (mit rationalen Koeffizienten) und
$G(y) = (y - y_1) \dots (y - y_n) = 0$ die Gleichung $n$-ten Grades, der $y$ mit $y_i = \psi(\alpha_i)$ genügt, dann besitzt $G(y) \sim 0$ ebenfalls $n$ Wurzeln, denn wenn $\alpha_1 \sim \gamma_1$, so $\psi(\alpha_1) \sim \psi(\gamma_1) = \overline{\gamma_1}$ etc. Man erhält

$$G(y) \sim (y - \overline{\gamma_1}) \dots (y - \overline{\gamma_\lambda})(y - \overline{\delta_1}) \dots (y - \overline{\delta_\mu})(y - \overline{\varepsilon_1}) \dots (y - \overline{\varepsilon_\nu}),^{173}$$

d.h. $G(y)$ zerfällt insbesondere wieder in drei Faktoren der Grade $\lambda, \mu, \nu$.
Es bleibt also unklar, ob die Äquivalenzwurzeln auf der Ebene der Potenzreihen oder auf der Ebene der Zahlgrößen angesiedelt sein sollen.

### Ganzheit für den Bereich von $\wp_i$ und die Unabhängigkeit der Primdivisoren

Hensel ordnete jedem irreduziblen Faktor von $F(x)$ einen Primdivisor $\wp_i$ zu und definierte die Teilbarkeit durch diese mit Hilfe der entsprechenden Entwicklungen:

> sage $y$ enthält genau $\wp_1^\varrho$, wenn Entwicklungen $\overline{\gamma_1}, \dots \overline{\gamma_\lambda}$ genau mit $\pi^\varrho$ anfangen, also genau durch $p^{\frac{\varrho}{e}}$ teilbar.[174]

[166] VL 11 vom 12.6.1902, S. 23/3. Er meinte nur Elemente von $K(\alpha)$.
[167] VL 11 vom 12.6.1902, S.23/4.
[168] Hierin steckt implizit, daß jede Gleichungswurzel auch Wurzel der Äquivalenz ist.
[169] VL 11 vom 12.6.1902, S. 24/3.
[170] VL 12 vom 16.6.1902, S. 24/1. Diesmal sind die Äquivalenzwurzeln die Potenzreihen, nicht die Entwicklungen der ersteren.
[171] VL 12 vom 16.6.1902, S. 24/1.
[172] VL 12 vom 16.6.1902, S. 24/2.
[173] VL 12 vom 16.6.1902, S. 24/2.
[174] VL 12 vom 16.6.1902, S. 24/2.

Das Element $y$ ist dann durch das Produkt der entsprechenden Primdivisorpotenzen teilbar, "enthält dann Produkt $\wp_1^\varrho \wp_2^\sigma \wp_3^\tau$."[175] In einer Randbemerkung erläuterte Hensel, daß $y \equiv y' | \wp_1^\varrho$ bedeutet, daß die entsprechenden Entwicklungen bis zum $\varrho$-ten Glied übereinstimmen.[176] Weiter explizierte er, daß ein Produkt genau dann durch einen der Primdivisoren teilbar ist, wenn einer der Faktoren es ist.[177]
Hensel bezeichnete $y$ als *für den Bereich von* $\wp_1$ *algebraisch ganz*, wenn es nichtnegativer Ordnung ist bzw. wenn $g_1(x)$ für den Bereich von $p$ ganze Koeffizienten hat. Ein Fundamentalsystem für die für den Bereich von $\wp_1$ ganzen Zahlen ist $\{\varepsilon^i \pi^k\}$.[178]

Hensels Ziel war zu zeigen, daß die Entwicklungen zu den verschiedenen Primdivisoren voneinander unabhängig sind.[179]

> Will nun Fundamentalsatz beweisen, durch den im Stande bin nur je einen jener Körper $K(\gamma)$ <u>oder</u> $K(\delta)$ <u>oder</u> $K(\xi)$ zu betrachten, ohne mich um die anderen zu kümmern.[180]

Dabei bezeichnet $K(\gamma)$ (vermutlich) den Körper der Potenzreihen in $\pi$ und $\varepsilon$, der eine der Äquivalenzwurzeln von $f(x) \sim 0$ enthält usw.
In einem gestrichenen Ansatz formulierte Hensel als sein Ziel:

> Beweise nämlich, dass stets Zahlen von $K(p,x)$ so finden kann, dass sie innerhalb $K(\gamma)$ beliebig vorgeschriebene Entwickelung haben, während sie in $K(\delta)$, $K(\zeta)$ bis zu beliebig hoher Ord. Coeffi Null haben. Betrachte dazu wieder $K(p,x)$ und zeige, dass hier ein Element habe, welches für Bereich von $\wp_1$ äquivalent Eins, für Bereich von $\wp_2$ und $\wp_3$ aber äquivalent Null.[181]

$K(p,x)$ bezeichnet dabei den Polynomring über $K(p)$ modulo $F(x)$. Aus der Zerlegung
$F(x) \sim f(x)G(x)\ [p]$ folgerte Hensel die Möglichkeit der Einsdarstellung
$f(x)f_1(x) + G(x)G_1(x) \sim 1\ [p]$ und setzte $z = G(x)G_1(x) \sim 1 - f(x)f_1(x)\ [p]$.[182]
Er schlußfolgerte $z \sim 1\,[\wp_1], z \sim 0\,[\wp_2]$, $[\wp_3]$, denn für $x = \gamma$ folgt $z \sim 1$, "für $x = \delta$ folgt
$z = g(\delta)G_1(\delta) \sim 0$ q.e.d."[183] Aus diesem Argument läßt sich ablesen, daß man ein Element von $K(p,x)$ für den Bereich von $\wp_1$ betrachtet, indem man $\gamma$ für $x$ einsetzt usw.[184]
Wählt man dann eine Zahl $w$, die für den Bereich von $\wp_1$ die vorgegebene Entwicklung hat, für den Bereich von $\wp_2$ bzw. $\wp_3$ aber noch nicht verschwinden muß, so ist $v = z \cdot w$ ein Element, das für den Bereich von $\wp_1$ die vorgegebene Entwicklung hat und für die beiden anderen Bereiche verschwindet. Hat man für jeden Bereich eine Entwicklung vorgegeben, so macht man diese Konstruktion dreimal und addiert die gefundenen Elemente.[185]

---

[175]VL 12 vom 16.6.1902, S. 24/2. Um einem Mißverständnis vorzubeugen: $y$ ist dann nicht durch $p^{\frac{\varrho}{e_1}+\frac{\sigma}{e_2}+\frac{\tau}{e_3}}$ teilbar.
[176]VL 12 vom 16.6.1902, S.24/2, Randbemerkung.
[177]VL 12 vom 16.6.1902, S.24/2, Randbemerkung.
[178]VL 12 vom 16.6.1902, S. 24/3 Bemerkung am oberen Rand. Hensel schrieb $f_1(x)$, zu seinen früheren Bezeichnungen paßt aber $g_1(x)$.
[179]Insbesondere wollte er zeigen, wie man Elemente konstruiert, die bestimmten Teilbarkeitsbedingungen genügen.
[180]VL 12 vom 16.6.1902, S. 24/3.
[181]VL 12 vom 16.6.1902, S.24/3, gestrichen. Beim ersten Vorkommen von $K(p,x)$ hatte Hensel das $p$ zunächst vergessen und fügte es nachträglich in der Form $K(x,p)$ ein.
[182]Dies benutzt, daß $f$ und $G$ relativ prim sind, weil $F(x)$ rationale Koeffizienten hat und irreduzibel ist.
[183]VL 12 vom 16.6.1902, S.24/3, gestrichen.
[184]Dafür spricht auch die obige Formulierung, die Zahl aus $K(x,p)$ habe innerhalb $K(\gamma)$ eine Entwicklung.
[185]VL 12 vom 16.6.1902, S.24/4, gestrichen. Die vorgegebene Entwicklung hat dabei jeweils nur endlich viele Glieder.

### Theorie einer reduziblen Erweiterung

Seinen Neuansatz formulierte Hensel ebenfalls noch für die zwölfte Vorlesung. Er begann wiederum mit der Zielstellung:

> Nun zeige, wie Untersuchung von $K(p,x)$ wo $F(x) \sim f(x)g(x)h(x) \sim 0$ vollständig reduzieren kann auf Untersuchung von $K(p,\alpha)$ wo $f(\alpha) \sim 0$.[186]

Hensels Gebrauch von "reduzieren" ist etwas mißverständlich. Er meinte vermutlich: Nachdem man jeden Faktor einzeln betrachtet hat, kann man $K(p,x)$ durch eine Zusammenführung dieser Ergebnisse verstehen. Seinen Gebrauch von $K(p,x)$ erläuterte Hensel im folgenden Satz:

> Alle Elemente von $K(p,x)$ eindeutig in Form $u_0 + u_1x + \cdots + u_{n-1}x^{n-1}$ wo $u_i$ Potenzreihen in $p$ oder durch Basis $(1, x, \ldots, x^{n-1})$.[187]

Er betrachtete Polynome mit Koeffizienten in $K(p)$ modulo $F(x)$,[188] wobei er die (in der Theorie algebraischer Funktionen) von Kronecker entwickelte Theorie reduzibler Gleichungen benutzte.[189] Die entsprechenden Begriffsbildungen scheinen für Hensel selbstverständlich zu sein, er definierte bzw. explizierte sie nicht. Insbesondere verstörte ihn nicht, daß das so beschriebene Objekt Nullteiler enthält.[190]
Eine Basis ist wie üblich eine linear unabhängige Menge mit $n$ Elementen $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$, für die also aus $\sum u_i x^{(i)} \sim 0$ folgt, daß alle Koeffizienten $u_i \sim 0$ sind. Die Formel $\sum u_i x^{(i)} \sim 0$ interpretierte Hensel jedoch als Aussage über alle Konjugierten, die hier extra gefordert werden muß, während sie im irreduziblen Fall automatisch erfüllt ist:

> Aber: $\sum u_i x^{(i)} \sim 0$ für alle Conjugirten dann und nur dann, wenn linke Seite teilbar durch $F(x) \sim f(x)g(x)h(x)$ dies aber, da $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ teilerfremd, dann und nur dann, wenn durch $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$.[191]

Die Bedingung, ein Element sei $\sim 0$, wenn alle seine Konjugierten für den Bereich von $p$ verschwinden, bedeutet also, seine Darstellung als rationale Funktion von $x$ müsse durch alle drei Funktionen $f(x), g(x)$ und $h(x)$ teilbar sein.
Seien jetzt $K(\gamma), K(\delta)$ und $K(\xi)$ die durch $f(x) \sim 0, g(x) \sim 0$ bzw. $h(x) \sim 0$ bestimmten Körper, deren Entwicklungselemente bereits bestimmt und modifiziert sind. Hensel wollte eine Basis von $K(p,x)$ aus den Basen für $K(\gamma), K(\delta)$ und $K(\xi)$ konstruieren.[192]
Dazu zerlegte er $F(x) \sim f(x)f_1(x) \sim g(x)g_1(x) \sim h(x)h_1(x)$, bestimmte dann Funktionen $\overline{f}(x)$ und $\overline{f_1}(x)$ mit

$$f(x)\overline{f}(x) + f_1(x)\overline{f_1}(x) \sim 1 \text{ und setzte } F_1(x) = f_1(x)\overline{f_1}(x) \sim 1 - f(x)\overline{f}(x).^{193}$$

Multipliziert man die Elemente $\gamma^{(i)}$ einer Basis für $K(\gamma)$ mit $F_1(x)$, so sind die neuen Elemente $\overline{\gamma^{(i)}}$ modulo $f(x)$ den alten gleich (denn $F_1(x) \equiv 1|f(x)$), verschwinden aber modulo $g(x)$ und $h(x)$.

[186] VL 12 vom 16.6.1902, S. 25/1.
[187] VL 12 vom 16.6.1902, S. 25/1.
[188] Insbesondere besteht $K(p)$ an dieser Stelle aus den Potenzreihen, nicht den äquivalenten Zahlgrößen.
[189] Vgl. [Kronecker, 1881]. Auch Landsberg hatte diese Theorie aufgegriffen, z.B. [Landsberg, 1895].
[190] Man kann sogar behaupten, es war ihm nicht nachhaltig bewußt, denn in der späteren Veröffentlichung [49, 1905] behauptete er für ein offenbar äquivalentes Objekt explizit die Wohldefiniertheit der Division.
[191] VL 12 vom 16.6.1902, S. 25/1. Die Worte "für alle Conjugirten" sind nachträglich eingefügt. Landsberg argumentierte in [Landsberg, 1895] mit der geometrischen Vorstellung, die Riemannsche Fläche müsse nicht zusammenhängend sein, trotzdem wolle man alle Blätter gleichzeitig betrachten.
[192] Deren Matrix der Konjugierten soll dann wiederum die z.B. aus [29, 1897] wohlbekannte Blockdiagonalform haben.
[193] VL 12 vom 16.6.1902, S. 25/1.

Modifiziert man entsprechend auch die Elemente der anderen Basen, so erhält man eine Basis für $K(p,\alpha)$.[194] Daraus folgerte Hensel unmittelbar die Aussage:

> In Körper $K(p,\alpha)$ kann stets ein Element finden, welches modulo $f(x)$ kongruent $\gamma^{(0)}$, wo $\gamma^{(0)}$ beliebiges Element von $K(\gamma)$, modulo $g(x)$ kongruent $\delta^{(0)}$, modulo $h(x)$ kongruent $\xi^{(0)}$ ist.[195]

Ebenfalls durch Multiplikation mit $F_1(x)$ usw. modifizierte Hensel die jeweiligen Entwicklungselemente $\pi$ und $\varepsilon$.[196] Die neuen Entwicklungselemente sollen wieder mit $\pi, \varepsilon$ bezeichnet werden.[197]

Hensel dehnte anschließend die Aussage über die $n$ zugeordneten Entwicklungen ausdrücklich auch auf Zahlgrößen aus $K(p,\alpha)$ aus. Von der Zerlegung

$$F(x) \sim (x-\gamma_0)\dots(x-\gamma_\lambda)(x-\delta_1)\dots(x-\delta_\mu)(x-\zeta_1)\dots(x-\zeta_\nu) \quad (p)$$

ausgehend, schrieb er:

> Ist ferner $\xi = \psi(\alpha)$ irgend eine Zahl oder Zahlgröße des Körpers $K(p,\alpha)$ so erhalte
> $\xi_1\ \xi_2 \dots \xi_n \sim \psi(\alpha_1)\dots\psi(\alpha_n) \sim \psi(\gamma_1)\dots\psi(\gamma_\lambda); \psi(\delta_1)\dots\psi(\delta_\mu); \psi(\zeta_1)\dots\psi(\zeta_\nu)$
> und wenn für $\gamma, \delta, \zeta$ ihre Reihen einsetze, so schreiten diese auch nach Potenzen von $\pi, \varrho, \sigma$ fort, während Coefficienten den Coefficientenkörpern angehören.[198]

Der Beginn der nächsten Vorlesung gibt einen guten Anhaltspunkt für Hensels Blick auf die Objekte seiner Theorie:

> Hatten gesehen, ist $\xi$ Wurzel irreduzibler Gleichung $F(x) = 0$ und zerfällt diese für Bereich von $p$ in 3 irreduzible Faktoren $F(x) \sim f(x)g(x)h(x)$ so sind Körper $n$-ter Ordnung $K(\xi_1,p)\dots K(\xi_n,p)$ einfach mit den Körpern $K(\gamma_1,p)\dots K(\gamma_\lambda,p); K(\delta_1,p)\dots K(\delta_\mu); K(\varepsilon_1,p)\dots K(\varepsilon_\nu,p)$ identisch, welche durch irreduzible Äquivalenzen $f(x) \sim 0, g(x) \sim 0, h(x) \sim 0$.[199]

Diese Aussage ist ein starkes Argument für die Lesart, daß Hensel als Wurzeln der irreduziblen Äquivalenzen bestimmte der algebraischen Wurzeln der ursprünglichen Gleichung benutzen wollte, denn das erklärt die Benutzung von 'identisch'. Sie wirft jedoch die Frage auf, was Hensel unter einem Körper $n$-ter Ordnungg verstand.
Hensel erläuterte nicht explizit, was für ein Objekt $K(\xi_i,p)$ sein soll. Vermutlich wollte er analog zum irreduziblen Fall die rationalen Funktionen in $\xi_i$ mit Koeffizienten aus $K(p)$ betrachten.
Er schrieb weiter:

> Kann nämlich in $K(\xi,p)$ stets $\lambdabar$ Element $\eta$ so finden, dass
> $$\eta_1\dots\eta_\lambda; \eta_{\lambda+1}\dots\eta_{\lambda+\mu}; \eta_{\lambda+\mu+1}\dots\eta_n$$
> äquivalent
> $$\gamma_1^{(0)}\dots\gamma_\lambda^{(0)}; \delta_1^{(0)}\dots\delta_\mu^{(0)}; \varepsilon_1^{(0)}\dots\varepsilon_\nu^{(0)}$$
> sind, wo $\gamma^{(0)}, \delta^{(0)}, \varepsilon^{(0)}$ beliebige Zahlen der Körper $K(\gamma,p), K(\delta,p), K(\varepsilon,p)$ sind.[200]

[194] VL 12 vom 16.6.1902, S. 25/2. Auf S. 25/1 hatte Hensel zunächst am Beispiel der jeweiligen Basen $1, x, \dots, x^{\lambda-1}$ etc. die lineare Unabhängigkeit der modifizierten Basen erläutert.
[195] VL 12 vom 16.6.1902. Dazu muß man die gegebenen Elemente nur bzgl. der Basen in $K(\gamma)$ usw. darstellen, dann die Basiselemente mit $F_1(x)$ usw. multiplizieren und dann addieren.
[196] Dann ist $\bar{\varepsilon} \equiv 0|g(x), h(x)$, also $\overline{\varepsilon_{\lambda+i}} \sim 0$, d.h. die letzten $\mu+\nu$ Konjugierten verschwinden usw., VL 12 vom 16.6. 1902, S. 25/3.
[197] Maßgeblich sind nur die modulo $f$ (bzw. $g$ bzw. $h$) erfüllten Äquivalenzen und diese bleiben bestehen.
[198] VL 12 vom 16.6.1902, S. 25/3. $\varrho$ und $\sigma$ sind dabei die Entwicklungselemente in $K(\delta)$ bzw. $K(\zeta)$. Bei strenger Auslegung von Hensels Definitionen müßte er von $\psi(\alpha_i)$ ausgehen und damit die $\xi_i$ definieren. Vgl. 5.2.4.
[199] VL 13 vom 19.6.1902, S. 26/1.
[200] VL 13 vom 19.6.1902, S. 26/1.

Hensel hatte also die optimale Struktur gefunden, um die Konjugierten eines Elements von $K(\xi, p)$ zu beschreiben: Für ein gegebenes Element ist klar, wie dessen Konjugierte in Zyklen zerfallen.[201] Es ist aber auch klar, welche lokalen Konjugierten gegeben sein dürfen, damit ihnen ein Element von $K(\xi, p)$ entspricht.[202]

### Ganzer Charakter und ein Fundamentalsystem für die Zahlgrößen ganzen Charakters

Hensel plante, "diejenigen Zahlen des Körpers $K(p, \alpha)$ aufzusuchen, welche in Bezug auf $p$ den Charakter ganzer algebraischer Zahlen besitzen."[203] Dazu definierte er zunächst *ganzen Charakter* in Bezug auf $\wp_1$:[204]

Eine "algebraische Zahl [hat] in Bezug auf $\wp_1$ ganzen Charakter", wenn die Entwicklungen $\eta_1, \ldots, \eta_\lambda$ von nichtnegativer Ordnung sind, also genau dann, wenn in "$f_1(y) \sim (y-\eta_1)\ldots(y-\eta_\lambda) \sim y^\lambda - a_1 y^{\lambda-1} + \cdots \pm a_\lambda$ alle Koeffizienten ganzen Charakter" haben.[205] Dies motivierte die folgende allgemeinere Definition:

> Allgemeiner sage: Algebraische Zahl $\zeta$ des Körpers $K(\xi, p)$ hat dann in Bezug auf $p$ Charakter einer ganzen Zahl, wenn [in] $G(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots$ alle Koeffizienten ganze Zahlen, oder ganzen Charakter haben.[206]

Es folgt nämlich offensichtlich:

> Eine algebraische Zahl $\zeta$ besitzt dann und nur dann in Bezug auf beliebige Primzahl $p$ ganzen Charakter, wenn sie in Bezug auf jeden ihrer Primfaktoren $\wp_1, \wp_2, \wp_3$ von nicht negativer Ordnung ist.[207]

Hensel stellte sich im Anschluß die Aufgabe, ein Fundamentalsystem "für alle ganzen Zahlgrössen des Körpers $K(p, \xi)$ zu construiren."[208] Analog zu anderen Fällen handelt es sich bei einem solchen Fundamentalsystem für die in Bezug auf $p$ ganzen Zahlgrößen von $K(p, \xi)$ um ein System $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}$, so daß $x = \sum_i u_i \xi^{(i)}$ genau dann ganz in Bezug auf $p$ ist, wenn alle $u_i$ es sind.[209]

Das System $\{\varepsilon^i \pi^k\}$ ist ein Fundamentalsystem für die ganzen Größen für den Bereich von $p$ von $K(\gamma)$.[210] Modifiziert man die jeweiligen Systeme mit $F_i(x)$, so bilden sie zusammen ein Fundamentalsystem für alle ganzen Zahlgrößen in Bezug auf $p$.[211]

Da der $p$-Anteil der Diskriminanten aller Fundamentalsysteme für die in Bezug auf $p$ ganzen Größen von $K(p, \xi)$ gleich ist, kann man ihn mit Hilfe dieses Fundamentalsystems berechnen. Die entscheidende

---

[201] Es zerfällt die von den Konjugierten erfüllte Gleichung.

[202] Es handelt sich um ein direktes Produkt. Zu gegebenen Elementen aus $K(\gamma, p), K(\delta, p), K(\varepsilon, p)$ hatte Hensel ein $\eta$ konstruiert.

[203] VL 12 vom 16.6.1902, S. 25/4. Meiner Meinung nach müßte es hier und in den beiden folgenden Zitaten "Zahlgröße[n]" heißen.

[204] Eine Zahlgröße von rationalem Charakter in Bezug auf $p$ heißt von *ganzem Charakter*, wenn sie nicht-negativer Ordnung ist, vgl. das Zitat zu FN 42.

[205] VL 13 vom 19.6.1902, S. 26/1. Dies ist eine Ausformulierung und Umbenennung der in VL 12 gegebenen Definition von *ganz in Bezug auf* $\wp_1$.

[206] VL 13 vom 19.6.1902, S. 26/2.

[207] VL 13 vom 19.6.1902, S. 26/2.

[208] VL 13 vom 19.6.1902, S. 26/2, es ist also offenbar ein Versehen, daß er den ganzen Charakter nur für algebraische Zahlen definiert hatte.

[209] Vgl. dazu VL 13 vom 19.6.1902, S. 26/3.

[210] Vgl. VL 12 vom 16.6.1902, S. 26/1f und 5.2.5, wo die benötigte Aussage abgeleitet wurde.

[211] Zum Beweis betrachtet man eine Linearkombination aus diesem System, die eine ganze Zahlgröße darstellt. Zu zeigen ist, daß alle Koeffizienten ganz sind. Dazu betrachtet man die Gleichung für den Bereich der einzelnen Konjugationen und geht zu äquivalenten Ausdrücken über. Dann verschwinden die meisten Summanden und man erhält eine Linearkombination in einem der Teilkörper, z.B. $K(\gamma)$. Dort müssen die Koeffizienten ganz sein, da $\{\varepsilon^i \pi^k\}$ dort ein Fundamentalsystem für die in Bezug auf $p$ ganzen Größen ist.

Gleichung hierfür ist:

$$D(\xi) = \begin{pmatrix} \left(\gamma_k^{(i)}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\delta_{k'}^{(i')}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\xi_{k''}^{(i'')}\right) \end{pmatrix}^2 \sim D(\gamma)D(\delta)D(\xi), \text{ wo z.B. } D(\gamma) = |\varepsilon_l^i \pi_l^k|^2 .$$ [212]

Durch die Betrachtung des Bereichs von $p$ und der reduziblen Erweiterung war es Hensel gelungen, diese Blockdiagonalstruktur absolut zu erreichen, während er sie zuvor (z.B. in der Arbeit [41, 1902]) nur bis zu einer gewissen Potenz von $p$ hatte erreichen können.[213]

Die Berechnung der Ordnungszahlen von $D(\gamma)$ usw. unterscheidet sich nicht von derjenigen in [41, 1902],[214] die Diskussion ihrer Grenzen im wild verzweigten Fall nicht von der in [34, 1897],[215] so daß hier nicht darauf eingegangen wird.

Als "Hauptsatz der ganzen Theorie" bezeichnete Hensel die Aussage, $p$ komme genau dann in der Diskriminante von $K(p, \xi)$ nicht vor, "wenn $p$ für keinen der Partialkörper Verzweigungszahl ist, wenn also alle $n$ Wurzeln nach ganzen Potenzen von $p$ entwickelbar."[216] In der nächsten Vorlesung hob er jedoch auch sein spezifisches Ergebnis hervor, indem er im Anschluß an die beidseitige Abschätzung der Verzweigungszahl schrieb:[217]

> Diese Fragen mit gewöhnlicher Idealtheorie nicht streng zu entscheiden, bzgl. grober Abh[ängigkeit] von Dedekind, Theorie der Ideale und höheren Congruenzen und, Über die Discriminanten endlicher Körper.[218]

### Anwendung auf die Zahlentheorie

Um seine Ergebnisse auch auf die algebraischen Zahlen (von $K(\xi)$) anwenden zu können, formulierte Hensel zunächst seine Ergebnisse *für den Bereich von* $\wp$ und den allgemeinen Fall:

> Für den Bereich von $\wp$ wird der Körper $K(\xi)$ der $n$-ten Ordnung auf Körper $K(\gamma) = K(\varepsilon, \pi)$ der $\lambda = ef$-ten Ordnung abgebildet, [so] dass eben $\lambda$ von den conjugiert[en] Zahlen äquivalent den $\lambda$ conjugirten Zahlgrössen $\gamma_1\, \gamma_2 \ldots \gamma_\lambda$ sind.[219]

Die Betrachtung für den Bereich von $\wp$ wird an dieser Stelle implizit eingeführt. Behauptet wird, von den $n$ Konjugierten eines Elements aus $K(\xi)$ seien genau $\lambda$ äquivalent zu den $\lambda$ konjugierten Potenzreihen $\gamma_i$. Dabei bezeichnet 'Zahlgrößen' an dieser Stelle eindeutig die Entwicklungen, denn Hensel hatte die $\gamma_i$ zuvor als Entwicklungen bezeichnet.[220]

> Jede Zahl $\eta$ des Körpers $K(\xi)$ genügt für den Bereich von $\wp$ einer Aequivalenz $\lambda$-ten Grades
>
> $$f(\eta) \sim 0 \qquad [\wp] \qquad \lambda = ef$$

[212] VL 13 vom 19.6.1902, S. 26/4.
[213] Allerdings sind die Entwicklungselemente i.A. nicht mehr algebraisch, denn sie wurden noch einmal mit den Faktoren $F_i(x)$ modifiziert, die Koeffizienten in $K(p)$ haben. Hensel nutzte nur, daß sie lokal algebraisch bleiben.
[214] VL 13 vom 19.6.1902, S. 27/1-3, vgl. [41, 1902, 318ff] und 4.4.3.
[215] Vgl. 4.2.3 und 4.4.3, sowie [41, 1902, 318ff].
[216] VL 13 vom 19.6.1902, S. 27/4.
[217] Die Verzweigungszahl wird den einzelnen Primdivisoren von $p$ zugeordnet und gibt an, welchen Anteil dieser Primdivisor am $p$-Anteil der Diskriminante hat. Sie wird mit $\bar{e}$ bezeichnet und ist größer oder gleich $e$, wenn genau die $e$-te Potenz des Primdivisors $p$ teilt. Ist dann $f$ (wie oben) der Grad des Restklassenkörpers bzw. die Kardinalität eines Fundamentalsystems für den Modul $\wp$, so ist der $p$-Anteil der Diskriminante, der von $\wp$ stammt, $p^{f(\bar{e}-1)}$.
[218] VL 14 vom 21.6.1902, S. 28/2. Die Abschätzung hat (für jeden Primdivisor) im Fall $s > 0$ die Gestalt $(s+1)e \geq \bar{e} \geq e+1$, wobei $e$ des Exponent des Primdivisors in $p$ und $s$ die Ordnung von $e$ in Bezug auf $p$ ist. Falls $s = 0$ gilt $e = \bar{e}$. Der erste (unpräzise) Titel bezieht sich vermutlich auf [Dedekind, 1878], der andere (mit minimaler Ungenauigkeit) auf [Dedekind, 1882].
[219] VL 14 vom 21.6.1902, S. 28/4.
[220] VL 14 vom 21.6.1902, S. 28/4.

deren Coeffi. für $p$ rationalen Charakter haben, und welche selbst irreductibel oder die Potenz einer einer irreductiblen Function ist.[221]

Die angesprochene Äquivalenz entsteht aus den $\lambda$ Potenzreihen. Die Aussage erläutert den Gebrauch des *Bereichs von* $\wp$: Zu einer algebraischen Zahl bestimmt ein gegebener Primdivisor $\wp$ zunächst die auszuwählenden Konjugierten. Aus den Entwicklungen dieser Konjugierten folgt, durch welche Potenz des Primdivisors die Zahl teilbar ist. Die Äquivalenz für den Bereich von $\wp$ erfordert gerade die Rechnung mit den entsprechenden Entwicklungen.

Um auch Schlußfolgerungen für den $p$-Anteil der Diskriminante einer algebraischen Körpererweiterung ziehen zu können, zeigte Hensel, daß es auch ein Fundamentalsystem für den Bereich von $p$ für $K(p,\xi)$ gibt, das nur aus algebraischen Zahlen besteht. Der Grundgedanke des Arguments ist, daß für Teilbarkeitsfragen nur die Anfangsglieder entscheidend sind.[222] Dieses hat dann den berechneten $p$-Anteil der Diskriminante $N(\prod \wp^{\overline{e}-1})$,[223] ist aber gleichzeitig ein Fundamentalsystem modulo $p$ für $K(\xi)$.[224]

Genau wie 1897 behandelte Hensel das Problem der gaDT: Zuerst benutzte er konjugierte Entwicklungen mit unbestimmten Koeffizienten (für den Bereich von $p$) der Fundamentalsform, um die Äquivalenz zwischen Diskriminante der Fundamentalgleichung und Diskriminante des Zahlkörpers zu zeigen. Anschließend untersuchte er, wann die Unbestimmten so belegt werden können, daß kein zusätzlicher Teiler $p$ in der Diskriminantenform auftritt.[225] Über den Fall, in dem solch ein $\eta$ gefunden werden kann, wo $p$ also kein gaDT ist, schrieb er:

Wenn das der Fall, so sind $1\ \eta\ \eta^2 \dots \eta^{n-1}$ ein Fundamentalsystem für den Bereich von $p$ und dann wie Theorie der Körper sehr einfach.[226]

Hensel folgerte noch, man könne ein Fundamentalsystem für $K(\xi)$ und den Bereich von $p$ finden, welches bis zu einer beliebig hohen Potenz von $p$ den $\{\varepsilon^i \pi^k\}$ kongruent ist und deren Konjugiertenmatrix also für diesen Modul Blockdiagonalgestalt hat.[227]

### 5.3.2 Der relative Fall

Um ableiten zu können, wie sich die Diskriminante eines algebraischen Zahlkörpers aus den Diskriminanten von zwei Teilerweiterungen zusammensetzt, untersuchte Hensel auch algebraische Erweiterungen eines Zahlkörpers. Er kündigte wichtige Ergänzungen für die allgemeine Theorie der Primfaktoren an:

221 VL 14 vom 21.6.1902, S. 28/4.

222 Für die übliche schrittweise Reduktion der Diskriminante eines gegebenen Systems wird dabei zunächst der folgende Satz für die Äquivalenz $\sim$ formuliert: "Ist $(\eta^{(1)} \dots \eta^{(n)})$ ein Fundsystem und $(\xi^{(1)} \dots \xi^{(n)})$ ein anderes, so besteht stets eine ganzzahlige Func. $\eta^{(i)} \sim \sum a_{ik}\xi^{(k)} \qquad \xi^{(i)} \sim \sum a'_{ik}\eta^{(k)}$ mit ganzen Coefficienten," VL 14 vom 21.6.1902, S. 29/4. Startet man von einem beliebigen linear unabhängigen System algebraischer Zahlen, so können die Linearkombinationen, mit deren Hilfe man die Diskriminante reduziert, weiterhin Zahlen als Koeffizienten haben, weil für die Teilbarkeit nur die Anfangsstücke relevant sind.

223 Dabei ist $N$ von $\wp$ abhängig: Es ist $N(\wp) = p^f$, also $N(p) = p^{ef}$ und $N(\wp^{\overline{e}-1}) = p^{f(\overline{e}-1)}$.

224 VL 14 vom 21.6.1902, S. 29/4. Die Formel entspricht der in [29, 1897].

225 Vgl. 4.2.5.

226 VL 15 vom 23.6.1902, S. 31/4.

227 VL 16 vom 1.7.1902, S. 33/4. Dazu nutzte er ein aus algebraischen Zahlen (aus $K(\xi)$) bestehendes Fundamentalsystem für $K(p,\xi)$ und stellte damit die $\{\varepsilon^i\pi^k\}$ für einen Modul $p^M$ dar. (Für einen festen Modul $p^M$ sind die Entwicklungen der Elemente $y \in K(p,\xi)$ algebraische Zahlen.)

Wende mich jetzt zu genauerer Untersuchung der Modifikationen in den Sätzen und Definitionen der Theorie der algebraischen Zahlen, welche eintreten, wenn an Stelle des absoluten Rationalitätsbereiches selbst ein beliebiger algebraischer Zahlkörper gesetzt wird. Dabei einige wichtige Ergänzungen für allgemeine Theorie der Primfaktoren.[228]

In Hensels Notizen findet sich diese Untersuchung zweimal, nämlich sowohl in VL 18, als auch zu Beginn von VL 19. Da es keine Unstimmigkeiten zwischen den Versionen gibt, werde ich sie gleichzeitig vorstellen.[229]

**Zerlegung für den Bereich von $\wp$** Sei $K(\alpha)$ ein algebraischer Körper $m$-ter Ordnung, $\wp$ ein Primfaktor von $p$, dann sind (für den Bereich von $\wp$)

alle Zahlen desselben in Reihen entwickelbar, die nach Potenzen von $\pi$ fortschreiten, wo $\pi \sim p^{\frac{1}{e}}$ und Koeffizienten in Körper $K(\varepsilon)$ der Ordnung $f$.[230]

Sei weiter $F(\theta) = \theta^n + a_1\theta^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ eine über $K(\alpha)$ irreduzible Gleichung $n$-ten Grades, deren Koeffizienten ganze Zahlen von $K(\alpha)$ sind. Für den Bereich von $\wp$ sind die Koeffizienten von $F(\theta)$ Potenzreihen $k(\pi, \varepsilon) \in K(\varepsilon, \pi)$.[231] Setzt man für $\theta$ eine algebraische Wurzel $\theta_1$ von $F(\theta) = 0$ ein, so ist auch $F(\theta_1) \sim 0$ [$\wp$], "d.h. wenn Reihen [für $a_i$] genügend weit verlängert, so linke Seite durch beliebig hohe Potenz von $\wp$ teilbar."[232]

Die erste Frage ist, ob $F(\theta)$ für den Bereich von $\wp$ zerfällt:

Betrachte nun $F(\theta)$ für variables $\theta$ mit jenen Potenzreihen als Koeffizienten, und frage ob vielleicht $F(\theta) \sim f(\theta)g(\theta)h(\theta)$ [$\wp$] wo $f, g, h$ ebenfalls ganze Funktionen der Grade $\lambda$ $\mu$ $\nu$ deren Koeffizienten ebenfalls Potenzreihen sind in $K(\varepsilon, \pi)$.[233]

"[W]örtlich ebenso wie früher," behauptete Hensel, gelange man zu der Aussage:

Die Funktion $F(\theta)$ kann auf eine einzige Weise in ein Produkt für den Bereich von [$\wp$] irreductibler Factoren zerlegt werden.[234]

### Endliche Koeffizienten im Schnelldurchlauf

Hensel behandelte zuerst den Fall, in dem die Koeffizienten des irreduziblen Faktors $f(\theta) = \theta^\lambda + \gamma_1\theta^{\lambda-1} + \cdots + \gamma_\lambda$ abbrechen,[235] also "ganze algebraische Zahlen von $K(\varepsilon, \pi)$ sind."[236] Als eine Wurzel von $f(\theta) \sim 0$ wählte Hensel "eine der $\lambda$ Wurzeln der Gleichung $f(\theta) = 0$."[237]

**Ein Primelement** Hensel definierte $K(\theta, \wp)$ bzw. $K(\theta, \varepsilon, \pi)$ als den Körper "aller rat. Funct. von diesem $\theta$ mit Coeffi. die wohldefinierte Potenzreihen in $(\pi, \varepsilon)$ [bzw. $K(\varepsilon, \pi)$] sind."[238]

[228] VL 18 vom 7.7.02, S. 37/1.
[229] Allerdings hat Hensel in der zweiten Vorlesung nachträglich die Notation geändert: Statt $\pi_0$ schrieb er $\Pi$, statt $\wp_0$ schrieb er $k$. Hier werden einheitlich die früheren Bezeichnungen benutzt und zitiert.
[230] VL 18 vom 7.7.1902, S. 37/1.
[231] VL 18 vom 7.7.1902, S. 37/1. Die Potenzreihen laufen nach Potenzen von $\pi$, die Koeffizienten sind ganze Funktionen (beschränkten Grades) von $\varepsilon$ mit Koeffizienten in $\{0, \ldots, p-1\}$.
[232] VL 18 vom 7.7.1902, S. 37/1 und 37/2.
[233] VL 18 vom 7.7.1902, S. 37/2.
[234] Beide VL 18 vom 7.7.1902, S. 37/2. Die Zerlegung erfolgt ebenso wie im früheren Fall auf der Ebene der Entwicklungen. Es gibt diesmal jedoch keine Formulierungen, die (z.B.) von der zugeordneten Zahlgröße sprechen.
[235] Während Hensel im nicht-relativen Fall unterschied, ob die Koeffizienten eines irreduziblen Faktors rational sind oder nicht, geht es hier *nicht* darum, ob die Koeffizienten algebraisch sind, sondern darum, ob sie in $K(\varepsilon, \pi)$ liegen.
[236] VL 18 vom 7.7.1902, S. 37/3. Dabei ist nicht klar, warum bzw. in welchem Sinne die durch die $F_i(x)$ modifizierten $\varepsilon, \pi$ algebraisch sind.
[237] VL 18 vom 7.7.1902, S. 37/3. Er schrieb, er wähle "z.B." die algebraische Wurzel, benutzte aber im Folgenden die algebraischen Konjugierten dieses $\theta$.
[238] VL 18 vom 7.7.1902, S. 37/3.

Ist $\varphi(x)$ eine rationale Funktion mit Koeffizienten in $K(\varepsilon, \pi)$, dann gilt:

> Sind also $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_\lambda$ die $\lambda$ conjugirten Wurzeln der Gleichung $f(\theta) = 0$ so besteht eine ~~Gleichung~~ Aeq. $\varphi(\theta_1) \sim 0$ dann und nur dann, wenn sie für alle conjugirten gleichfalls erfüllt ist.[239]

Daraus folgt zunächst, daß $1, \theta, \ldots, \theta^{n-1}$ eine Basis ist. Die ganzen algebraischen Zahlen von $K(\theta, \varepsilon, \pi)$ sind diejenigen, deren Mimimalgleichung in Bezug auf $\wp$ ganze Koeffizienten hat.[240]

Hensel erläuterte, wie man ein solches System analog zum zahlentheoretischen Fall erhält und charakterisierte es folgendermaßen:

> Man kann in $K(\theta, \varepsilon, \pi)$ stets ein Fundsyst[em] $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \ldots, \theta^{(\lambda)}$ ganzer algebraischer Zahlen so finden, dass alle und nur die ganzen algebraischen Zahlgrößen von $K(\theta, \varepsilon, \pi) \qquad \eta \sim u_1\theta^{(1)} + \cdots + u_\lambda\theta^{(\lambda)}$ und die Discriminante $D(\theta^{(i)}) = |\theta_k^{(i)}|^2$ ist dadurch charakterisiert, dass sie für Bereich von $\wp$ von möglichst niedriger Ordnung $\wp^\alpha$. [241]

Anschließend betrachtete er die ganzen algebraischen Zahlgrößen mod $\wp$. Unter den $p^{f\lambda}$ inkongruenten Zahlen mod $\wp$, nämlich $u_1\theta^{(1)} + \cdots + u_\lambda\theta^{(\lambda)}$ mit $u_i = v_0 + v_1\varepsilon + \cdots + v_{f-1}\varepsilon^{f-1}, v_j \in \{0, \ldots, p-1\}$, wählte Hensel wiederum eine derjenigen aus, die durch die minimale gebrochene Potenz von $\wp$ teilbar sind. Auch hier läßt sich (aufgrund der Irreduzibilität von $f(\theta)$) diese Potenz wieder aus dem Absolutglied der erfüllten Äquivalenz ablesen.

Ist dann $\pi_0$ eine der Zahlen, die die minimale Potenz von $\wp$ enthalten, so ist letztere $\wp^{\frac{1}{e_0}}$, wobei $e_0$ ein Teiler von $\lambda$ ist. Hensel führte dann einen Primdivisor $\wp_0$ ein, wobei $\eta \in K(\theta, \varepsilon, \pi)$ genau $\wp_0^{r_0}$ enthält, wenn es genau durch $\wp^{\frac{r_0}{e_0}}$ teilbar ist.[242]

**Kongruenzen modulo $\wp_0$** Als nächstes wählte Hensel aus dem Fundamentalsystem mod $\wp$ ein solches mod $\wp_0$ mit $f_0$ Elementen aus. Die Anzahl der modulo $\wp_0$ inkongruenten ganzen algebraischen Zahlen $u_1\theta^{(1)} + \cdots + u_f\theta^{(f_0)}$ (mit $u_i = v_0 + v_1\varepsilon + \cdots + v_{f-1}\varepsilon^{f-1}, v_j \in \{0, \ldots, p-1\}$) ist dann $p^{ff_0}$. Alle diese Zahlen erfüllen modulo $\wp$ die Kongruenz $x^{p^{ff_0}} - x \equiv 0 \quad (\wp)$ bzw. $x^{p^{ff_0}-1} - 1 \equiv 0 \quad (\wp)$. Hensel setzte fort:

> Unter ihnen gibt es auch solche, welche keiner niedrigeren Kongruenz genügen.[243] Es sei $\varepsilon_0$ eine solche, dann jede Zahl $\eta \equiv \varepsilon_0^r$ gehört also zu $K(\varepsilon_0)$.[244]

Eine Zahl gehört also zu $K(\varepsilon_0)$, wenn sie modulo $\wp_0$ einer Potenz von $\varepsilon_0$ kongruent ist. Mit dieser Bezeichnungsweise folgerte Hensel:

> Jede Zahl des Körpers $K(\varepsilon_0)$, welche der Congruenz $\eta^{p^f} - \eta \equiv 0$ [genügt], gehört dem Körper $K(\varepsilon)$ an.[245]
> Von den Einheiten des Körpers $K(\varepsilon_0)$ bilden die Einheiten des Bereichs $K(\varepsilon)$ einen Teilbereich oder Unterkörper.[246]

[239] VL 18 vom 7.7.1902, S. 37/3.
[240] Dies kann man an den Ausdrücken in $K(\varepsilon, \pi)$ ablesen.
[241] VL 18 vom 7.7.1902, S. 37/4. Die $u_i$ sind dabei ganz in $K(\pi, \varepsilon)$.
[242] Hensel nannte nur die Ergebnisse, da die Untersuchungen analog zu seiner früheren Darstellung verliefen, vgl. VL 18 vom 7.7.1902, S. 38/1.
[243] In VL 19 begründete Hensel dies länger.
[244] VL 18 vom 7.7.1902, S. 38/2, der letzte Halbsatz am Rand.
[245] Ist also einer Potenz von $\varepsilon$ kongruent für den Modul $\wp_0$, VL 18 vom 7.7.1902, S. 38/2. Hensel schrieb versehentlich zweimal 'gehört'.
[246] VL 19 vom 10.7.1902, S. 39/3, weiter "... wenn eine Zahl des Bereichs $K(\varepsilon_0)$ der Congruenz $x^{p^f} \equiv x$ genügt, so ist sie einer Zahl von $K(\varepsilon)$ congruent."

Dann erfüllt $\varepsilon_0$ die irreduzible Kongruenz

$$g(x) = (x - \varepsilon_0)(x - \varepsilon_0^{p^f}) \dots (x - \varepsilon_0^{p^{(f_0-1)f}}) \equiv 0 \bmod \wp_0$$

des Grades $f_0$, die als symmetrische Funktion in $\varepsilon_0, \varepsilon_0^{p^f}, \dots$ Koeffizienten in $K(\varepsilon)$ hat.

**Darstellungen, Modifikationen und Konjugationen** Hensel erhielt:

> Jede ganze Zahl von $K(\theta, \varepsilon, \pi)$ ist mod $\wp_0$ einer und nur einer Zahl $u_0 + u_1\varepsilon_0 + \dots + u_{f_0-1}\varepsilon^{f_0-1} = V$ congruent.[247]
> Jede Zahlgrösse des Körpers $K(\theta, \varepsilon, \pi)$ ist einer und nur einer Reihe $\eta \sim a_r\pi_0^r + a_{r+1}\pi_0^{r+1} + \dots$ für den Bereich von $\wp_0$ äquivalent; und diese Aequivalenz bleibt bestehen, wenn für $\varepsilon_0$ und $\pi_0$ ihre conjugirten setze.[248]
> Speziell bilden also die $e_0f_0$ Zahlen $1 \; \varepsilon_0 \dots \varepsilon_0^{f_0-1} \quad \pi_0 \quad \pi_0\varepsilon_0 \dots \pi_0\varepsilon_0^{f_0-1}, \dots \pi_0^{f_0-1} \dots \pi_0^{f_0-1}\varepsilon_0^{f_0-1}$ ein Fundamentalsystem mod $\wp$, also ist $e_0f_0 = \lambda$.[249]

Anschließend modifizierte Hensel wiederum die Entwicklungszahlen $\varepsilon_0$ und $\pi_0$: Im Moment erfüllt $\varepsilon_0$ eine irreduzible Kongruenz $f_0$-ten Grades $g(x) \equiv 0$ mod $\wp_0$ mit Koeffizienten in $K(\varepsilon)$.

> Kann dann wieder zu $\varepsilon_0$ Multiple von $\pi_0$ so zufügen, dass $g(\varepsilon_0) \sim 0 \mid \wp_0$ wird.[250]

Hingegen erfüllt $\pi_0$ bereits eine Äquivalenz, deren Koeffizienten in $K(\varepsilon_0, \varepsilon, \pi)$ jedoch noch nicht abbrechen.[251] Hensel konnte dann

> durch frühere Methoden aus $\pi_0$ äquivalente Zahl so ableiten, dass
>
> $$\psi_0(x) = x^{e_0} + \pi c_{e_0-1}x^{e_0-1} + \dots + \pi c_0 \sim 0 \quad \text{wird,}$$
>
> wo die $c_i$ abbrechende Reihen, also ganze algebraische Zahlen von $K(\varepsilon, \varepsilon_0, \pi)$ sind, und $c_0 \not\equiv 0$ mod $\wp$.[252]

Damit erhielt Hensel für jede Zahlgröße in $K(\theta, \varepsilon, \pi)$ eine Potenzreihe “$a_\varrho\pi_0^\varrho + a_{\varrho+1}\pi_0^{\varrho+1} + \dots$, wo $a_i$ zu $K(\varepsilon_0, \varepsilon)$ gehören.”[253] Zum Abschluß erwähnte Hensel, daß die konjugierten Reihen wiederum eine Zerlegung der erfüllten Äquivalenz in Linearfaktoren ermöglichen:

> Sehe aber, wenn $\eta$ irgend eine solche Zahl, und $\eta_1$ die zugehörige Potenzreihe, und sind $\eta_1 \quad \eta_2 \dots \eta_\lambda$ die $\lambda = ef$ conjugirten Reihen die entsteh[en], wenn $\varepsilon_0$ und $\pi_0$ die $ef$ conjugirten Werte gebe, und ist $G(y) \sim 0$ Aeq. des $ef = \lambda$-ten Grad, so ist auch hier $G(y) \sim (y - \eta_1) \dots (y - \eta_\lambda)$.[254]

**Der allgemeine Fall**

Nachdem Hensel seine Ergebnisse zu Beginn der VL 19 noch einmal zusammengefaßt hatte, kam er auf den allgemeinen Fall zu sprechen, in dem die Koeffizienten von $f(\theta)$ Potenzreihen in $K(\varepsilon, \pi)$ sind. Sein Ziel war zu “zeigen, dass auch dann die Wurzeln in gleicher Weise darstellbar.”[255]

---

[247] VL 18 vom 7.7.1902, S. 38/3.
[248] VL 18 vom 7.7.1902, S. 38/3. *Für den Bereich von* $\wp_0$ bedeutet nur, daß die dem Primdivisor $\wp_0$ entsprechenden Reihen betrachtet werden.
[249] VL 18 vom 7.7.1902, S. 38/3.
[250] VL 18 vom 7.7.1902, S. 38/3.
[251] Die Äquivalenz kommt analog zum früheren Fall durch die Entwicklung von $\frac{\pi_0^{e_0}}{\pi}$ zustande. Die Koeffizienten sind Reihen nach ganzen Potenzen von $\pi$, deren Koeffizienten zu $K(\varepsilon_0)$ gehören, vgl. VL 18 vom 7.7.1902, S. 38/4.
[252] VL 18 vom 7.7.1902, S. 38/4. Damit $\varepsilon_0$ selbst eine algebraische Zahl ist, müßte von dem modifizierten $\varepsilon_0$ zu einer algebraischen Wurzel der beschreibenden Äquivalenz übergegangen werden. Evtl. nahm Hensel an, dieser Schritt sei klar.
[253] VL 18 vom 7.7.1902, S. 38/4. Die zuvor vorkommenden $\pi$ sind dabei mit Hilfe von $\pi_0$ eliminiert worden.
[254] VL 18 vom 7.7.1902, S. 38/4. Die Konjugationen werden durch die $\theta_i$ induziert.
[255] VL 19 vom 10.7.1902, S. 40/2.

Dazu wies er nach, daß sich ein Näherungswert für die Lösung einer Näherungsgleichung schrittweise zu einer Lösung der eigentlichen Gleichung verfeinern läßt. Er setzte $f(x) \sim f_0(x) + \pi^M \overline{f}(x)$, faßte also in $f_0(x)$ alle Glieder von $f(x)$ bis zur $M-1$-ten Ordnung zusammen. Dann gilt $f'(x) \sim f_0'(x) + \pi^M \overline{f}'(x)$ und ebenso $f^{(r)} \equiv f_0^{(r)} \mod \pi^M$ für die weiteren Ableitungen.

Sei dann $f_0(x)$ wie oben dargestellt behandelt, $\wp_0$ der Primdivisor von $\wp$ und $x_0 = a_r\pi_0^r + \cdots + a_s\pi_0^s$ "eine Wurzel von $f_0(x) \sim 0$ und soweit verlängert, dass $f_0(x_0) \equiv 0 \mid \wp_0^M$ dann ist auch mindestens $f(x_0) \equiv 0 \mid \wp_0^M, f'(x_0) \equiv f_0'(x_0) \mid \wp_0^M$".[256]

Sei $\sigma$ die (endliche) Potenz von $\wp_0$, die in $f_0'(x_0)$ enthalten ist und $\mu > 2\sigma$.[257] Ist dann ein $x_0$ mit $f(x_0) \equiv 0 \mid \wp_0^\mu$ gegeben, so geht es darum, ein $\xi_0$ zu bestimmen, so daß $f(x_0 + \xi_0) \equiv 0 \mid \wp_0^{\mu+1}$ ist. Betrachtet man die Glieder der Taylor-Entwicklung

$$f(x_0 + \xi_0) = f(x_0) + \xi_0 f'(x_0) + \xi_0^2 \frac{f''(x_0)}{2!} + \dots$$

und wählt entsprechend der ersten beiden Glieder $\xi_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, so ist $\xi_0$ von der Ordnung $\mu - \sigma$ und alle höheren Glieder sind mindestens von der Ordnung $k(\mu - \sigma) > \mu$, da $\mu > 2\sigma$ $(k = 2, 3, \dots)$. Dieser Prozeß läßt sich fortsetzen und man erhält:

> Ist $f(x) \sim f_0(x) + \pi^M \overline{f}(x)$ und ergibt die Auflösung von $f_0(x) \sim 0$ für $x$ eine Darstellung als Potenzreihe innerhalb $K(\varepsilon_0, \pi_0)$, so wird auch $f(x)$ durch eine Potenzreihe $a_r\pi_0^r + \dots$ befriedigt, wenn nur $M$ groß genug habe, größer als die Ordnungszahl der Diskriminante wähle.[258]

Hensel ging also insbesondere nicht darauf ein, welcher Zusammenhang zwischen den Lösungspotenzreihen für verschiedenes $M$ besteht.[259]

Die nächsten Festlegungen und Behauptungen traf Hensel strikt analog zum nicht-relativen Fall: Ist $F(x) \sim f(x)g(x)h(x) \quad [\wp]$, so schrieb er

$$F(x) \sim (x - \gamma_1)\dots(x - \gamma_\lambda) \cdot (x - \delta_1)\dots(x - \delta_\mu) \cdot (x - \zeta_1)\dots(x - \zeta_\nu)$$

und ordnete $\wp$ drei Primdivisoren $\wp_1, \wp_2$ und $\wp_3$ zu. Deren in $x$ enthaltene Potenz kann an den Anfangsgliedern der entsprechenden Potenzreihenentwicklungen abgelesen werden kann.[260] Der Primfaktor $\wp_1$ besitzt die Relativordnung $e_1$, wenn $\pi_1^{e_1} \sim \pi$ und den Relativgrad $f_1$, wenn die algebraische Zahl $\varepsilon_1$ in Bezug auf $\varepsilon$ vom Grad $f_1$ ist. Es ist $\wp \sim \wp_1^{e_1}\wp_2^{e_2}\wp_3^{e_3}$ und:

> Jede algebraische Zahl und jeder Divisor von $K(\alpha)$ zerfällt innerhalb von $K(\theta)$ auf eine einzige Art in ein Product von Primdivisoren, welche vollständig ebenso wie früher characterisiert sind.[261]

Weiter kann man Zahlen in $K(\theta)$ konstruieren, die "für den Bereich beliebig gegebener Primdivisoren beliebig vorgegebene Entwicklungen haben."[262]

Hensel äußerte sich nicht zu dieser Konstruktion. Vermutlich wollte er analog zum nicht-relativen Fall zu

[256] VL 19 vom 10.7.1902, S. 40/2, einer der Striche ist ergänzt worden. Wie angekündigt sind die Bezeichnungen aus VL 18 beibehalten. Auch Hensel änderte sie vermutlich erst nachträglich.

[257] VL 19 vom 10.7.1902, S. 40/2. $N(f_0'(x_0)) = D(f_0(x))$ kann nur eine endliche Potenz von $\wp_0$ enthalten.

[258] VL 19 vom 10.7.1902, S. 40/3. Gemeint ist die Ordnungszahl der Diskriminante von $f(x)$.

[259] Er sprach diese Frage erstmalig in [55, 1909] an.

[260] Dazu werden die jeweiligen Entwicklungen für $\theta$ in die rationale Funktion $x = \varphi(\theta)$ eingesetzt, wobei die Bestandteile der Potenzreihen aus $f_0$ etc. abgeleitet wurden. Hensel äußerte sich dazu nicht.

[261] VL 19 vom 10.7.1902, S. 40/3.

[262] VL 19 vom 10.7.1902, S. 40/4.

den verschiedenen Primdivisoren einer Primzahl Hilfszahlen konstruieren, die modulo genau einem der Primdivisoren äquivalent Eins, modulo der anderen aber äquivalent Null sind. Mit Hilfe der so konstruierten Elemente läßt sich ein Fundamentalsystem modulo $\wp$ von $K(\theta)$ ableiten:

> Es giebt stets ein Fundamentalsystem modulo $\wp$ für alle ganzen algebraischen Zahlen von $K(\theta)$ $\theta^{(1)}\ \theta^{(2)} \dots \theta^{(n)}$ und ist dadurch charakterisiert, dass für den Bereich von Primtheiler $\wp$ von $K(\alpha)$ äquivalent Fundamentalsystem $\gamma^{(1)} \dots \gamma^{(\lambda)}, \delta^{(1)} \dots \delta^{(\mu)}, \zeta^{(1)} \dots \zeta^{(\nu)}$ und es ist
>
> $$\left|\theta_K^{(i)}\right|^2 = \left|\gamma_{K_1}^{(i_1)}\right|^2 \left|\delta_{K_2}^{(i_2)}\right|^2 \left|\zeta_{K_3}^{(i_3)}\right|^2 .$$ [263]

Da Hensel mit endlichen Anfangsstücken arbeitete, kommen hierbei nur Reihen in algebraischen Zahlen vor. Insbesondere wählte er in dieser Theorie keine Wurzeln für Äquivalenzen, deren Koeffizienten nicht abbrechen.

Hensel definierte die Verzweigungszahl $\overline{e}_1$ von $\wp_1$ wiederum so, daß die Ordnungszahl des $\wp_1$-Anteils in der Diskriminante über $K(\alpha)$ gerade $f_1(\overline{e}_1 - 1)$ ist bzw. der $\wp_1$-Anteil der Diskriminante äquivalent zu $N_\alpha(\wp_1^{\overline{e}_1 - 1})$.

**Die Zusammensetzung der Diskriminante** Zum Abschluß seiner Untersuchungen über Teilbarkeit leitete Hensel noch ab, wie sich die absolute Diskriminante einer algebraischen Erweiterung aus den Diskriminanten zweier Teilerweiterungen zusammensetzt, wenn man jeden Primdivisor einzeln untersucht. Sei dazu $K(\theta)$ ein Körper der Ordnung $mn$ und $k$ ein Primdivisor des Grades $F$, der Ordnung $\varepsilon$ und der Verzweigungsordnung $\overline{\varepsilon}$. Ist dann $K(\alpha)$ ein Unterkörper der Ordnung $m$, $\wp$ ein Primteiler von $K(\alpha)$, der ein Vielfaches von $k$ ist und dessen Grad $f$, dessen Ordnung $e$ und dessen Verzweigungsordnung $\overline{e}$ ist, so seien mit $f_0, e_0, \overline{e_0}$ Grad, Ordnung und Verzweigungsordnung von $k$ in Bezug auf $K(\alpha)$ bezeichnet. Dann gilt $F = ff_0, \varepsilon = ee_0$ und die Aufgabe ist, $\overline{\varepsilon}$ in Abhängigkeit von $e, e_0, \overline{e}, \overline{e_0}$ zu bestimmen.

Hensel nutzte seine Überlegungen zu allen drei Erweiterungen: In $K(\theta)$ kann man ein Fundamentalsystem für den Modul $k$ aus einem Fundamentalsystem bezüglich $k$ über $K(\alpha)$ und einem bezüglich $\wp$ über $K(1)$ zusammensetzen:

> Dazu folgende einfache Überlegung: Sei $\lambda_0 = e_0 f_0$, $\lambda = ef$. Sei $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(\lambda_0)}$ Fundamentalsystem mod $k$ für $K(\alpha)$ und $\alpha^{(1)} \dots \alpha^{(\lambda)}$ Fundamentalsystem mod $\wp$ für $K(1)$. Dann jede ganze Grösse von $K(\theta)$ für Bereich von $k$ auf eine einzige Weise in Form $u_1\theta^{(1)} + \dots + u_{\lambda_0}\theta^{(\lambda_0)}$ wo jedes $u = v_1\alpha^{(1)} + \dots v_\lambda\alpha^{(\lambda)}$ d.h. die $\lambda\lambda_0$ Elemente $\alpha^{(i)}\theta^{(i_0)}$ $(i = 1, 2, \dots \lambda, i_0 = 1, 2 \dots \lambda_0)$ bilden Fundamentalsystem für Bereich zu $k$ für $K(\theta, \alpha)$. Also Diskriminante $|\alpha^{(i)}\theta^{(i_0)}|^2$ ist genau durch $N(k^{\overline{\varepsilon}-1}) = p^{F(\overline{\varepsilon}-1)}$ theilbar.[264]

Da sich diese Determinante aus den Determinanten der einzelnen Systeme zusammensetzen läßt, erhielt Hensel durch Zusammensetzung bzw. Umrechnung der Ordnungszahlen bezüglich $k$ schließlich "$\overline{\varepsilon} = e_0(\overline{e} - 1) + \overline{e}_0$."[265]

Dieses Ergebnis besagt, daß sich die $k$-Anteile der Diskriminante wie gewünscht addieren: Von der unteren Erweiterung kommt der Diskriminantenanteil $\overline{e} - 1$, der mit $e_0$ multipliziert wird, weil es ja um $k \sim \wp^{e_0}$ geht. Dazu kommt die Verzweigungsordnung der oberen Erweiterung. Insbesondere gilt $\overline{\varepsilon} = \overline{e}_0$, wenn $\wp$ nicht verzweigt war.

[263] VL 19 vom 10.7.1902, S. 40/4. Die Koeffizienten sind dabei für den Bereich von $\wp$ ganz in $K(\alpha)$.
[264] VL 20 vom 14.7.1902, S. 42/1.
[265] VL 20 vom 17.7.1902, S. 42/2. Die vorhergehende Gleichung in den Exponenten ist $F(\overline{\varepsilon}-1) = ff_0e_0(\overline{e}-1) + ff_0(\overline{e}_0 - 1)$.

### 5.3.3 Der Abschluß - Zusammenspiel von Teilbarkeit und Größe

Einen interessanten Hinweis darauf, wie Hensel seine Objekte am Ende der Vorlesung betrachtete, gibt die folgende in der vorletzten Vorlesung beginnende Überlegung für ein Element in $y \in K(\xi)$:

> Will jetzt Darstellung der Divisorenzerlegung geben, die auch die Grössendarstellung umfasst. Betrachte Grundgleichung $f(x) = 0$. Sah zerfällt für den Bereich jeder Primzahl in $\nu$ für Bereich $p$ irred Factoren:
>
> $$f(x) \sim \varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\varphi_\nu(x) \qquad [p].$$
>
> Dasselbe ist auch der Fall, wenn ihrer Grösse nach betrachte, zerfällt da in $r = r_1 + r_2$ Factoren ersten und zweiten Grades und will daher dieselbe Aequivalenz ansetzen und als Bereich $[p_\infty]$ dazusetzen, als Analogie mit $p_\infty$ bei alg[ebraischen] Funct[ionen] einer Variablen.
> Verteile nun die $n$ Wurzeln $x_1x_2\ldots x_n$ *willkürlich*, aber fest so, dass jedem dieser Factoren so viele Wurzeln zuordne, als sein Grad beträgt.[266]

Man kann also bei der Zuordnung der Wurzeln zu den Faktoren nichts falsch machen.

Für jeden der Faktoren $\varphi(x) \sim x^r + a_1x^{r-1} + \cdots + a_r$ sind die zugeordneten Wurzeln nach Potenzen von $\pi \sim p^{\frac{1}{e}}$ entwickelbar, wobei $\pi$ und $e$ wie oben geeignet bestimmt werden. Ist dann $f = \frac{r}{e}$, so gilt: "$a_r$ ist genau durch $p^{\lambda f}$ theilbar, wenn alle [Entwicklungen der] $x$ durch $p^{\frac{\lambda}{e}}$ theilbar [sind]."[267]

Hensel erinnerte an die Definition der Teilbarkeit durch die Primdivisoren und führte entsprechende Ordnungszahlen ein: Jeder der Faktoren von $f(x)$ für den Bereich von $p$ entspricht einem Primdivisor $\wp$ und $y \in K(\xi)$ ist durch $\wp^\lambda$ teilbar, wenn $a_r$ durch $p^{\lambda f}$ teilbar ist. Dann erhält $y$ die Ordnungszahl $\lambda$ in Bezug auf $\wp$.
Im Falle von $p_\infty$ traf er die Festsetzung $a_r = \varepsilon e^{2\lambda} = |y|^2$ und damit $\lambda = \ln|y|$.

In der letzten Vorlesung faßte Hensel die Ergebnisse einheitlich zusammen und definierte Ordnungszahlen, die die gewünschte Gleichung $\sum[\alpha] = 0$ ermöglichen. Zunächst hob er für "die Zahlen des natürlichen Bereichs" hervor,[268] daß sie für den Bereich einer beliebigen Primzahl äquivalent einer wohlbestimmten Reihe sind und eine Darstellung $\alpha = \varrho p^r = \varrho e^{\overline{r}}$ haben, wobei $\varrho$ eine Einheit mod $p$ ist und $\overline{r} := \ln p^r = [\alpha]$ die Ordnungszahl definiert. Für den Bereich von $p^{(\infty)}$ betrachtete er $\alpha = \varrho e^{-r}$,[269] wobei $\varrho$ eine Einheit für den Bereich von $p^{(\infty)}$ ist, und setzte als Ordnungszahl $r = -\ln|\alpha| = \ln|\frac{1}{\alpha}| = [\alpha]$.
Eine algebraische Gleichung $F(x) = x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n = 0$ kann für den Bereich jeder Primzahl $p$ eindeutig in ein Produkt irreduzibler Faktoren zerlegt werden, "deren Koeffizienten Potenzreihen in $p$" und deren Grade $\lambda_i = e_if_i$ sind.[270] Dies gilt auch für den Bereich von $p^{(\infty)}$ mit "Potenzreihen mit $\frac{1}{10}$" als Koeffizienten.[271] In ihm sind noch $e_i$ und $f_i$ festzulegen und Hensel wählte $e_i = 1$ und $f_i = 1$ oder 2 je nach dem Grad des irreduziblen Faktors.

[266] VL 23 vom 28.7.1902, S. 50/2, Hervorhebung B.P.
[267] VL 23 vom 28.7.1902, S. 50/3, Hensel schrieb versehentlich "ist". Vermutlich meinte er, es sei klar, daß die Teilbarkeit durch Potenzen von $p$ anhand der Entwicklungen bestimmt werden soll.
[268] Also der rationalen Zahlen, VL 24 vom 31.7.1902, S. 51/1.
[269] Die Bezeichnung $p^{(\infty)}$ ist neu.
[270] VL 24 vom 31.7.1902, S. 51/2.
[271] VL 24 vom 31.7.1902, S. 51/2.

Sei ein für den Bereich von $p$ irreduzibler Faktor $f(x) = x^\lambda - a_1 x^{\lambda-1} + \cdots \pm a_\lambda$ gegeben. Für die Wurzeln $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\lambda)$ der Äquivalenz $f(x) \sim 0$ definierte Hensel:

> Dann sagen wir diese Zahlgrössen besitzen für den Bereich von $p$ die Ordnungszahl $\overline{r}$ wenn $\alpha \sim \varrho p^r \sim \varrho e^{\overline{r}}, \overline{r} = r^{\ln p} = [\alpha]$ und $\varrho$ eine algebraische Einheit.[272]

Dann folgt aus der Irreduzibilität von $f(x)$, daß $[\alpha] = [a_\lambda^{\frac{1}{\lambda}}]$ und daher auch

> $[\alpha_1] + [\alpha_2] + \cdots + [\alpha_\lambda] = \lambda[a_\lambda^{\frac{1}{\lambda}}] = [a_\lambda]$. Daraus folgt $[\alpha_1]_p + \cdots + [\alpha_n]_p = [A_n]_p$[273]

Benutzt man für den Bereich von $r^{(\infty)}$ die obige Definition $[\alpha] = \ln|\frac{1}{\alpha}|$, so gilt auch hier $[\alpha_1] + [\alpha_2] = [a_2]$ bzw. im linearen Fall $x - a = 0$ trivialerweise $[\alpha] = [a]$, und damit $\sum[\alpha_i]_\infty = [A_n]_\infty$.

Hensel leitete sein finales Resultat ab, indem er das Ergebnis auf das Produkt der irreduziblen Faktoren verallgemeinerte:

> Also ist, wenn man die zweite Definition der Ordnungszahl adoptirt für jede complexe Zahl $\sum[\alpha_1] + \cdots + [\alpha_n] = \sum[\alpha] = \sum[A_n] = 0$!!!
> Es sei nun $\eta$ eine beliebige Zahl des Körpers so zerfällt die Gleichung für $\eta$ für jeden Bereich $p$ oder $p^{(\infty)}$ in genau derselben Weise, und ihre Ordnungszahlen sind auch dieselben und es ist genau ebenso $\sum[\eta] = 0$ für jede algebraische Zahl.[274]

Dabei ist $\sum[\alpha_1] + \cdots + [\alpha_n] =: \sum[\alpha]$ als Definition zu lesen. Die Zuordnung der algebraischen Wurzeln zu den jeweiligen Faktoren für den Bereich von $p$ dient also dazu, aus den Konjugierten die richtigen Beträge für diese Summe abzuleiten.

## 5.4 Neuformulierung 1904: *Neue Grundlagen der Arithmetik*

Der Inhalt dieser Arbeit entspricht an vielen Stellen dem des ersten Teils der Vorlesung von 1902.[275] Umso bemerkenswerter ist die neue Form, die Hensel seiner Theorie gab. Ein Hauptgedanke dabei war, den Akzent auf die neue Darstellung zu legen, die insbesondere für die negativen Zahlen qualitativ neuartig war.[276] Weiter führte Hensel statt einer Äquivalenz diesmal einen neuen Gleichheitsbegriff ein.[277]

Hensel begann seine Arbeit mit einer Einleitung, in der er sowohl für die Legitimität seiner Theorie argumentierte als auch die Hoffnung zum Ausdruck brachte, daß man mit ihrer Hilfe Aussagen über transzendente Zahlen zeigen könne. Im anschließenden ersten Paragraphen erläuterte er die Sichtweise für den Bereich von $p$ und motivierte die Betrachtung unendlicher Potenzreihen als *Zahlgrößen für den Bereich von p* (modern: der $p$-adischen Zahlen). Im zweiten Abschnitt führte er die vier Grundoperationen

[272] VL 24 vom 31.7.1902, S. 51/2. Die Wurzeln der Äquivalenz müssen dabei keine algebraischen Zahlen sein.
[273] VL 24 vom 31.7.1902, S. 51/2 und 51/3.
[274] VL 24 vom 31.7.1902, S. 51/3. Es ist natürlich nichts über transzendente Zahlen gesagt. Hensel begann anschließend noch mit multiplikativen Darstellungen für den Bereich von $p$.
[275] Dies betrifft vor allem die Konstruktionen, Zuordnungen etc. Es soll hier nicht darauf eingegangen werden, inwiefern es sich um die gleiche Theorie bzw. die gleiche mathematische Bedeutung handelt bzw. handeln könnte.
[276] Daher widerspricht die hier vertretene Interpretation Peter Ullrich, der formulierte: "Daß er im Laufe dieser Entwicklung eine neue Art von Zahlen oder zumindest doch Zahlendarstellungen eingeführt hatte, irritierte Hensel dabei anscheinend recht wenig," [Ullrich, 1999, 135]. Es scheint vielmehr, als ob Hensel die neuen Zahlendarstellungen gerade als seine Leistung ansah.
[277] Technisch erfolgte diese Einführung wie die der reellen Zahlen und der Gleichheit zwischen ihnen im Zuge der Arithmetisierung, z.B. bei Cantor oder Weierstraß. Zur Arithmetisierung vgl. [Petri/Schappacher, 2007] und die dort zitierte Literatur.

an diesen neuen Objekten systematisch ein. Mit deren Hilfe entwickelte Hensel im dritten Abschnitt die Theorie der Gleichungen mit $p$-adischen Koeffizienten so weit, daß er im abschließenden vierten Abschnitt einen konstruktiven Beweis für die eindeutige Zerlegung in irreduzible Polynome geben konnte (modern gesprochen: ein Version von Hensels Lemma).

**Die Einleitung**

Da dieser Textteil entscheidend für die Position ist, die Hensel zu den neuen Objekten einnahm, wird er Satz für Satz kommentiert:

> In der Arithmetik sind die positiven ganzen Zahlen und nur sie durch die Natur gegeben; die Null, die negativen, die gebrochenen, die irrationalen und die imaginären Zahlen sind Symbole, welche man hinzugenommen hat, um in dem erweiterten Gebiete alle Rechnungsoperationen ausführen zu können.[278]

Mit diesem Satz stellte Hensel sich eindeutig in die Kroneckersche Tradition, wonach die positiven ganzen Zahlen natürlich sind. Während Kronecker aber schon die Hinzunahme von Symbolen für die negativen und die gebrochenen Zahlen problematisierte, sah Hensel diese Hinzunahme hier als unproblematisch an.[279]

> In welcher Weise man diese neu eingeführten Symbole bezeichnet, ist gleichgiltig.[280]

Zahlen sind also Symbole, die verschieden bezeichnet werden können. Vermutlich meinte Hensel, daß die Zahlen als mathematische Objekte durch die Forderungen der Operationen bereits bestimmt sind, aber noch verschiedene Bezeichnungen zulassen:

> Ich möchte in den folgenden Betrachtungen eine von der gewöhnlichen verschiedene Darstellung *dieser* Zahlen einführen [...][281]

Die Bezeichnung erfolgt also durch eine Darstellung.

> [...] und zugleich die aus ihr folgenden neuen Prinzipien der Arithmetik zur Begründung einer neuen Theorie der algebraischen Zahlen benutzen.[282]

Die neue Darstellung der Zahlen gibt eine so grundlegend neue Richtung vor, daß sie weitere Untersuchungen leiten kann. Hensel explizierte die angesprochenen Prinzipien nicht, formulierte aber die entsprechenden Parallelen in der Nachfolgearbeit [49, 1905].[283]

> Ich bemerke dabei aber, daß man auf diesem Wege auch Mittel für die arithmetische Untersuchung der transzendenten Zahlen erhält, insbesondere ein Kriterium dafür, ob eine Zahl algebraisch oder transzendent ist; denn die vorliegenden Untersuchungen ergeben zum ersten Male eine notwendige Bedingung dafür, daß eine vorgelegte Zahl algebraisch und nicht transzendent ist, und zwar stimmt dieselbe wörtlich mit dem *Cauchy-Puiseux*schen Kriterium für die algebraischen Funktionen einer Variablen überein.[284]

Hensel behauptete also, die transzendenten Zahlen arithmetisch behandeln zu können. Die von ihm nur angedeutete notwendige Bedingung besagt, daß eine algebraische Zahl im Bereich jeder Primzahl algebraischen Charakter haben muß. (Eine Zahl, die diese Bedingung nicht erfüllt, ist transzendent.)

278 [47, 1904, 51].

279 Damit folgte Hensel dem Vorgehen in Weierstraß' Grundvorlesung. Eine Mitschrift einer solchen Vorlesung (vermutlich aus dem Wintersemester 1882/83, vgl. [Petri/Schappacher, 2007, 352]) in Hensels Handschrift liegt in der Bibliothek des mathematischen Instituts (IRMA) in Straßburg. Für technische und polemische Details der Kroneckerschen Ausführungen vgl. ebenfalls [Petri/Schappacher, 2007].

280 [47, 1904, 51].

281 [47, 1904, 51]. Hervorhebung B.P.

282 [47, 1904, 51].

283 Vgl. den Abschnitt 5.5.

284 [47, 1904, 51].

### 5.4.1 Betrachtungen in Bezug auf $p$

Nach Fixierung einer Primzahl $p$ definierte Hensel zunächst die *Ordnungszahl* einer ganzen positiven Zahl $A$ *in Bezug auf* $p$ als $\alpha$, wenn $a_\alpha$ der erste von Null verschiedene Koeffizient in der eindeutigen Darstellung

$$(1.) \qquad A = a_\alpha p^\alpha + a_{\alpha+1}p^{\alpha+1} + \cdots + a_\varrho p^\varrho \qquad (a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\})$$

ist. Eine Zahl der Ordnungszahl Null heißt *Einheit modulo p* und man erhält eine eindeutige Darstellung $A = p^\alpha E$, wobei $\alpha$ die Ordnungszahl von $A$ und $E$ eine Einheit modulo $p$ ist. Für die Darstellung $B = \sum_{i=0}^{\varrho} b_i p^i$ schrieb Hensel auch $B = b_0, b_1 b_2 \ldots b_f$ "nach Analogie der Dezimalbrüche",[285] da die ersten Ziffern dieser Darstellung bei der Untersuchung in Bezug auf $p$ die wichtigsten sind:

> Bei der Untersuchung einer Zahl $A$ in bezug auf ihr Verhalten für die Primzahl $p$ spielt ihre absolute Größe eine ganz nebensächliche Rolle; dagegen ist es von besonderer Wichtigkeit, welche Potenz von $p$ sie als Faktor enthält, und welches ihre Anfangsglieder in der Darstellung (1.) sind.[286]

Hensel illustrierte seine Sichtweise durch ein Beispiel für Untersuchungen, in denen zwei sehr verschieden große Zahlen austauschbar sind:

> Fügt man z.B. zu der Zahl $13 = 3 + 2 \cdot 5$ das Glied $4 \cdot 5^{10}$ hinzu, so kann die so sich ergebende sehr große Zahl $13 + 4 \cdot 5^{10}$ in allen Kongruenzen für eine Potenz $5^h$ als Modul, deren Exponent $h \leq 10$ ist, unbedenklich für 13 gesetzt werden und umgekehrt. Für alle derartigen Untersuchungen sind also die beiden Zahlen $3, 2$ und $3, 2000000004$ äquivalent, genau ebenso, wie die beiden gleich bezeichneten dekadischen Dezimalbrüche äquivalent sein würden, wenn keine höhere Genauigkeit als die einer Einheit der neunten Dezimalstelle gefordert wird, oder wenn Zahlen von der Größenordnung $\left(\frac{1}{10}\right)^{10}$ vernachlässigt werden.[287]

Dabei sind die Kongruenzen nach Primzahlpotenzen mit kleinen Exponenten grundlegend, während die mit den höheren Exponenten auch weniger wichtige Unterschiede sichtbar machen.
Die hier angesprochene Redeweise, reelle Zahlen äquivalent zu nennen, wenn sie sich um weniger als eine vorgegebene Genauigkeit unterscheiden, stammt von Kronecker.[288]

Anschließend führte Hensel eine neue *Ordnung* der Zahlen ein, die der Betrachtungsweise "für den Bereich von $p$" Rechnung trägt:[289]

> Von zwei Zahlen $B = b_0, b_1 b_2 \ldots$ und $C = c_0, c_1 c_2 \ldots$ soll $B$ für den Bereich von $p$ größer als $C$ heißen, wenn von den Differenzen $b_0 - c_0, b_1 - c_1$ die erste nicht verschwindende positiv ausfällt.[290]

Die Bezeichnung hierfür ist $B > C \quad (p)$. Um diese Ordnung noch greifbarer zu machen, definierte Hensel eine rationale Maßzahl, für die die unwichtigeren Ziffern einen kleineren Beitrag leisten. Für $B = b_0, b_1 b_2 \ldots$ ist diese definiert als $\overline{B} := \sum_{i=0}^{\varrho} b_i g^{-i}$ ( mit einem $g > p$ ganz).[291] Dann ist diejenige Zahl größer für den Bereich von $p$, die die größere Maßzahl hat.
Die Folge der $B_k = \sum_{i=0}^{k} b_i p^i$ nannte Hensel *die Näherungswerte von B für den Bereich von p*,

[285] [47, 1904, 52].
[286] [47, 1904, 52].
[287] [47, 1904, 52].
[288] Für den Kontext dieses Konzepts vgl. [Petri/Schappacher, 2007, 358] und [Kronecker, 1891, 266] bzw. [Kronecker, 1888, 90].
[289] [47, 1904, 52].
[290] [47, 1904, 52].
[291] Für $p = 2, 3, 5, 7$ wählte Hensel $g = 10$.

> weil man sie bei allen Untersuchungen für $B$ setzen kann, bei denen Vielfache von $p^{k+1}$ vernachlässigt werden dürfen. Auf Grund der neu definierten Größenanordnung unterscheiden sich dann die Näherungswerte $B_0, B_1, B_2 \ldots$ der Reihe nach um immer kleiner werdende Zahlen von $B$.[292]

Für jede Betrachtung modulo $p^{k+1}$ kann man also den Näherungswert $B_k$ benutzen.
Die neu definierte Ordnung ist ein Teil von Hensels Strategie, eine für $p$ spezifische, aber trotzdem umfassende Sichtweise vorzustellen. Auch Hilbert hatte in den *Grundlagen der Geometrie* eine neue Ordnung auf Elementen definiert, die er ebenfalls Zahlen nannte.[293]
Hensels Schritt, die natürlichen Zahlen neu zu ordnen, ist ähnlich abstrakt aber etwas einschneidender, weil er an einem elementareren Objekt durchgeführt wird.

#### Operationen mit den neuen Darstellungen für den Bereich von $p$

Bevor er die Operationen mit den neuen Darstellungen vorstellte, betrachtete Hensel nichtreduzierte Darstellungen $B = \bar{b}_0 + \bar{b}_1 p + \cdots + \bar{b}_\sigma p^\sigma$, wobei die $\bar{b}_i$ beliebige positive ganze Zahlen sind. Er erläuterte die linearen Bestimmungsgleichungen, die auf die eindeutig bestimmte reduzierte Form führen. Das Fazit seiner Überlegungen war:

> Schreibt man $B$ in der abgekürzten Form $B = \bar{b}_0, \bar{b}_1 \bar{b}_2 \ldots$ so hat man von links nach rechts gehend jede Ziffer durch ihren kleinsten Rest modulo $p$ zu ersetzen und die nächste Ziffer um $\varepsilon_i$ zu vermehren, wenn bei der vorigen $\varepsilon_i p$ fortgelassen wurde.[294]

Daran anschließend erläuterte er die Addition und Multiplikation von reduzierten Zahlen, die genauso erfolgt wie bei gewöhnlichen Dezimalbrüchen, nur das von links bzw. vorn begonnen wird: Die erhaltene nichtreduzierte Zahl wird in eine eindeutig bestimmte reduzierte Zahl umgewandelt. Als Ergebnis formulierte Hensel:

> Die Ordnungszahl eines Produkts ist gleich der Summe der Ordnungszahlen seiner Faktoren.
> Die Summe oder das Produkt beliebig vieler Zahlgrößen ergibt wieder eine Zahlgröße derselben Art.[295]

Hier bezeichnete Hensel ganze positive Zahlen als 'Zahlgrößen'. Es scheint, als habe er in der gesamten Arbeit 'Zahl' und 'Zahlgröße' synonym benutzt.
Die Einführung der weiteren Operationen (Subtraktion und Division) begann Hensel mit dem Hinweis, daß sich das Resultat einer solchen Operation möglicherweise "nicht in dem bis jetzt definierten Bereiche" findet,[296] so daß man gezwungen sei, "denselben in geeigneter Weise zu erweitern."[297]
Unter der Differenz $A - B$ verstand Hensel eine "reduzierte Zahlgröße $C = c_0, c_1 c_2 \ldots$, welche der Bedingung B+C=A" genügt,[298] unter dem Quotient $\frac{A}{B}$ eine Zahlgröße $D$, für die $A = BD$ ist.
Er erläuterte zuerst das Verfahren der Subtraktion und anschließend die Bedingungen ihrer (eindeutigen) Ausführbarkeit:

> Diese Operation ist immer ausführbar und ergibt ein eindeutig bestimmtes Resultat, wenn die ganze Zahl $A$ im gewöhnlichen Sinne des Wortes größer ist, als die ganze Zahl $B$ oder ihr gleich ist.[299]

[292] [47, 1904, 54]. Hierfür würde die Ordnungszahl ausreichen.
[293] [Hilbert, 1899, 48], für eine nicht-archimedische Geometrie. Hensel hatte im Sommersemester 1902 auch Vorlesungen über die Axiome der Geometrie gehalten.
[294] [47, 1904, 54].
[295] [47, 1904, 55].
[296] [47, 1904, 56]. Es geht um den Bereich von $p$, also die neue Sichtweise auf die natürlichen Zahlen.
[297] [47, 1904, 56].
[298] [47, 1904, 56].
[299] [47, 1904, 57]. Auch die Subtraktion erfolgt wie bei gewöhnlichen Dezimalbrüchen, wobei von links begonnen wird.

Anderenfalls müsse das "Gebiet der positiven ganzen Zahlen in jedem Falle erweitert werden."[300]

Hensel argumentierte, die gewöhnliche Erweiterung, bei der man "jeder Zahl $A$ ein *Symbol* $A' = -A$ zuordnet, welches durch die Gleichung $A + A' = 0$ definiert wird", würde

> bei der Untersuchung der Zahlen in ihrem Verhältnis zu der Primzahl $p$ eine nicht naturgemäße Anordnung aller Zahlensymbole herbeiführen und die Einsicht in die hier geltenden Gesetze wesentlich erschweren.[301]

Hensel wollte daher "das Gebiet der positiven ganzen Zahlen in anderer Weise erweitern" und nachweisen, "daß in diesem größeren Gebiete zunächst die vier elementaren Rechenoperationen ohne jede Beschränkung ausgeführt werden können und stets zu eindeutig bestimmten Resultaten führen."[302]
Zur Motivation zeigte er, daß es stets möglich ist, $c_i \in \{0, \dots p-1\}$ zu bestimmen, so daß
$A - B \equiv C_\sigma = \sum_{i=0}^{\sigma} c_i p^i \pmod{p^{\sigma+1}}$ gilt.

> Die Zahl $C_\sigma$ würde also nach der auf [S. 51] gegebenen Definition ein Näherungswert einer durch die Gleichung $A - B = C$ definierten Zahlgröße sein.[303]

Zur Rechtfertigung seines weiteren Vorgehens beschrieb er die gewöhnliche Einführung der irrationalen Zahlen und speziell der Zahl $\pi$ folgendermaßen:

> Untersucht man die Zahlen nicht in bezug auf ihr Verhalten modulo $p$, sondern wie gewöhnlich in bezug auf ihre Größe, so wird man gezwungen, sogenannte *irrationale* Zahlen einzuführen; so definiert man z.B. die Zahl $\pi$ durch den unendlich fortgesetzten Dezimalbruch $\pi = 3,14159265\dots$, weil man ein Mittel kennt, seine Ziffern beliebig weit so zu berechnen, daß er der für $\pi$ geltenden Definitionsgleichung mit jeder vorgegebenen Genauigkeit genügt.[304]

Hieran schloß Hensel die Definition einer *Zahlgröße für den Bereich von* $p$:

> In derselben Weise wollen wir den Bereich der positiven ganzen Zahlen erweitern, indem wir jede begrenzte oder unbegrenzte Reihe mit modulo $p$ reduzierten ganzen Koeffizienten $C = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \cdots = c_0, c_1 c_2 \dots$ als *eine Zahlgröße für den Bereich von* $p$ definieren, wenn eine Vorschrift existiert, ihre Koeffizienten so weit zu berechnen, als man nur immer will.[305]

In diesem Bereich liegen nicht nur alle Differenzen, sondern auch alle Quotienten ganzer Zahlen, solange der Divisor nicht durch $p$ teilbar ist. Hensel zeigte, daß auch hier das Rechnen parallel zum Rechnen mit Dezimalbrüchen erfolgen kann.

### 5.4.2 Operationen mit den neuen Zahlgrößen

#### Gleichheit und Definition über Grenzwerte

Der zweite Paragraph enthält die Übertragung der für die positiven ganzen Zahlen gewonnenen Konzepte auf die neu eingeführten Zahlgrößen für den Bereich von $p$, wobei letztere jetzt auch als "Zahlen" bezeichnet werden.

[300] [47, 1904, 57].
[301] Beide Zitate [47, 1904, 57]. Verbände man mit der Einführung von $-A$ die gewöhnliche Anordnung, so wären alle negativen Zahlen von den positiven isoliert.
[302] Beide Zitate [47, 1904, 57].
[303] [47, 1904, 57f].
[304] [47, 1904, 58].
[305] [47, 1904, 58]. Durch diese im Berliner Umfeld übliche (schwache) Konstruktivitätsforderung erhält man modern gesprochen *nicht* ganz $\mathbb{Q}_p$, vgl. das Ende von 1.2.2.

Auch ein solches $A = a_0 + a_1p + a_2p^2 + \ldots$ führte Hensel Näherungswerte $A_k$ ein, betrachtete die Folge dieser Näherungswerte und beobachtete, daß "[j]ede dieser ganzen Zahlen... ein Näherungswert für alle auf sie folgenden Zahlen dieser Reihe" ist.[306]

Er nannte $A$ den *Grenzwert der Reihe der $A_i$* und drückte "diese Beziehung durch die Gleichung $A = \lim_{k=\infty} A_k \quad (p)$ aus."[307] Sowohl 'Grenzwert' als auch die Formelschreibweise $\lim_{k=\infty}$ werden also durch die Beziehung zwischen $A$ und seinen Näherungswerten *definiert*. Hensel wies an dieser Stelle nicht explizit darauf hin, daß eine Zahlgröße für den Bereich von $p$ auch durch alle ihre Näherungswerte bestimmt ist.[308]

Nachdem er auch die Definition der Maßzahl übertragen hatte, zeigte er, daß aus $A = \lim_{k=\infty} A_k \quad (p)$ im gewöhnlichen Sinne $\overline{A} = \lim_{k=\infty} \overline{A}_k$ folgt.[309] Hensel nutzte die Maßzahl zur Erweiterung der eingeführten Ordnung:

> Von zwei Zahlen unseres Bereiches bezeichne ich diejenige als die größere für den Bereich von $p$, deren Maßzahl den größeren Wert hat.[310]

Er merkte an, daß aus $A > B\,(p)$ folgt, daß diese Ungleichung auch für Näherungswerte $A_k$ und $B_l$ besteht, wenn $k$ und $l$ groß genug sind. Weiter übertrug er die Begriffe *Ordnungszahl* und *Einheit für den Bereich von $p$*, die nur den Anfang der Reihe benötigen.

Hensel hatte also das Ziel, eine Ordnung zu definieren, die genauer als die Ordnungszahl unterscheidet. Von der "nicht-optimalen äußeren Form" dieser Definition zu sprechen,[311] wird Hensels Intention nicht gerecht.

Gleichheit definierte Hensel nicht mit Hilfe der Maßzahl, sondern er nannte $A$ und $A'$ gleich, wenn ihre Näherungswerte

> für genügend große Indizes kongruent sind für jede noch so hohe Potenz von $p$ als Modul, wenn also für eine beliebig hohe Potenz $p^M$ von $p$ die Kongruenzen $A_k \equiv A'_l (\mathrm{mod}\ p^M)$ bestehen, sobald $k$ und $l$ genügend groß angenommen werden.[312]

Hensel definierte die Gleichheit also nicht mit Hilfe eines Konzepts der Analysis (Konvergenz der Maßzahl), sondern übertrug die Struktur einer Definition. Dabei entsprechen seine Kongruenzen modulo $p^M$ für beliebig großes $M$ den Ungleichungen $|x - x_0| < \varepsilon$ für beliebige kleines $\varepsilon$. Seine Definition der Gleichheit ist in diesem Sinne analog zu Cantors Definition für die Gleichheit reeller Zahlen und damit auch zu der in Weierstrass' Vorlesungen.[313]

---

306[47, 1904, 61].
307[47, 1904, 61].
308Genauer benötigt man dazu nicht alle Näherungswerte, aber sie müssen konsistent sein und ihre Folge darf nicht abbrechen (aber konstant werden).
309Daher ist die Beziehung zwischen Maßzahl und Reihe nicht so, wie Peter Ullrich in [Ullrich, 1998, 171] behauptet. Tatsächlich zeigte Hensel, daß bei bestehendem Grenzwert in seinem (arithmetischen) Sinn auch die Folge der Maßzahlen der Näherungswerte im gewöhnlichen Sinn konvergiert.
Ullrich hingegen behauptet, Hensel habe die Maßzahl benutzt, um zu beschreiben, was es bedeutet, daß der Limes der Summe $\sum_{\nu=n}^{N} a_\nu p^\nu$ für $N \to \infty$ existiert, damit seien also die Summen $\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu p^\nu$ nicht länger nur formale, sondern $p$-adisch konvergente Objekt,[Ullrich, 1998, 171]. Dies setzt aber auf eine wenig sinnvolle Weise den modernen Begriff von '$p$-adisch konvergent' voraus.
310[47, 1904, 61].
311[Ullrich, 1998a, 322]. Die Ordnung gehört zur Gesamtszenerie, die Hensel einführt.
312[47, 1904, 62].
313Vgl. [Petri/Schappacher, 2007]. Hensel zeigte nicht die Vollständigkeit bezüglich der $p$-adischen Bewertung, wie [Ullrich, 1998a, 322] behauptet, denn er betrachtete keine beliebigen Folgen, sondern nur Folgen von endlichen Anfangsstücken und endliche Summen. (Diese sind für ihn nach Definition wohldefiniert bzw. für Ullrich konvergent.)

Er folgerte daraus, daß zwei Zahlen genau dann gleich sind, wenn sie in reduzierter Form gleiche Ziffern haben bzw. "die Grenzwerte der Masszahlen der Näherungswerte von $A$ [und $A'$] einander gleich sind."[314]

Anschließend ließ Hensel nicht-reduzierte Zahlen zu, wobei die Koeffizienten keine ganzen Zahlen sein müssen, sondern "auch ebenfalls unendliche Reihen, d.h. allgemeine Zahlgrößen unseres Bereiches" sein können.[315] Jede so definierte Zahlgröße ist genau einer reduzierten Zahlgröße gleich, wie Hensel durch schrittweisen Koeffizientenvergleich zeigte.

Addition, Subtraktion, Multiplikation, sowie die Division von Einheiten definierte Hensel mit Hilfe der Grenzwertnotation und der Näherungswerte:

$$A \pm B = \lim_{k=\infty} (A_k \pm B_k) \qquad (p), \quad AB = \lim_{k=\infty} (A_k B_k) \qquad (p) \quad \text{bzw.} \quad \frac{E}{E'} = \lim_{k=\infty} \frac{E_k}{E'_k} \qquad (p).$$

Er begründete diese Definitionen mit der Entsprechung zu den Rechenvorschriften aus dem ersten Paragraphen.[316]

Schreibt man $A = p^a E$ mit einer Einheit $E$ und beachtet, daß das Produkt zweier Einheiten wieder eine Einheit ist, erkennt man, daß die Ordnungszahl eines Produktes gleich der Summe der Ordnungszahlen der Faktoren ist. Insbesondere folgt Nullteilerfreiheit:

> Das Produkt zweier Zahlen $A$ und $B$ ist genau dann und nur dann gleich Null, wenn einer der Faktoren Null ist.[317]

**Zulassung negativer Exponenten: der Körper $K(p)$**

Auch der Quotient zweier Einheiten ist wieder eine Einheit, so daß man also für $A = p^\alpha E$ und $B = p^\beta E'$ erhält: $\frac{A}{B} = p^{\alpha-\beta} \frac{E}{E'}$. Hensel erweiterte den Bereich demgemäß noch einmal:

> Damit also die Division zweier Zahlen unseres Bereiches durcheinander unbeschränkt ausführbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß wir auch solche Zahlgrößen
>
> $$G = \frac{G_{-\varrho}}{p^\varrho} + \frac{G_{-\varrho-1}}{p^{\varrho-1}} + \cdots + \frac{G_{-1}}{p} + G_0 + G_1 p + \ldots$$
>
> in denselben aufnehmen, welche eine negative Ordnungszahl haben, deren Entwicklung also mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen von $p$ beginnt.[318]

Eine Zahl ohne negative Potenzen von $p$ heißt *ganz*, eine mit endlich vielen negativen Potenzen von $p$ *gebrochen*. Die Ordnungszahl einer solchen Zahl sei dann $-\varrho < 0$, wenn $G = p^{-\varrho} E$ ist. Dann gilt der Satz:

> Die Ordnungszahl des Quotienten zweier Zahlen ist gleich der Differenz der Ordnungszahlen von Zähler und Nenner.[319]

Hensel nannte die

> Gesamtheit aller Zahlgrößen $A = a_\varrho p^\varrho + a_{\varrho+1} p^{\varrho+1} + \ldots$, deren Koeffizienten wohldefinierte Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots, p-1$ sind, und deren Ordnungszahl $\varrho$ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl oder Null ist, einen *Zahlkörper*

[314] [47, 1904, 62].
[315] [47, 1904, 62].
[316] [47, 1904, 64f]. Falls der Minuend $A$ in $A - B$ abbricht, muß man die Nulldarstellung $0 = p, p-1\ p-1\ldots$ bzw. $0 = p^r \cdot (p, p-1\ p-1\ldots)$ benutzen, die Hensel zuvor [47, 1904, 62f] eingeführt hatte.
[317] [47, 1904, 64].
[318] [47, 1904, 66].
[319] [47, 1904, 66].

und bezeichnete diesen mit $K(p)$.[320] Auch die "Gesamtheit aller *gewöhnlichen* positiven, negativen, ganzen und gebrochenen Zahlen" nannte er einen Zahlkörper, den er mit $K(1)$ bezeichnete.[321] Ohne weitere Bemerkungen zur Ausdehnung der Operationen auf die gebrochenen Zahlen folgerte er:

> Die bis jetzt durchgeführten Betrachtungen lehren dann, daß der Körper $K(p)$ in der Weise abgeschlossen ist, daß die vier elementaren Rechenoperationen auf zwei oder mehrere Zahlen des Körpers $K(p)$ angewandt, wieder zu Zahlen desselben Körpers führen. Nur muß man natürlich die Division durch die Null ausschließen.[322]

Eine rationale Gleichung zwischen Elementen von $K(p)$, z.B. $R(A, \ldots, D) = 0 \quad (p)$ kann als $\lim_{k=\infty} R(A_k, \ldots, D_k) = 0 \quad (p)$ geschrieben und daher genau wie eine gewöhnliche Gleichung umgeformt werden. Hensel formulierte dazu die Sätze:

> Denn es gelten auch hier die Sätze:
> Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches, Gleiches von Gleichem subtrahiert gibt Gleiches,
> Gleiches mit Gleichem multipliziert gibt Gleiches, Gleiches durch Gleiches dividiert gibt Gleiches,
> falls der Divisor Null ein für alle Male ausgeschlossen wird.[323]

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß "jede Zahl des Körpers $K(1)$ einer einzigen Zahl von $K(p)$ gleich" ist.[324] Hensel zeigte weiter, daß der Teilbereich $K(1)$ von $K(p)$ genau die periodischen Zahlen von $K(p)$ enthält.

Wesentlich dafür ist, daß einer rein periodischen Zahl ein negativer echter Bruch entspricht, der $p$ nicht im Nenner enthält.[325] Weiter entsteht jede rationale Zahl aus einem negativen echten Bruch durch die Operationen "Addition einer positiven oder negativen ganzen Zahl" bzw. "Multiplikation mit einer positiven oder negativen Potenz von $p$", wobei die Zahl (gemischt) periodisch bleibt.[326] Hensel betrachtete diesen Beweis als analog zu dem der entsprechenden Aussage für Dezimalbrüche.

### 5.4.3 Ganze und rationale Funktionen mit Koeffizienten in $K(p)$

Hensel begann auch den dritten Paragraphen mit der Übertragung einiger Begriffe. Der Gegenstand sind rationale ganze Funktionen von $x$, deren Koeffizienten Zahlen des Bereichs $K(p)$ sind: $f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n$. Sind alle Koeffizienten nichtnegativer Ordnung, so handelt es sich um eine ganze *ganzzahlige* Funktion von $x$ und eine solche heißt *primitiv für den Bereich von* $p$, wenn ihre Koeffizienten nicht alle durch $p$ teilbar sind. Dann kann man jede ganze ganzzahlige Funktion zerlegen: $f(x) = p^\delta f_0(x)$, wobei $f_0(x)$ primitiv und $p^\delta$ der *Zahlteiler der Funktion* heißt.

---

[320] [47, 1904, 66].
[321] [47, 1904, 66].
[322] [47, 1904, 66]. Da Hensel nicht genauer darauf einging, sind dies für ihn vermutlich die entscheidenden Eigenschaften eines 'Zahlkörpers'. Hier scheinen die Elemente also (anders als die der Zahlkörper Dedekinds) keine komplexen Zahlen zu sein. Hensel hatte aber weiterhin die Vorstellung, daß die Zahlgrößen komplexen Zahlen entsprechen. Vgl. hierzu 5.6.
[323] [47, 1904, 67].
[324] [47, 1904, 67].
[325] Sei dazu zunächst $x = \overline{a_0, a_1 \ldots a_{\nu-1}}$ eine rein periodische Zahl in $K(p)$. Dann ist $p^\nu x = 0, 0 \ldots 0\overline{a_0 a_1 \ldots a_{\nu-1}}$, also $x(1 - p^\nu) = a_0, a_1 \ldots a_{\nu-1} = m$, wobei $m < (1 - p^\nu)$ eine positive ganze Zahl ist. Dann ist $-\frac{m}{p^\nu - 1} = x$ ein echter Bruch.
Ist umgekehrt $x = \frac{n_1}{m_1}$ mit $p \nmid m_1$ und ist $\nu$ minimal mit $n_1 | p^\nu - 1$, dann folgt aus $p^\nu - 1 = n_1\overline{n}$ die Gleichung $x = -\frac{m_1\overline{n}}{p^\nu - 1} = \frac{m}{1 - p^\nu} = m(1 + p^\nu + p^{2\nu} + \ldots)$ mit $m = a_0 + a_1 p + \ldots a_{\nu-1}p^{\nu-1}$ und daher $x = \overline{a_0, a_1 \ldots a_{\nu-1}}$.
[326] [47, 1904, 68].

Die weiteren Überlegungen beschränkte Hensel auf den Fall, in dem $A_0 = 1$ und alle anderen $A_i$ ganzzahlig sind. Bezeichnen $A_i^{(0)}, A_i^{(1)}, \ldots$ die Näherungswerte der Gleichungskoeffizienten, so soll $f_k(x) = x^n + A_1^{(k)} x^{n-1} + \cdots + A_n^{(k)}$ als Funktion mit ganzen positiven Koeffizienten der *k-te Näherungswert von $f(x)$ für den Bereich von p* heißen.[327]

Dann ist $f_k(x) \equiv f_{k-1}(x) \pmod{p^k}$, d.h. die einzelnen Koeffizienten unterscheiden sich nur um Vielfache von $p^k$, also $f_k(x) = f_{k-1}(x) + R_k(x)p^k$ mit einer ganzen ganzzahligen Funktion $R_k(x)$ mit modulo $p$ reduzierten Koeffizienten. Hensel schrieb: "Wir können wieder setzen: $f(x) = \lim_{k=\infty} f_k(x) \quad (p)$."[328]

Für die so eingeführten Funktionen mit Koeffizienten in $K(p)$ betrachtete Hensel Resultanten und damit auch Diskriminanten als rationale Funktionen der Koeffizienten.[329] Dazu konstruierte er einen Limes (in seinem Sinn), der den Zusammenhang zwischen Wurzeln und Koeffizienten der Näherungsgleichungen nutzen half:

Eine symmetrische ganze ganzzahlige Funktion $G(\alpha_1^{(k)}, \ldots, \alpha_n^{(k)})$ der Wurzeln $\alpha_i^{(k)}$ von $f_k(x)$ hat eine Darstellung als ganze ganzzahlige Funktion $\mathcal{G}(A_1^{(k)}, \ldots, A_n^{(k)})$ der Koeffizienten $A_j^{(k)}$ von $f_k(x)$. Hensel faßte diese (für jedes $k$ berechneten) ganzen Zahlen als Näherungswerte einer mit $\mathcal{G}(A_1, \ldots, A_n)$ bezeichneten Funktion auf:

> Bildet man also für die sämtlichen Näherungswerte $f_0(x), f_1(x), \ldots$ dieselbe symmetrische Funktion
>
> $$G(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_n^{(0)}), G(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(1)}), \ldots$$
>
> so ergeben die ihnen gleichen ganzen Zahlen
>
> $$\mathcal{G}(A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \ldots, A_n^{(0)}), \mathcal{G}(A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \ldots, A_n^{(1)}), \ldots$$
>
> eine Reihe, für deren Glieder offenbar ebenfalls die Kongruenzen
>
> $$\mathcal{G}(A_1^{(k-1)}, \ldots, A_n^{(k-1)}) \equiv \mathcal{G}(A_1^{(k)}, \ldots, A_n^{(k)}) \pmod{p^k}$$
>
> bestehen, sie sind daher die Näherungswerte der Zahl
>
> $$\mathcal{G}(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \lim_{k=\infty} \mathcal{G}(A_1^{(k)}, \ldots, A_n^{(k)})$$
>
> des Bereiches $K(p)$, welche dieselbe ganze Funktion der Koeffizienten $A_1, \ldots, A_n$ ist.[330]

Damit erhält man die Diskriminante $D(f(x))$ und die Eliminationsresultante $R(f, g)$ von Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ mit Koeffizienten in $K(p)$ als Grenzwert der Näherungswerte und damit als Element von $K(p)$.[331]

Ist eine Zerlegung $F(x) = f(x)g(x) \quad (p)$ bekannt, so leitete Hensel durch die angegebene Betrachtung der Näherungswerte und den Übergang zum Limes die Gleichung

$$D(F(x)) = \pm D(f(x))D(g(x))R^2(f(x), g(x)) \quad (p)$$

her, "welche für gewöhnliche Gleichungen bekannt, nunmehr also auch für Funktionen des Bereiches $K(p)$ bewiesen ist."[332]

---

327 [47, 1904, 79].

328 [47, 1904, 70].

329 Letztere erwähnte er nur am Rande, [47, 1904, 71]. Die Diskriminante ist die Resultante einer ganzen Funktion mit ihrer ersten Ableitung.

330 [47, 1904, 71].

331 Für beide ergibt sich darüberhinaus die bekannte Determinantendarstellung mit Hilfe der Koeffizienten von $f(x)$ und $g(x)$, aus der sich die ganze ganzzahlige Funktion $\mathcal{G}$ ablesen läßt.

332 [47, 1904, 72]. Dabei wird die Darstellung der Resultante als symmetrisches Produkt der Wurzeldifferenzen benutzt.

Hensel bezeichnete "die Gesamtheit aller ganzen oder gebrochenen Funktionen von $x$ mit Koeffizienten des Bereiches $K(p)$" als den Bereich $K(p, x)$, "dessen Elemente sich durch die vier elementaren Rechenoperationen wiedererzeugen."[333]

> Für diesen Bereich $K(p, x)$ sind offenbar alle Methoden und Resultate der elementaren Algebra, soweit diese nur rationale Operationen voraussetzen, ohne weiteres auch in dem Falle giltig, daß die Koeffizienten nicht bloß rationale Zahlen von $K(1)$, sondern beliebige Größen des Bereiches $K(p)$ sind. Ich will die wichtigsten Sätze dieser Art daher nur angeben.[334]

Hensel nannte neben der Taylor-Entwicklung den Satz, daß $(x - \xi)$ ein Teiler von $f(x)$ ist, falls $f(\xi) = 0 \quad (p)$. Schließlich führte er noch den Zusammenhang zwischen der Vielfachheit des Teilers $(x-\xi)$ von $f(x)$ und dem Verschwinden der (höheren) Ableitungen von $f(x)$ an. Die Teilbarkeit braucht im Allgemeinen keine ganzzahligen Koeffizienten:

> Eine Funktion $f(x)$ heißt teilbar durch eine andere $\delta(x)$, wenn $f(x) = \delta(x)f_1(x)$ und $f_1(x)$ eine ganze Funktion ist.[335]

Der größte gemeinsame Teiler von $f(x)$ und $g(x)$ kann mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus' dargestellt werden, wobei in $f(x)g_1(x) + g(x)f_1(x) = d(x)$ die $g_1(x)$ und $f_1(x)$ im Allgemeinen nicht ganzzahlig sind, auch wenn $f(x)$ und $g(x)$ ganzzahlig waren.

### Darstellung mit ganzzahligen Multiplikatoren

Nach dieser allgemeinen Übertragung von Grundkonzepten der Algebra auf rationale Funktionen mit Koeffizienten in $K(p)$ bewies Hensel noch ein etwas technischeres Resultat, das er für sein konstruktives Verfahren im vierten Paragraphen brauchte. Dazu seien $f(x)$ und $g(x)$ teilerfremd mit ganzzahligen Koeffizienten in $K(p)$. Dann ist die Resultante von $f$ und $g$ von positiver Ordnung $\varrho > 0$ und man kann jede Funktion $F$, die mindestens diese Ordnung und genügend geringen Grad hat, in der Form $F = fG_1 + gF_1$ mit ganzzahligen $G_1$ und $F_1$ von komplementären Graden darstellen:

> Sind also $f(x)$ und $g(x)$ zwei ganze ganzzahlige Funktionen von den Graden $\mu$ und $\nu$, deren Eliminationsresultante die Ordnung $\varrho$ hat, so kann man jede Funktion $F(x) = p^r F_0(x)$, deren Grad kleiner als $\mu + \nu$ und deren Zahlenteiler $p^r$ gleich oder größer als $p^\varrho$ ist, in der Form $F(x) = f(x)G_1(x) + g(x)F_1(x) \quad (p)$ so darstellen, daß die Grade der komplementären Multiplikatoren $F_1(x)$ und $G_1(x)$ kleiner als $\mu$ und $\nu$ und ihre Zahlteiler mindestens gleich $p^{r-\varrho}$ sind.[336]

Seien $f(x) = x^\mu + A_1x^{\mu-1} + \ldots A_\mu$ und $g(x) = x^\nu + B_1x^{\nu-1} + \ldots B_\nu$ zwei teilerfremde ganze Funktionen mit ganzen Koeffizienten des Bereichs $K(p)$ und $R(f, g) = p^\varrho E$ die Resultante, wobei $E$ eine Einheit mod $p$ ist. Dann nutzte Hensel zunächst die Determinantendarstellung der Resultante, um zu einer Darstellung

[333] Beide [47, 1904, 73].
[334] [47, 1904, 73], hier heißt es erstmals nur *Größen*.
[335] [47, 1904, 73].
[336] [47, 1904, 76].

von $p^\varrho E$ zu gelangen:

$$R(f,g) = \det \begin{pmatrix} A_\mu & A_{\mu-1} & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_\mu & \dots & A_1 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & A_\mu & A_{\mu-1} & \dots & 1 \\ B_\nu & B_{\nu-1} & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_\nu & \dots & B_1 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & B_\nu & B_{\nu-1} & \dots & 1 \end{pmatrix} (p)$$

> Addiert man in dieser Determinante zu der ersten Spalte die der Reihe nach mit $x, x^2, \dots, x^{\mu+\nu-1}$ multiplizierten übrigen Spalten und entwickelt sie dann nach der ersten Vertikalreihe, so erhält man leicht eine Gleichung $f(x)g_1(x) + g(x)f_1(x) = R(f,g) = p^\varrho E \quad (p)$, wo die komplementären Funktionen $f_1(x)$ und $g_1(x)$ höchstens vom $(\mu-1)$-ten und $(\nu-1)$-ten Grade sind und ganze Koeffizienten besitzen.[337]

Diese Gleichung dividiert man zunächst durch $E$, multipliziert sie dann mit $p^{r-\varrho}F_0(x)$ und erhält

$$f(x)(p^{r-\varrho}g_1(x)) + g(x)(p^{r-\varrho}f_1(x)) = p^r F_0(x) \qquad (p).$$

Dividiert man anschließend $g_1(x)$ mit Rest durch $g(x)$, so erhält man $g_1(x) = g(x)\lambda(x) + g_0(x)$ mit reduziertem $g_0(x)$ vom Grad maximal $\nu - 1$. Zieht man dann vom ersten Summanden $f(x)g(x)\lambda(x)$ ab und addiert es zum zweiten, so erhält man

$$f(x)(p^{r-\varrho}g_0(x)) + g(x)(p^{r-\varrho}f_0(x)) = p^r F_0(x) \qquad (p),$$

mit $f_0(x) = f_1(x) + f(x)\lambda(x)$ und ein Gradvergleich ergibt, daß wie gewünscht auch $f_0(x)$ maximal $\mu - 1$-ten Grad hat.[338]

Hensel nannte eine Funktion *unzerlegbar bzw. irreduktibel für den Bereich von p*, wenn sie nicht in Faktoren niedrigeren Grades mit Koeffizienten ebenfalls in $K(p)$ zerlegt werden kann. Am Beispiel der Gleichung $x^2 + 1$, die im Bereich $K(5)$ nicht irreduzibel ist, illustrierte Hensel, daß "der Begriff der Irreduktibilität ... hier wesentlich enger gefaßt [ist], als der entsprechende für den Bereich der gewöhnlichen ganzen Zahlen."[339]

Über die Irreduzibilität beweise man "genau wie in den Elementen der Algebra die folgenden Sätze":

> Eine irreduktible Funktion ist in einer anderen entweder als Teiler enthalten oder sie ist zu ihr teilerfremd.
> Eine irreduktible Funktion ist in dem Produkt zweier oder mehrerer ganzer Funktionen nur dann enthalten, wenn sie in einem jener Faktoren enthalten ist.
> Zwei Produkte irreduktibler Funktionen sind dann und nur dann gleich, wenn sie identisch sind.[340]

Hensel bemühte sich offensichtlich darum, viele Aussagen in ein möglichst umfassendes Szenario (für den Bereich von $p$) zu übertragen.

---

[337] [47, 1904, 75]. Nach Ausführung der angegebenen Umformung stehen in der ersten Spalte die Elemente $f(x), xf(x), \dots, x^{\mu-1}f(x), g(x), \dots, x^{\nu-1}g(x)$. Da die übrigen Spalten nur Elemente aus $K(p)$ enthalten, kommt man durch Entwicklung nach der ersten Spalte auf die angegebene Darstellung mit den Gradbeschränkungen für $f_1$ und $g_1$.

[338] Diese Darstellung beinhaltet für $G_1 = p^{r-\varrho}g_0(x)$ und $F_1 = p^{r-\varrho}f_0(x)$ bereits die behaupteten Teilbarkeitsaussagen.

[339] [47, 1904, 76]. Er wählte (wie bereits in der VL 2 vom 1.5. 1902) das Beispiel $x^2 + 1$ für den Bereich von 5, über das er schrieb: "So ist z.B. $x^2 + 1$ im Gebiete der rationalen Zahlen unzerlegbar, dagegen besteht innerhalb des Bereiches $K(5)$ die Zerlegung $x^2 + 1 = (x - 2,121\dots)(x - 3,323\dots)$", [47, 1904, 77].

[340] [47, 1904, 77].

### 5.4.4 Hensels Lemma

Im abschließenden vierten Paragraph bewies Hensel den “für die ganze Theorie grundlegenden Satz”:[341]

> Eine Funktion $F(X)$ des Bereiches $K(p,x)$ ist auf eine und nur eine Weise in irreduktible Faktoren zerlegbar, und es gibt ein endliches Verfahren, um diese Faktoren mit jeder beliebigen Genauigkeit zu berechnen.[342]

Für den Beweis mußte Hensel nur noch konstruktiv die Existenz einer solchen Zerlegung nachweisen. Dafür reichte es aus, einen Faktor in zwei Faktoren zu zerlegen, falls dies möglich ist.
Die Hauptidee ist, für $\delta$ groß genug aus einer Zerlegung mod $p^\delta$ die Existenz einer Zerlegung in $K(p,x)$ zu folgern, indem eine Zerlegung mod $p^{\delta+1}$ konstruiert wird. Ob eine Zerlegung mod $p^\delta$ besteht, kann man in endlich vielen Schritten durch Probieren herausfinden. Die benötigte Aussage ist heute (auch in analogen Situationen) als Hensels Lemma bekannt:

> Ist die Diskriminante von $F(x)$ von der Ordnung $\delta$,[343] so zerfällt die Funktion $F(x)$ dann und nur dann in Faktoren niedrigeren Grades, wenn ihr $\delta$-ter Näherungswert $F_\delta(x)$ modulo $p^{\delta+1}$ zerfällt, und zwar entspricht jeder Zerlegung $F_\delta(x) = \overline{f}(x)\overline{g}(x) \pmod{p^{\delta+1}}$ eine eindeutig bestimmte Zerlegung
> $F(x) = f(x)g(x) \quad (p)$ in der Weise, daß $\overline{f}(x)$ und $\overline{g}(x)$ Näherungswerte von $f(x)$ und $g(x)$ sind.[344]

Sei also $F_r(x) \equiv f_0(x)g_0(x) \pmod{p^{r+1}}$ und $r$ größer als die Ordnungszahl $\delta$ der Diskriminante $D(F)$. Es sollen Korrekturterme $f_1$ und $g_1$ bestimmt werden, so daß

$$F_{r+1}(x) \equiv (f_0(x) + f_1(x))(g_0(x) + g_1(x)) \pmod{p^{r+2}}.$$

Hensels Idee war es, die Terme so zu bestimmen, daß $f_1(x)g_1(x)$ automatisch durch $p^{r+2}$ teilbar ist, so daß sein Ansatz lautete:

$$(1) \qquad f_0(x)g_1(x) + g_0(x)f_1(x) \equiv F_{r+1} - f_0(x)g_0(x) \pmod{p^{r+2}}.$$

Schreibt man die rechte Seite in der Form $(F_{r+1}(x) - F_r(x)) + (F_r(x) - f_0(x)g_0(x))$, so sind beide Summanden durch $p^{r+1}$ teilbar.[345] Die Ordnungszahl $\varrho$ der Resultante von $f_0$ und $g_0$ ist nach der Gleichung $D(F) \equiv D(F_r) \equiv \pm D(f_0)D(g_0)R^2(f_0,g_0) \pmod{p^{r+1}}$ kleiner oder gleich $\varrho \leq \frac{\delta}{2} \leq \frac{r}{2}$.
Da die rechte Seite von (1) mindestens die Ordnungszahl $r+1$ hat, liefert der Satz aus dem dritten Paragraphen die gesuchten Funktionen $f_1$ und $g_1$, die beide mindestens den Zahlteiler $p^{r+1-\varrho}$ haben. Daher hat ihr Produkt wie gewünscht die Ordnungszahl $2r+2-2\varrho \geq 2r+2-r = r+2$.
Da man diesen Schritt beliebig wiederholen kann, erhält man eine Zerlegung für den Bereich von $p$.

#### Einfache Anwendungen

Als Spezialfall hob Hensel hervor, daß die Zerlegung mod $p$ bereits reicht, um die Irreduzibilität von $F(x)$ in $K(p,x)$ zu testen, falls $p$ in der Diskriminante von $F(x)$ nicht vorkommt.
Weiter diskutierte er die Auflösung der allgemeinen quadratischen Gleichung $x^2 - A = 0 \quad (p)$, da deren Diskriminante $D = 4A$ unmittelbar bekannt ist:

[341] [47, 1904, 77].
[342] [47, 1904, 77].
[343] Da die Diskriminante von $F(x)$ als Element von $K(p)$ konstruiert worden war, ist sie von endlicher Ordnung.
[344] [47, 1904, 80].
[345] Für den ersten Summanden folgt dies aus der Definition der Näherungswerte, für den zweiten aus der Voraussetzung an $f_0$ und $g_0$.

Dieselbe besitzt nämlich dann und nur dann zwei Wurzeln, wenn ihre linke Seite in diesem Bereich zerlegbar ist.[346]

Diese Formulierung bezieht sich auf Wurzeln der Gleichung im eingeführten Bereich von $p$, *nicht* auf Entwicklungen der gewöhnlichen Wurzeln. Die Betrachtung der Diskriminante ergab das Resultat:

Somit ergeben sich für die Auflösbarkeit der Gleichung $x^2 - A = 0 \quad (p)$ oder der Kongruenz $x^2 - A \equiv 0 \pmod{p^k}$ für ein beliebig großes $k$ die Bedingungen, daß erstens die Ordnung $\alpha$ des Koeffizienten $A = p^\alpha E$ eine gerade Zahl sein muß, ferner daß für ein ungerades $p$ die erste Ziffer von $E$ quadratischer Rest von $p$, für $p = 2$ aber $E$ von der Form $8h + 1$ sein muß.[347]

Zum Abschluß zog Hensel noch weitere Schlußfolgerungen:

Die Diskriminante einer Funktion $F(x)$ aus dem Bereiche $K(1, x)$ ist dann und nur dann durch $p$ nicht teilbar, wenn der erste Näherungswert $F_0(x)$ modulo $p$ in lauter verschiedene Primfaktoren zerfällt.[348]

Ist nämlich $p$ kein Diskriminantenteiler, so zerfällt $F_0(x) \bmod p$ genauso wie $F(x) \quad (p)$ und die einzelnen Faktoren sind auch mod $p$ inkongruent. Ist aber $p$ Diskriminantenteiler, so müssen zwei der Faktoren von $F_0(x)$ mod $p$ kongruent sein.[349]
Zu einer für den Bereich von $p$ irreduziblen Funktion $F(x)$ muß außerdem $F_0(x)$ mod $p$ kongruent zu einer Potenz sein, da man sonst zu einer Zerlegung für den Bereich von $p$ käme.[350]

## 5.5 Anwendung 1905: *Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen*

Diese Arbeit wurde im ersten Heft des Crelle-Bandes 128 abgedruckt, der wie Band 129 im Jahr 1905 erschien.[351] In ihr begann Hensel damit, seine zahlentheoretischen Aussagen (z.B. aus [40, 1901]) mit Hilfe der neuen Theorie und ohne Idealtheorie herzuleiten. Auch in dieser Arbeit argumentierte Hensel mit für ihn ungewöhnlicher Sorgfalt.

### Überblick

Hensel gliederte seine Arbeit in sieben Paragraphen, deren Länge zwischen $2\frac{1}{2}$ und $7\frac{1}{4}$ Seiten variiert. Auf die Einleitung folgt ein erster Paragraph, in dem er systematisch die *Eigenschaften* des Begriffes *algebraisch ganz* auf eine lokale Version *algebraisch ganz für den Bereich von p* übertrug.[352] Weiterhin bestimmte er, durch welche gebrochene Potenz von $p$ eine algebraische Zahl genau teilbar ist und wählte ein Fundamentalsystem für die für den Bereich von $p$ algebraisch ganzen Zahlen.
Im zweiten Paragraphen erweiterte er den algebraischen Zahlkörper $n$-ten Grades $K(1, \alpha)$ zu $K(p, \alpha)$. Dazu ging er (mit Hilfe eines vollständigen Restsystems modulo $p$) ebenso vor, wie bei der Konstruktion von $K(p)$ aus $K(1)$ in [47, 1904] mit $K(1)$. Elemente von $K(p, \alpha)$ sind dabei Potenzreihen nach Potenzen

346 [47, 1904, 81].
347 [47, 1904, 82].
348 [47, 1904, 83].
349 Hensel argumentierte jeweils mit den ersten Näherungswerten der Resultante.
350 Dies folgt aus dem Verfahren im Beweis von Hensels Lemma, da man von einer teilerfremden Zerlegung mod $p$ ausgehen kann, [47, 1904, 84].
351 Sie kann daher nicht von Reaktionen auf Hensels Vortrag im September 1905 beeinflußt sein.
352 Der Begriff *algebraisch ganz für den Bereich von p* kam hingegen bereits in [29, 1897, 249] bzw. [40, 1901, 318] vor.

von $p$, deren Koeffizienten aus dem vollständigen Restsystem stammen.

Im dritten Paragraphen begann Hensel die Betrachtung des Spezialfalls, in dem die definierende Gleichung auch für den Bereich von $p$ irreduzibel ist. Dabei zog er die auch in der Gleichungstheorie üblichen Folgerungen aus der Irreduzibilität.

Im zentralen vierten Paragraphen bestimmte er eine algebraische Primzahl $\pi$ als eines der Elemente, die durch die minimale (gebrochene) Potenz von $\pi$ teilbar sind. Die zentrale Aussage ist, daß jedes Element von $K(p, \alpha)$ eine Darstellung $\beta = \pi^d e$ hat, wobei $e \in K(p, \alpha)$ eine Einheit für den Bereich von $p$ ist. Daraus folgt, daß es für eine algebraische Zahl $x \in K(1, \alpha)$ (insgesamt $n$) konjugierte Potenzreihenentwicklungen nach Potenzen von $\pi$ gibt.

Im fünften Paragraphen übertrug Hensel die Theorie der ganzen Zahlen modulo eines Primdivisors auf die Untersuchung der für den Bereich von $p$ ganzen Zahlen modulo $\pi$.

Der sechste Paragraph enthält neben einer Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse die Zielstellung, auch im allgemeinen Fall für eine algebraische Zahl $x \in K(1, \alpha)$ insgesamt $n$ Entwicklungen zu konstruieren. Zentral in ihm ist eine weitere Version von Hensels Lemma, die es unter bestimmten Voraussetzungen erlaubt, aus einem Näherungswert mittels des Newton-Verfahrens auf eine Lösung der Gleichung in Potenzreihenform zu schließen.

Daraus folgt zunächst die Existenz von $n$ Wurzeln einer für den Bereich von $p$ irreduziblen Gleichung $n$-ten Grades mit Koeffizienten in $K(p)$ und damit auch die Existenz von $n$ solchen Wurzeln für eine im gewöhnlichen Sinn irreduzible algebraische Gleichung. Im siebenten Paragraphen leitete Hensel darüberhinaus mit diesem Lemma auch die Existenz modifizierter Entwicklungselemente im erweiterten Körper ab, die durch einfache Gleichungen über $K(p)$ beschrieben werden können.

**Einleitung**

In der Darlegung seiner Zielstellung ging Hensel diesmal nicht auf die Untersuchung der transzendenten Zahlen ein. Sein Ziel sei die "Untersuchung der algebraischen Zahlen für den Bereich einer beliebigen Primzahl", wobei er "im wesentlichen zu denselben Resultaten gelangt" sei, wie in der vorhergehenden Arbeit für die rationalen Zahlen.[353] Auf diese Ergebnisse lasse sich

> eine Theorie der algebraischen Zahlen gründen, welche vollständig mit der durch *Puiseux* begründeten Theorie der algebraischen Funktionen übereinstimmt, und die auch auf die Untersuchung der algebraischen Einheiten ausgedehnt werden kann, wie in einer späteren Arbeit näher dargelegt werden soll.[354]

Gegenstand von Hensels Theorie sind demnach die algebraischen Zahlen.

### 5.5.1 Eigenschaften algebraischer Zahlen für den Bereich von $p$

**Teilbarkeit durch (gebrochene) Potenzen von $p$**

Hensel sah seinen ersten Paragraphen als Wiederholung an. Er behauptete, er "erinnere" an

> einige Definitionen und Elementarsätze über die algebraischen Zahlen und ihre Teilbarkeit durch eine ganze oder gebrochene Potenz einer Primzahl $p$.[355]

[353] [49, 1905, 1]. Hervorhebung B.P. Auf die von Hensel behaupteten Entsprechungen wird im Folgenden eingegangen.
[354] [49, 1905, 1].
[355] Beide [49, 1905, 1].

Zunächst definierte er, eine algebraische Zahl $\alpha$ sei *algebraisch ganz für den Bereich von* $p$, wenn sie einer normierten Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügt, deren Koeffizienten für den Bereich von $p$ ganze Zahlen sind, deren Nenner also nicht durch $p$ teilbar sind.

Hensel bezeichnete dies als die "allgemeinste Definition".[356] In seinen vorherigen zahlentheoretischen Arbeiten war sie nie explizit. Sie ist analog zu den entsprechenden Definitionen in den Arbeiten zu algebraischen Funktionen einer Variablen.[357] Die folgenden Schlußfolgerungen gab Hensel unter Berufung auf Webers Algebra (Bd. II, §149) an, in der sie jedoch nur für den Fall der gewöhnlichen algebraischen Ganzheit gezogen werden:[358]

> 3. Jede Wurzel irgend einer algebraischen Gleichung $y^s + \gamma_1 y^{s-1} + \cdots + \gamma_s = 0$, deren Koeffizienten modulo $p$ ganze algebraische Zahlen sind, ist selbst eine modulo $p$ ganze algebraische Zahl.
> 4. Hieraus folgt speziell, daß eine Zahl $\alpha$ dann und nur dann modulo $p$ algebraisch ganz ist, wenn irgend eine Potenz $\beta = \alpha^s$ von $\alpha$ mit positiven ganzzahligen Exponenten ebenfalls ganz ist.[359]

Damit kontextualisierte Hensel sich bewußt im Umfeld von Webers *Lehrbuch der Algebra* und betonte dabei die Analogie seiner lokalen Begriffe zu den gewöhnlichen.

Sei $K(1, \alpha)$ der von $\alpha$ erzeugte Zahlkörper. Hensel untersuchte, wann ein $\beta \in K(1, \alpha)$ durch eine Potenz von $p$ algebraisch teilbar ist, d.h. wann der Quotient $\gamma = \frac{\beta}{p^\delta}$ eine modulo $p$ ganze algebraische Zahl ist.[360] Sei dazu $y^n + b_1 y^{n-1} + \cdots + b_n = 0$ die von $\beta$ erfüllte Gleichung mit rationalen Koeffizienten und sei $c_i$ die Ordnungszahl von $b_i$, also $b_i = p^{c_i} e_i$, wobei $e_i$ eine rationale Einheit modulo $p$ ist. Dann erfüllt $\gamma$ die Gleichung

$$z^n + p^{c_i - \delta} e_1 z^{n-1} + p^{c_2 - 2\delta} e_2 z^{n-2} + \cdots + p^{c_n - n\delta} e_n = 0,$$

d.h. für $\delta \leq \delta_0 := \min\{\frac{c_1}{1}, \ldots, \frac{c_n}{n}\}$ ist $\gamma$ modulo $p$ algebraisch ganz.

Eine Gleichung heißt *primitiv*, wenn alle Koeffizienten ganz modulo $p$ sind und mindestens einer davon $p$ gar nicht enthält. Ein Produkt primitiver Gleichungen ist primitiv.

Eine algebraische Zahl ist genau dann ganz für den Bereich von $p$, wenn der Leitkoeffizient der primitiven Gleichung mit rationalen Koeffizienten, die sie erfüllt, eine Einheit modulo $p$ ist.[361]

Hensel wies nach, daß $\gamma$ für $\delta > \delta_0$ modulo $p$ nicht ganz ist, also $\beta$ *genau* durch $p^{\delta_0}$ teilbar ist. In der Vorlesung 1902 hatte er dies ebenso wie in den Arbeiten zu den algebraischen Funktionen als selbstverständlich angesehen.

Für ganzes $\delta$ ist die Aussage klar, da dann die angegebene Gleichung rationale Koeffizienten hat.

Für gebrochenes $\delta = \frac{r}{s}$ zeigte Hensel zunächst, daß $\gamma^s \in K(1, \alpha)$ nicht ganz modulo $p$ ist. Sei dazu $k(z)$ die von $\gamma$ erfüllte primitive Gleichung, deren höchster Koeffizient also eine positive Potenz von $p$ enthält. Dann erfüllt $\gamma^s$ die Gleichung $K(z^s) = k(z)k(\varrho z) \ldots k(\varrho^{s-1} z)$ (wobei $\varrho$ eine $s$-te primitive Einheitswurzel ist), die ebenfalls primitiv ist und deren höchster Koeffizient ebenfalls keine Einheit mod $p$ ist. Also ist

[356] [49, 1905,2].
[357] Vgl. auch VL 6 vom 26.5.1902. Den Begriff *algebraisch ganz für den Bereich von p* benutzte Hensel auch in [29, 1897] und [40, 1901]. Dort thematisierte er ihn jedoch nicht.
[358] [Weber, 1899, 554ff].
[359] [49, 1905, 2]. Die Eigenschaft 3. wurde auch in der VL 5 vom 15.5.1902 angegeben.
[360] [49, 1905, 3]. 'Modulo $p$ ganz' ist gleichbedeutend mit 'für den Bereich zu $p$ ganz.'
[361] [49, 1905, 3].

$\gamma^s$ und nach (4) auch $\gamma$ nicht ganz modulo $p$.[362]

Hensel zog noch eine Schlußfolgerung über den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der dabei betrachteten Gleichungen:

> Ist $\beta$ genau durch $p^{\frac{r}{s}}$ teilbar, und ist in der primitiven Gleichung für
>
> $$z = \gamma = \frac{\beta}{p^{\frac{r}{s}}} \qquad k(z) = z^n + \bar{b}_1 z^{n-1} + \cdots + \bar{b}_n = 0$$
>
> der Koeffizient $\bar{b}_{n-\nu}$ von $z^\nu$ in der Reihe $\bar{b}_n, \bar{b}_{n-1}, \ldots$ der erste, welcher durch keine ganze oder gebrochene Potenz von $p$ teilbar ist, so ist auch in der Gleichung für $u = \gamma^s$
>
> $$K(u) = u^n + \overline{B}_1 u^{n-1} + \cdots + \overline{B}_{n-\nu} u^\nu + \cdots + \overline{B}_n = 0$$
>
> der Koeffizient $\overline{B}_{n-\nu}$ von $u^\nu$ ebenfalls der erste, welcher $p$ gar nicht enthält. Dies folgt unmittelbar aus der Gleichung $K(u) = k(z)k(\varrho z)\ldots k(\varrho^{s-1}z)$, wenn man links und rechts alle Koeffizienten fortläßt, welche durch eine, wenn auch noch so kleine, Potenz von $p$ teilbar sind.[363]

Hensel setzte im Folgenden ein *Fundamentalsystem* $\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(n)}$ *für die modulo p ganzen algebraischen Zahlen von* $K(\alpha, 1)$ voraus, d.h.

> daß alle modulo $p$ ganzen Zahlen von $K(\alpha, 1)$ auf eine einzige Weise in der Form $\gamma = c_1\gamma^{(1)} + c_2\gamma^{(2)} + \cdots + c_n\gamma^{(n)}$ mit modulo $p$ ganzen rationalen Koeffizienten dargestellt werden können.[364]

Dann sind zwei Zahlen genau dann mod $p^r$ kongruent, wenn alle ihre Koeffizienten in dieser Darstellung mod $p^r$ kongruent sind.[365]

### Hinzunahme nichtperiodischer Entwicklungen

In §2 wollte Hensel "die Zahlen des Bereiches $K(\alpha, 1)$ ... für den Bereich der Primzahl $p$" untersuchen.[366] Dazu fixierte er "zunächst die *modulo p reduzierten ganzen Zahlen von* $K(\alpha, 1)$",[367] d.h. das vollständige Restsystem modulo $p$, bestehend aus allen:

$$\varepsilon = e_1\gamma^{(1)} + \cdots + e_n\gamma^{(n)} \qquad \text{mit} \qquad e_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

Ein beliebiges $\gamma = c_1\gamma^{(1)} + c_2\gamma^{(2)} + \cdots + c_n\gamma^{(n)}$ aus $K(\alpha, 1)$ untersuchte Hensel für den Bereich von $p$, indem er die rationalen Koeffizienten $c_i$ nach steigenden Potenzen von $p$ entwickelte. Durch Zusammenfassen gleicher Potenzen von $p$ erhielt er eine Reihe $\gamma = \varepsilon_\varrho p^\varrho + \varepsilon_{\varrho+1}p^{\varrho+1} + \ldots \quad (p)$ mit Koeffizienten aus dem gewählten Restsystem modulo $p$. Dabei ist die Reihe $\varepsilon_\varrho, \varepsilon_{\varrho+1} \ldots$ periodisch, da die Entwicklungen der $c_i$ periodisch sind.

Hensel wies daraufhin, daß "bei der eben benutzten Definition der Gleichheit" (symbolisiert durch $= \ldots (p)$ ) auch umgekehrt jeder periodischen Reihe eine Zahl von $K(\alpha, 1)$ gleich sei.[368]

Anschließend nahm Hensel nichtperiodische Entwicklungen hinzu. Der Bereich $K(\alpha, p)$ enthält

[362] [49, 1905, 4]. An dieser Stelle wird deutlich, daß es Hensel bei seiner Begriffsbestimmung um alle algebraischen Zahlen ging. Er nahm benötigte Einheitswurzeln hinzu, bewegte sich also nicht strikt innerhalb eines Zahlkörpers.

[363] [49, 1905, 5].

[364] [49, 1905, 6].

[365] Dabei ist $r > 0, r \in \mathbb{Z}$.

[366] [49, 1905, 6].

[367] [49, 1905, 7]. Diese hängen offenbar vom gewählten Fundamentalsystem ab.

[368] [49, 1905, 7]. Die Definition ist implizit, sie benutzt das Restsystem und die Gleichheit in $K(p)$.

die Gesamtheit aller derjenigen Zahlgrößen $\gamma = \varepsilon_\varrho p^\varrho + \varepsilon_{\varrho+1} p^{\varrho+1} + \dots \quad (p)$, deren Koeffizienten $\varepsilon_r$ für jedes noch so große $r$ wohldefinierte modulo $p$ reduzierte ganze Zahlen von $K(\alpha, 1)$ sind. Die Gesamtheit aller dieser Zahlgrößen soll *der Bereich* $K(\alpha, p)$ genannt werden; der Bereich $K(\alpha, 1)$ ist dann derjenige Teil von $K(\alpha, p)$ welcher alle periodischen Reihen umfaßt.[369]

Auch hier bezeichnet 'Zahlgröße' bzw. 'Zahl' aus $K(\alpha, p)$ eine Reihe, wobei die Beziehung zwischen einer Reihe und ihrer Bezeichnung mit dem Symbol "$= \dots (p)$" gekennzeichnet wird.[370] Am Ende der Seite merkte Hensel an, daß $\varrho$ auch negativ sein kann und $\gamma$ dann *gebrochen* heißt.[371]
Die Verknüpfungen definierte Hensel genau analog zu denen in $K(p)$, worauf er explizit hinwies. Dazu führte er Näherungswerte $\gamma_k$ ein, die von den Partialsummen $\gamma_k = \varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_k p^k$ gebildet werden. Dann ist $\gamma_k \equiv \gamma_{k-1} \mod p^k$.

[A]uch hier kann jede Zahl $\gamma$ als Grenzwert ihrer Näherungswerte durch die Gleichung $\gamma = \lim_{k=\infty} \gamma_k \quad (p)$ definiert werden.[372]

Mit Hilfe der Näherungwerte definierte er wiederum Gleichheit:

Zwei Zahlgrößen $\gamma$ und $\gamma'$ heißen *gleich* für den Bereich von [p], wenn ihre Näherungswerte $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma'_0, \gamma'_1, \gamma'_2, \dots$ für genügend große Indizes und jede noch so hohe Potenz von $p$ kongruent sind, und dies ist wieder offenbar nur dann der Fall, wenn ihre Entwicklungskoeffizienten $\varepsilon_r$ und $\varepsilon'_r$ für jeden Index gleich sind.[373]

Anschließend definierte er $\gamma * \delta = \lim_{k=\infty}(\gamma_k * \delta_k)$ für $* \in \{+, -, \cdot, :\}$. Dabei bemerkte er nicht, daß der von ihm definierte Bereich Nullteiler enthält, so daß die Division nicht in allen Fällen wohldefiniert ist.[374]
Er merkte noch an, daß man $K(\alpha, p)$ auch als den Körper aller rationalen Funktionen von $\alpha$ mit Koeffizienten in $K(p)$ definieren könnte.[375]
In der Vorlesung hatte Hensel diese Konstruktion zunächst nur für den Fall einer irreduziblen Gleichung durchgeführt, sie später aber auch allgemein benötigt.[376]

### 5.5.2 Der Fall der irreduziblen definierenden Gleichung

In §3 leitete Hensel Eigenschaften der Elemente von $K(\alpha, p)$ unter der Voraussetzung ab, daß $\alpha$ durch eine Gleichung (1) $\quad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ mit ganzen rationalen Koeffizienten definiert wird, die auch für den Bereich von $p$ irreduzibel ist:[377]

Unter dieser Voraussetzung bestehen für die $n$ Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ der Gleichung (1) innerhalb des Bereiches $K(p)$ wörtlich dieselben Sätze wie für die Wurzeln einer innerhalb $K(1)$ irreduktiblen Gleichung in dem Bereiche $K(1)$ und sie werden wörtlich ebenso bewiesen.[378]

---

369 [49, 1905, 8].
370 Hensel benutzte im Folgenden zum Teil die Bezeichnung $K(p, \alpha)$, zum Teil $K(\alpha, p)$. Ich folge bei direkten Zitaten Hensel, bei indirekten benutze ich stets $K(\alpha, p)$.
371 [49, 1905, 8].
372 [49, 1905, 8]. Wie in [47, 1904] leitete Hensel Näherungswerte aus einer Zahl ab und beschäftigte sich nicht genauer mit den formalen Bedingungen, unter denen Näherungswerte eine Zahl bestimmen.
373 [49, 1905, 9]. Hensel schrieb versehentlich "Bereich von $\gamma$."
374 Bei der Division kann es passieren, daß die Reihe der Näherungswerte nicht konvergiert, weil sich bei der Berücksichtigung der längeren Näherungswerte $\gamma_k$ und $\delta_k$ auch die früheren Stellen ändern können.
375 [49, 1905, 10]. Dazu benutzt man die Schreibweise $\gamma = c_1\gamma^{(1)} + \dots + c_n\gamma^{(n)}$ mit $c_i \in K(p)$ und löst die Elemente des Fundamentalsystems in rationale Funktionen von $\alpha$ auf. Umgekehrt kann man eine rationale Funktion von $\alpha$ mit Koeffizienten in $K(p)$ auch mit Hilfe des Fundamentalsystems darstellen.
376 Vgl. 5.3.1, im Absatz nach FN 198.
377 In der Vorlesung hatte er diese Untersuchungen nur für die Elemente von $K(\alpha)$ durchgeführt.
378 [49, 1905, 10].Die angesprochenen Sätze beziehen sich auf $K(p)[x]$ statt auf $K(1)[x]$.

Der erste von Hensel angeführte Satz besagt, daß eine Wurzel der Gleichung (1) dann und nur dann einer anderen Gleichung $g(x) = g_0x^m + g_1x^{m-1} + \cdots + g_m = 0 \quad (p)$ mit Koeffizienten in $K(p)$ genügt, wenn $g(x) = f(x)g_1(x) \quad (p)$ gilt.[379] Gilt dann $g(\alpha_1) = 0 \quad (p)$, so folgt $g(\alpha_i) = 0 \quad (p)$ für $i = 2, \ldots, n$. Ist $\beta = \varphi(\alpha)$, so kann man die Konjugierten $\beta_i = \varphi(\alpha_i)$ bilden und erhält:

> Jede Zahlgröße $\beta$ des Bereiches $K(\alpha, p)$ genügt nebst ihren Konjugierten einer Gleichung $[g(y)]$ des $n$-ten Grades, deren linke Seite innerhalb $K(p)$ entweder selbst irreduktibel, oder die Potenz einer irreduktiblen Funktion ist.[380]

Ist $\beta$ eine *ganze* algebraische Zahlgröße, $g(y)$ also ganzzahlig, so folgt die analoge Aussage auch modulo $p$:

> Die Gleichung $n$-ten Grades, der irgend eine für den Bereich von $p$ ganze algebraische Zahl $\beta_1$ nebst ihren Konjugierten genügt, ist modulo $p$ betrachtet kongruent einer Potenz einer modulo $p$ irreduktiblen ganzen ganzzahligen Funktion von $y$.[381]

### Ableitung eines neuen Primelements

Hensels Ziel war es, "die algebraischen Zahlen genau ebenso für den Bereich von $p$ darstellen zu können wie früher die rationalen Zahlen."[382] Dazu konstruierte er ein Primelement und benutzte geeignete lokale Einheiten. Eine *Einheit für den Bereich von p* ist

> eine ganze algebraische Zahlgröße $\varepsilon$, deren reziproker Wert $\frac{1}{\varepsilon}$ ebenfalls für den Bereich von $p$ algebraisch ganz ist.[383]

Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn die Norm der algebraischen Zahlgröße eine rationale Einheit modulo $p$ ist.[384] Hensel bewies (weiter unter der Voraussetzung, daß die Grundgleichung für $\alpha$ für den Bereich von $p$ irreduzibel ist):

> Eine Zahl $\gamma$ unseres Bereiches $K(\alpha, p)$ ist dann und nur dann durch keine ganze oder gebrochene positive oder negative Potenz von $p$ teilbar, wenn sie eine Einheit ist.[385]

Im Wesentlichen zeigte er dazu, daß eine ganze Zahl $\gamma$, die keine Einheit ist, mindestens durch $p^{\frac{1}{n}}$ teilbar ist. Sei dazu die Norm von $\gamma$ durch $p$ teilbar. Dann hat der erste Näherungswert $g_0(y)$ der von $\gamma$ erfüllten Gleichung $n$-ten Grades $g(y) = 0$ die Gestalt $g_0(y) = y^n$, denn einerseits ist er durch $y$ teilbar, weil der Absolutkoeffizient von $g(y)$ durch $p$ teilbar ist, andererseits ist er die Potenz eines irreduziblen Faktors.[386] Dann sind aber alle Koeffizienten von $g(y)$ durch $p$ teilbar und damit ist $\gamma$ mindestens durch $p^{\frac{1}{n}}$ teilbar.

Zerlegt man eine algebraische Zahl des Bereiches $K(\alpha, p)$ in $\beta = p^{\frac{r}{s}}\gamma$, wobei $\gamma$ durch keine Potenz von $p$ teilbar ist, so muß zwar $\gamma$ nicht in $K(\alpha, p)$ liegen, aber da $\gamma^s$ in $K(\alpha, p)$ liegt und eine Einheit modulo $p$ ist, auch eine Einheit modulo $p$ sein. Das Ergebnis nannte Hensel eine unmittelbare Erweiterung des Resultats für die Zahlen von $K(p)$:

[379] [49, 1905, 10f]. Aus $g(\alpha) = 0$ folgt aufgrund der Irreduzibilität von $f$, daß alle Wurzeln von $f$ auch Wurzeln von $g$ sind. Damit ist $g$ Teiler von $f$.
[380] [49, 1905, 11].
[381] [49, 1905, 12]. Vgl. das Ende von 5.4.4 und [47, 1904, 84].
[382] [49, 1905, 15].
[383] [49, 1905, 12].
[384] Die Gleichung für $\frac{1}{\varepsilon}$ hat genau diese Norm in allen Nennern.
[385] [49, 1905, 13].
[386] Vgl. [47, 1904, 84] und den Text zu FN 349.

Jede Zahl $\beta$ kann auf eine einzige Weise in der Form $\beta = p^{\frac{r}{s}}\varepsilon$ dargestellt werden, wo $\varepsilon$ eine Einheit [für den Bereich von $p$] bedeutet.[387]

Auf diese Darstellung führte Hensel den Beweis zurück, daß eine algebraische Zahl genau dann durch $p^{\frac{r}{s}}$ teilbar ist, wenn ihre Norm durch $p^{n\cdot\frac{r}{s}}$ teilbar ist, denn aus $\beta^s = p^r\varepsilon^s$ folgt durch Übergang zur Norm $N(\beta)^s = p^{nr}N(\varepsilon^s)$ und $N(\beta) = p^{n\cdot\frac{r}{s}}N(\varepsilon^s)^{\frac{1}{s}}$. Daraus folgt noch speziell, daß $s$ ein Teiler von $n$ sein muß.

Anschließend fand Hensel "eine gewöhnliche ganze algebraische Zahl des Bereichs $K(p,\alpha)$, welche die niedrigste Potenz von $p$ enthält",[388] indem er aus dem modulo $p$ reduzierten vollständigen Restsystem $\gamma = c_1\gamma^{(1)} + \cdots + c_n\gamma^{(n)}$ mit $c_i \in \{0,\ldots,p-1\}$ ein Element $\pi$ wählte, dessen Norm die minimale positive Potenz von $p$ als Ordnungszahl hat.

Weiter zeigte Hensel, daß $\pi$ genau durch ein $p^{\frac{1}{e}}$ mit $e|n$ teilbar ist: Wäre $\pi = p^{\frac{d}{e}}\varepsilon_0$ mit teilerfremden $d$ und $e$, $d \neq 1$ und einer Einheit $\varepsilon_0$ für den Bereich von $p$, so gäbe es zwei ganze Zahlen $d', e'$ mit $dd' + ee' = 1$, und daher eine Zahl $\pi' = \pi^{d'}p^{e'} = p^{\frac{dd'+ee'}{e}}\varepsilon_0^{d'} = p^{\frac{1}{e}}\varepsilon$, die durch eine kleinere Potenz von $p$ teilbar ist, im Gegensatz zur Annahme.[389]

Dann ist jedes Element von $K(\alpha,p)$ durch eine ganzzahlige Potenz von $\pi$ genau teilbar:

Jede ganze oder gebrochene Zahl $\beta$ des Bereiches $K(p,\alpha)$ kann auf eine einzige Weise in der Form $\beta = \pi^d\bar{\varepsilon}$ dargestellt werden, in welcher $d$ einen ganzzahligen Exponenten und $\bar{\varepsilon}$ eine Einheit bedeutet, welche dem Körper $K(p,\alpha)$ selbst angehört. Wir nennen den Exponenten $d$ die Ordnungszahl von $\beta$ für den Bereich von $p$.[390]

Auch diese Aussage folgt wie in der Vorlesung und wie bei Selling: Sei dazu $\beta = p^{\varrho}\varepsilon$ und seien $d$ und $e$ so bestimmt, daß $\frac{d}{e} \leq \varrho < \frac{d+1}{e}$ und also $0 \leq \varrho - \frac{d}{e} < \frac{1}{e}$. Dann wäre $\frac{\beta}{\pi^d}$ durch eine niedrigere Potenz als $p^{\frac{1}{e}}$ teilbar, im Widerspruch zur Voraussetzung über $\pi$.
Es folgt, daß die Ordnungszahl eines Produkts bzw. eines Quotienten gleich der Summe bzw. Differenz der Ordnungszahlen der Faktoren ist, sowie daß $p$ die Ordnungszahl $e$ hat.

Hensel führte $\pi$ als "*algebraische Primzahl*" ein,[391] und nannte

zwei algebraische Zahlen *äquivalent* für den Bereich von $p$, wenn sie sich nur durch eine Einheit des Körpers $K(\alpha,p)$ unterscheiden. Dann können in allen Fragen der Teilbarkeit äquivalente Zahlen für einander als Modul gesetzt werden.
Zwei Zahlen heißen kongruent modulo $\pi^d$, wenn ihre Differenz die Ordnungszahl $d$ hat.[392]

Er begründete explizit, warum er $\pi$ als algebraische Primzahl bezeichnete:

Die Zahl $\pi$ hat hier den Charakter einer Primzahl, denn es besteht offenbar der Satz: Das Produkt $\beta\beta'$ zweier Zahlen ist dann und nur dann durch $\pi$ teilbar, wenn mindestens einer seiner Faktoren durch $\pi$ teilbar ist.[393]

[387][49, 1905, 15].
[388][49, 1905, 16].
[389][49, 1905, 16]. Vgl. dieses Argument bei Selling (4.2.2) und in der Vorlesung (5.2.3).
[390][49, 1905, 16].
[391][49, 1905, 17], Hervorhebung B.P.
[392][49, 1905, 17].
[393][49, 1905, 17].

### Entwicklungen nach Potenzen des Primelements

Anschließend wählte Hensel aus den $p^n$ mod $p$ inkongruenten Zahlen ein vollständiges Restsystem mod $\pi$ aus. Sei dieses $R = \{\varepsilon^{(0)} = 0, \varepsilon^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(\sigma-1)}\}$, wobei die $\sigma - 1$ letzten Elemente Einheiten modulo $p$ sind. Dann erhält man für jede ganze Zahl $\gamma$ des Bereiches $K(\alpha, p)$ eine eindeutige Darstellung der Form $\gamma = \varepsilon^{(0)}\pi^r + \varepsilon^{(1)}\pi^1 + \ldots \quad (p) \quad$ mit $\varepsilon^{(r)} \in R$, indem man zunächst für $\gamma$ eine Beziehung $\gamma = \varepsilon^{(0)} + \pi\gamma^{(1)}$ findet und dann sukzessive für die auftretenden Reste $\gamma^{(i)}$ entsprechende Gleichungen einsetzt. Hensel erläuterte, daß dabei

> die Gleichheit wieder so aufzufassen ist, daß die Näherungswerte der rechts stehenden Reihe der Zahl $\gamma$ für jede noch so hohe Potenz von $\pi$ kongruent wird, wenn man diese Reihe nur weit genug verlängert und dann abbricht.[394]

Für ganze oder gebrochene Zahlen $\gamma$ betonte Hensel die Übereinstimmung dieser Darstellung mit derjenigen in $K(p)$:

> Jede Zahl $\gamma$ des Bereiches $K(p, \alpha)$, also auch jede Zahl des in diesem enthaltenen Bereiches $K(1, \alpha)$ läßt sich auf eine einzige Weise in der Form darstellen $\gamma = \varepsilon^{(r)}\pi^r + \varepsilon^{(r+1)}\pi^{r+1} + \ldots \quad (p)$, wo die Koeffizienten $\varepsilon^{(i)}$ eindeutig bestimmte Zahlen [aus $R$] bedeuten. Diese Darstellung stimmt mit der überein, welche G.d.A. S. 60 für die rationalen Zahlgrößen des Bereiches $K(p)$ eingeführt wurde.[395]

Hensel hob die wesentlichen Aspekte der Entsprechung, d.h. die Entwicklung nach Potenzen eines Primelements und die Wahl eines Restsystems für die Koeffizienten, das aus Null und Einheiten für den Bereich von $p$ besteht, nicht noch einmal explizit hervor.

Für eine algebraische Zahl $\gamma \in K(\alpha)$ schloß Hensel aus der Existenz konjugierter Reihen darauf, daß die Minimalgleichung von $\gamma$ für den Bereich von $p$ in Linearfaktoren zerfällt:[396]

> Bezeichnet man also die zu $\gamma, \pi$ und den Koeffizienten $\varepsilon^{(k)}$ gehörigen konjugierten algebraischen Zahlen durch untere Indizes, so erhält man für die $n$ zu $\gamma$ konjugierten algebraischen Zahlen $\gamma_i$ die folgende Reihenentwicklung für den Bereich der Primzahl $p$:
>
> $$\gamma_i = \varepsilon_i^{(r)}\pi_i^r + \varepsilon_i^{(r+1)}\pi_i^{r+1} + \ldots \quad (p), \qquad\qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$
>
> und die Gleichung $n$-ten Grades für $\gamma$ $g(y) = y^n + g_1 y^{n-1} + \cdots + g_n = 0$ zerfällt für den Bereich von $p$ in die $n$ konjugierten Linearfaktoren: $g(y) = (y - \gamma_1)(y - \gamma_2) \ldots (y - \gamma_n) \qquad (p)$ wo die $n$ Zahlen $\gamma_i$ die obigen konjugierten Potenzreihen bedeuten.[397]

Die Bezeichnung 'für den Bereich von $p$ in Linearfaktoren zerfallen' täuscht etwas darüber hinweg, daß hier ein spezieller Bereich von $p$ im Hinblick auf dieses Ziel konstruiert wurde.

### Untersuchungen modulo $\pi$

Im folgenden Paragraphen §5 vereinfachte Hensel die Form des Restsystems mod $\pi$. Zunächst bestimmte er dessen Kardinalität als $\sigma = p^f$ mit $ef = n$, denn ein vollständiges Restsystem modulo $\pi^e$ bzw. $p$ hat die

[394] [49, 1905, 19].
[395] [49, 1905, 19]. Vgl. [47, 1904, 60]. Das ist eine Stelle, an der "Zahl" besonders eindeutig auch auf die allgemeineren Elemente von $K(p, \alpha)$ referiert.
[396] Er formulierte dies für die Gleichung $n$-ten Grades, die ggf. eine Potenz der Minimalgleichung ist.
[397] [49, 1905, 19]. Wäre $\gamma$ keine algebraische Zahl in $K(\alpha)$, so würde es die Gleichung $g(y) = 0$ auch nur für den Bereich von $p$ erfüllen.

Gestalt $e_1 + e_2\pi + \cdots + e_{e-1}\pi^{e-1}$, wobei die $e_i$ das ganze Restsystem $R$ durchlaufen.[398] Also ist $\sigma^e = p^n$ und damit $\sigma = p^f$.

Die folgenden Aussagen leitete Hensel "auf bekannte Art" ab.[399] Da jede Einheit des Restsystems die Kongruenz $x^{\sigma-1} - 1 \equiv 0 \bmod \pi$ erfüllt und $\pi$ prim ist, erhält man

$$x^{p^f} - x \equiv \prod_{k=0}^{p^f-1} (x - \varepsilon^{(k)}) \pmod{\pi}.$$

Weiter ist die Zerlegung der linken Seite mod $p$ und damit auch mod $\pi$ bekannt und man erhält für variables $x$

$$\prod_{d|f} \prod_i g_d^{(i)}(x) \equiv \prod_{k=0}^{\sigma-1} (x - \varepsilon^{(k)}) \pmod{\pi}.$$

Dabei ist das Produkt links "auf alle und nur die inkongruenten modulo $p$ irreduktiblen Funktionen auszudehnen..., deren Grad $d$ ein Teiler von $f$ ist."[400] Hieraus folgerte Hensel:

> Eine modulo $p$ irreduktible Kongruenz $d$-ten Grades besitzt modulo $\pi$ innerhalb $K(p, \alpha)$ dann und nur dann eine Wurzel, wenn $d$ ein Teiler von $f$ ist; dann aber besitzt sie soviele Wurzeln, als ihr Grad angibt.[401]

Sei jetzt $g(x) = x^f + g_1 x^{f-1} + \cdots + g_f$ eine der stets existierenden modulo $p$ irreduziblen Funktionen mit reduzierten ganzen Koeffizienten und $\varepsilon$ eine ihrer Kongruenzwurzeln modulo $\pi$ aus $K(\alpha, p)$. Dann heißt $\varepsilon$ eine *primitive Einheit*, denn die $p^f$ Zahlen $c_0 + c_1\varepsilon + \cdots + c_{f-1}\varepsilon^{f-1}$ $(c_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\})$ sind mod $\pi$ inkongruent und bilden damit ein vollständiges Restsystem mod $\pi$. Man kann sie also in den Entwicklungen benutzen bzw.:

> Wir können und wollen daher in den für alle Zahlen von $K(p, \alpha)$ geltenden Darstellungen: $\gamma = \varepsilon^{(r)}\pi^r + \varepsilon^{(r+1)}\pi^{r+1} + \ldots$ die Entwicklungskoeffizienten $\varepsilon^{(k)}$ stets als ganze Funktion von $\varepsilon$ von niedrigerem als dem $f$-ten Grade mit modulo $p$ reduzierten Koeffizienten annehmen.[402]

### 5.5.3 Der reduzible Fall

#### Zusammenfassung und Ausblick

Bevor Hensel die gefundenen Ergebnisse im §6 auch auf den Fall einer für den Bereich von $p$ reduziblen Grundgleichung übertrug, faßte er sie ausführlich zusammen.

Genüge also $\alpha$ einer für den Bereich von $p$ irreduziblen Gleichung. Dann ist jedes Element von $K(\alpha, p)$ "rational durch die beiden Zahlen $\varepsilon$ und $\pi$ *desselben* Körpers darstellbar", woraus Hensel folgerte "$K(p, \alpha) = K(\varepsilon, \pi)$".[403]

Die Elemente links sind rationale Funktionen von $\alpha$ mit Koeffizienten in $K(p)$ bzw. Reihen nach Potenzen von $p$ mit Koeffizienten aus einem vollständigen Restsystem. Rechts hingegen stehen Potenzreihen nach Potenzen von $\pi$, deren Koeffizienten aus der endlichen Menge stammen, die die reduzierten Funktionen

[398] $\pi^e$ und $p$ unterscheiden sich nur um eine Einheit modulo $p$ aus $K(\alpha, p)$, so daß ein vollständiges Restsystem modulo $\pi^e$ auch ein solches modulo $p$ ist.
[399] [49, 1905, 20].
[400] [49, 1905, 21].
[401] [49, 1905, 21]. Umgekehrt erfüllt jede der Zahlen von $K(\alpha, p)$ genau eine der Kongruenzen $g_d(x) \equiv 0 \bmod \pi$.
[402] [49, 1905, 22], Druckfehler Garde.
[403] [49, 1905, 22].

kleineren als $f$-ten Grades von $\varepsilon$ bilden.[404] Die behauptete Gleichheit der Mengen beinhaltete für Hensel vermutlich implizit noch Homomorphie.[405]

Hensel hatte zuvor schon die Analogie zu den Ergebnissen der *Neue[n] Grundlagen der Arithmetik* betont und führte jetzt explizit aus:

> Wir haben so für alle Zahlgrößen des algebraischen Körpers $K(p,\alpha)$ wörtlich dieselbe Darstellung, wie wir sie früher (G.d.A.) für die Zahlgrößen des rationalen Bereiches $K(p)$ in der Reihe
> $A = e^{(r)}p^r + e(r+1)p^{r+1} + \ldots \quad (p)$ gefunden hatten; nur tritt hier an die Stelle der Entwicklungszahl $p$ die algebraische Zahl $\pi \sim p^{\frac{1}{e}}$ und die Entwicklungskoeffizienten $\varepsilon^{(i)}$ können die $p^f$ algebraischen Werte (2a), die Koeffizienten $e^{(i)}$ nur die $p$ rationalen Werte $(0, 1, \ldots p-1)$ annehmen. Da aber auch hier die Koeffizienten $\varepsilon^{(i)}$ entweder gleich Null, oder *Einheiten* sind, so gelten alle a.a.O. für die elementaren Rechnungsoperationen aufgestellten Definitionen und bewiesenen Sätze wörtlich auch für diese algebraischen Reihen.[406]

Als weiteres Ziel gab Hensel an, er wolle nachweisen,

> daß die hier angegebene Erweiterung unseres Bereiches ausreicht, um alle $n$ Wurzeln auch einer für den Bereich von $p$ reduktiblen Gleichung $n$-ten Grades für den Bereich von $p$ als Potenzreihen darzustellen.[407]

Es behauptete an dieser Stelle also nur, seine Erweiterung sei bereits umfassend genug, um die algebraischen Wurzeln einer beliebigen Gleichung als Potenzreihen für den Bereich von $p$ darzustellen. Die Struktur des Ergebnisses nannte er vorab:

> Während man aber im Falle einer irreduktiblen Funktion nur einen einzigen Cyklus konjugierter Reihen erhält, ergeben sich in dem allgemeineren Falle genau so viele Cyklen, als die Anzahl der für den Bereich von $p$ irreduktiblen Faktoren der Grundgleichung beträgt, und jeder derselben enthält soviele konjugierte Wurzeln, als der Grad des betreffenden Faktors beträgt; für jeden dieser Zyklen werden natürlich die Zahlen $e$ und $f$ und die algebraischen Zahlen $\pi$ und $\varepsilon$ im allgemeinen verschieden sein.[408]

### Existenz von Gleichungslösungen in $K(\varepsilon,\pi)$

Hat man eine ganze Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten aus $K(1), K(p)$ oder $K(\varepsilon,\pi)$, so kann man mit Hilfe des folgenden Satzes aus der Existenz eines geeigneten Näherungswertes auf die Existenz von Wurzeln für den Bereich von $p$ schließen:

> Besitzt die Gleichung $F(y) = 0$ innerhalb $K(\varepsilon,\pi)$ einen Näherungswert $\overline{\gamma}$, dessen Ordnungszahl $r$ größer ist als die doppelte Ordnungszahl von $F'(\overline{\gamma})$, ist also der Quotient $\frac{F(\overline{\gamma})}{F'(\overline{\gamma})^2}$ von positiver Ordnung, so hat diese Gleichung auch innerhalb $K(\varepsilon,\pi)$ eine Wurzel, welche aus jenem Näherungswert $\overline{\gamma}$ mit jeder vorgeschriebenen Genauigkeit berechnet werden kann.[409]

Der Beweis beruht auf der Taylor-Entwicklung. Die Bedingung an die Ordnungszahlen besagt, daß der dritte Term der Taylor-Entwicklung von so hoher Ordung ist, daß er nicht berücksichtigt werden muß: Ist

[404] Hensel ging nicht darauf ein, daß jedes Element rechts auch einem Element links entspricht, eine solche Darstellung erhält man aber leicht, indem man jeweils die Koeffzienten von $e$ aufeinanderfolgenden Gliedern zusammenfaßt.
[405] Er formalisierte dieses Konzept nicht und hielt es hier vermutlich für selbstverständlich. Sei $i : K(\alpha,p) \to K(\varepsilon,\pi)$ die Abbildung, die einer Potenzreihe nach Potenzen von $p$ eine nach Potenzen von $\pi$ zuordnet. Dann ist $i(a * b) = i(a) * i(b)$ für $a, b \in K(\alpha,p)$ und $* \in \{+,-,\cdot,:\}$.
[406] Hervorhebung B.P. Es scheint, als habe Hensel doch gesehen, was für Probleme das Rechnen mit beliebigen Restsystemen bringen kann, [49, 1905, 23], vgl. [47, 1904, 60 - 67]. Damit es tatsächlich $p^f$ *algebraische* Werte sind, kann und sollte man $\varepsilon$ aus $K(1,\alpha)$ wählen.
[407] [49, 1905, 23].
[408] [49, 1905, 23].
[409] [49, 1905, 24].

$\overline{\gamma}$ ein Näherungswert mit $F(\overline{\gamma}) = \delta^{(r)}\pi^r + \dots$ und $F'(\overline{\gamma}) = \varepsilon^{(\varrho)}\pi^\varrho + \dots$ mit $r > 2\varrho$, so führt der Ansatz $\gamma_1 = \overline{\gamma} + h$ mit $h = \xi^{(r-\varrho)}\pi^{r-\varrho} + \dots$ auf die Gleichung

$$F(\overline{\gamma} + h) = F(\overline{\gamma}) + F'(\overline{\gamma})h + \frac{F''(\overline{\gamma})}{2!}h^2 + \cdots = (\delta^{(r)} + \varepsilon^{(\varrho)}\xi^{(r-\varrho)})\pi^r + \dots,$$

denn alle weiteren Glieder sind von höherer Ordnung. Also läßt sich die Einheit $\xi^{(r-\varrho)}$ wie gewünscht so bestimmen, daß der Term der Ordnung $r$ verschwindet, und dieses Verfahren läßt sich fortsetzen.[410]

Mit Hilfe dieses Satzes zeigte Hensel, daß jede für den Bereich von $p$ irreduzible Gleichung $F(y) = y^n + b_1 y^{n-1} + \cdots + b_n = 0 \quad (p)$ mit ganzen Potenzreihen aus $K(p)$ als Koeffizienten in einem geeigneten $K(\varepsilon, \pi)$ eine Wurzel hat. Dazu betrachtete er den $r$-ten Näherungswert der Gleichung $F_r(y)$, wobei $r$ größer als die Ordnungszahl der Diskriminante von $F(y)$ sei. Dann entwickelte er die (gewöhnliche) Wurzel dieser Gleichung mit ganzen Koeffizienten in eine Potenzreihe $\overline{\gamma} = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}\pi + \dots$, so daß $F(\overline{\gamma}) \equiv 0 \bmod p^r$. Dann ist auch $F'(\overline{\gamma}) \equiv F_r'(\overline{\gamma}) \bmod p^r$.
Hensel zeigte, daß $F'(\overline{\gamma})$ nicht durch $p^{\frac{r}{n}}$ teilbar ist, denn sonst wäre auch $F_r'(\overline{\gamma})$ durch $p^{\frac{r}{n}}$ teilbar und wegen $N(F_r'(\overline{\gamma})) = D(F_r) \equiv D(F) \bmod p^r$ wäre $D(F)$ durch $p^r$ teilbar im Widerspruch zur Wahl von $r$. Wegen $r - 2\frac{r}{n} \geq 0$ ist also die Bedingung des Lemmas erfüllt.[411]

Sind $\gamma_i$ die konjugierten Potenzreihen zu der so gewonnenen Wurzel $\gamma_1$, so sind diese ebenfalls Wurzeln von $F(y) = 0 \quad (p)$ und Hensel schlußfolgerte $F(y) = (y - \gamma_1) \dots (y - \gamma_n) \quad (p)$ für variables $y$. Ist dann $\delta$ eine Wurzel aus einem anderen $K(\varepsilon', \pi')$, so behauptete Hensel, sie müsse für den Bereich von $p$ einem der $\gamma_i$ gleich sein. Diese Gleichheit bedeute auch hier, daß die Differenz $\delta - \gamma_i$ "durch jede noch so hohe Potenz von $p$ algebraisch teilbar sein muß."[412]

Für eine irreduzible Gleichung mit Koeffizienten aus $K(p)$ folgt der Satz:

> Jede für den Bereich von $p$ irreduktible Gleichung [$n$-ten Grades] besitzt für diesen Bereich genau $n$ und nur $n$ Wurzeln, welche einen einzigen Cyklus von $n$ konjugierten Potenzreihen bilden, die nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $p$ fortschreiten.[413]

Damit behandelte Hensel beliebige ganzzahlige Gleichungen $F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n = 0$:
Er zerlegte sie in für den Bereich von $p$ irreduzible Faktoren, behandelte jeden dieser Faktoren einzeln und erhielt daraus insgesamt $n$ Wurzeln für die Gleichung $F(x) = 0$:

> Es besteht also der Fundamentalsatz: Jede ganzzahlige Gleichung $F(x) = 0$ besitzt für den Bereich einer beliebigen Primzahl $p$ genau so viele Wurzeln, als ihr Grad angibt, und diese ordnen sich in so viele Zyklen konjugierter Reihen an, als die Zahl der für den Bereich von $p$ irreduziblen Faktoren beträgt.[414]

Dieses Ergebnis notierte er auch als eine "Zerlegung in Linearfaktoren" in der Form:[415]

$$F(x) = (x - \gamma_1) \dots (x - \gamma_\lambda) \cdot (x - \delta_1) \dots (x - \delta_\mu) \cdot (x - \zeta_1) \dots (x - \zeta_\nu) \qquad (p).$$

[410] [49, 1905, 24f]. Da die Ordnungszahl von $F'(\overline{\gamma})$ nicht steigt, bleibt die Bedingung an die Ordnungszahlen erfüllt.
[411] [49, 1905, 26]. Im gesamten Argument ist $n \in \mathbb{N}, n > 1$.
[412] Dazu setzte Hensel $\delta$ in die Gleichung $F(\gamma)$ ein und argumentierte (mit Nullteilerfreiheit), daß einer der Faktoren verschwinden müsse, [49, 1905, 27].
[413] [49, 1905, 28].
[414] [49, 1905, 29].
[415] [49, 1905, 29].

Ein Problem dieser Formulierung ist, daß der Bereich, der die Potenzreihen zu allen drei Faktoren enthält, nicht nullteilerfrei sein muß.[416] Eine Konstruktion eines nullteilerfreien Bereiches, in dem die gegebene Gleichung in Linearfaktoren zerfällt, lieferte Hensel erst in der von Überlegungen Steinitz' angeregten Arbeit [55, 1909].[417]

### Modifikation der Entwicklungszahlen

Im abschließenden §7 modifizierte Hensel $\varepsilon$ und $\pi$, so daß sie Wurzeln einfacher Gleichungen für den Bereich von $p$ werden.[418] Das Vorgehen entspricht dem in der Arbeit [40, 1902, §2], wird hier aber durch das Lemma systematisiert. Ein Vorteil des modifizierten $\varepsilon$ ist hier ebenso wie dort, daß bei konkreten Rechnungen keine Überträge mehr berücksichtigt werden müssen.[419]
Die Einheit $\varepsilon$ war als Kongruenzwurzel einer modulo $\pi$ irreduziblen Kongruenz mit ganzzahligen, modulo $p$ reduzierten Koeffizienten

$$g(x) = x^f + g_1 x^{f-1} + \cdots + g_f \equiv 0 \pmod{\pi} \text{ gewählt worden.}$$

Das obige Lemma erlaubte es Hensel, diese durch eine mod $\pi$ kongruente Wurzel von $g(x) = 0 \quad (p)$ zu ersetzen.[420]

Um auch $\pi$ zu modifizieren, konstruierte Hensel zunächst eine von $\pi$ erfüllte Gleichung. Es ist $\pi^e = pE = p(\varepsilon_0 + \varepsilon_1\pi + \dots) \quad (p)$ mit einer Einheit $E$. Ersetzt man in der Entwicklung von $E$ immer höhere Potenzen von $\pi$ gemäß der Gleichung $\pi^e = pE$, so erhält man eine Eisensteingleichung $(*)$ $\psi(\pi) = \pi^e + B_{e-1}\pi^{e-1} + \cdots + B_0 = 0 \quad (p)$, in der die $B_i$ Potenzreihen aus $K(\pi, \varepsilon)$ sind, wobei $B_0$ genau durch $p$ teilbar ist.[421]
Das neue $\overline{\pi}$ soll ebenfalls genau durch $p^{\frac{1}{e}}$ teilbar sein und eine Gleichung mit endlichen Koeffizienten erfüllen, konkret einen geeigneten Näherungswert von $(*)$. Sei $\varrho$ die Ordnungszahl von $\psi'(\pi)$ (in Bezug auf $\pi$) und $r := 2\varrho$, so erhält man nach dem Lemma wie gewünscht eine Wurzel $\overline{\pi}$ von $\psi_r(x) = 0 \quad (p)$, mit $\pi \equiv \overline{\pi} \bmod \pi^{\varrho}$.[422]

Für den Spezialfall, in dem $e$ nicht durch $p$ teilbar ist, $\psi'(\pi)$ also die Ordnungszahl $e-1$ hat, zitierte Hensel seine Untersuchung [40, 1902, §2] für das Resultat, man könne $\psi_0(\pi) = \pi^e - B_0 = \pi^e - p\varepsilon_0$ benutzen, wobei $\varepsilon_0$ eine reduzierte Einheit ist.

[416] Die Gleichung ist damit zumindest keine übliche Zerlegung in Linearfaktoren, weil sie den Schluß, eine Wurzel der Gleichung müsse einem der Faktoren entsprechen, nicht zulässt.
[417] [55, 1909, 200ff]. Sie liegt nicht im von der vorliegenden Arbeit behandelten Textkorpus, so daß sie hier nur am Rande auftaucht. In einer Fußnote ([55, 1909, 186]) hob Hensel hervor, Steinitz' noch unveröffentlichte Abhandlung zur abstrakten Körpertheorie [Steinitz, 1910] habe ihm wertvolle Anregungen gegeben. Steinitz nannte umgekehrt Hensels Arbeiten, vermutlich vor allem [47, 1904], als Motivation. Hensel behauptete in [55, 1909, 189ff] nicht mehr, eine weitere Wurzel müßte einer bereits konstruierten für den Bereich von $p$ *gleich* sein. Stattdessen arbeitete er mit dem Konzept *arithmetisch äquivalent*, das insbesondere berücksichtigte, daß je nach Wahl von $r$ verschiedene Wurzeln konstruiert wurden.
[418] Dabei sind die modifizierten $\varepsilon$ und $\pi$ im Unterschied zur Vorlesung diesmal keine algebraischen Zahlen.
[419] Das überlegt man sich leicht, wenn man sich klarmacht, wie man die ursprünglichen Entwicklungen berechnet bzw. mit ihnen rechnet. Hensel äußerte sich dazu nicht explizit.
[420] [49, 1905, 30]. Es hat $g(\varepsilon)$ mindestens Ordnungszahl 1, $g'(\varepsilon)$ jedoch Ordnungszahl Null.
[421] [49, 1905, 30]. Hensel bezeichnete die Einheit $E$ irritierenderweise mit dem bereits vergebenen $\varepsilon$.
[422] [49, 1905, 31]. Es ist $\psi_r(\pi)$ mindestens von der Ordnung $2\varrho + 1$, $\psi_r'(\pi)$ hingegen genau von der Ordnung $\varrho$, also ist das Lemma anwendbar.

Hensel faßte seine Resultate folgendermaßen zusammen:

> Jede Gleichung $n$-ten Grades besitzt für den Bereich einer jeden Primzahl genau so viele von einander verschiedene Wurzeln, als ihr Grad angibt. Jede derselben ist eine Potenzreihe in einem Bereiche $K(\varepsilon, \pi)$, in welchem $\varepsilon$ eine der Wurzeln der irreduktiblen *Gleichung* $f$-ten Grades
>
> $$g(\varepsilon) = \varepsilon^f + g_{f-1}\varepsilon^{f-1} + \cdots + g_0 = 0 \quad (p)$$
>
> ist, und $\pi$ einer irreduktiblen *Gleichung* $e$-ten Grades
>
> $$\psi(\pi) = \pi^e + pc_{e-1}\pi^{e-1} + \cdots + pc_0 = 0 \quad (p)$$
>
> genügt, wo die $c_i$ bestimmte ganze Zahlen von $K(\varepsilon)$ sind und $c_0$ durch $p$ nicht teilbar ist.[423]

Zum Abschluß kündigte Hensel an, sein Vorgehen lasse sich auf die unendliche Stelle ausdehnen:

> Das hier gegebene Resultat ist eine Erweiterung des Gaußschen Fundamentalsatzes der Algebra, daß jede algebraische Gleichung genau so viele reelle und komplexe Wurzeln besitzt, als ihr Grad angibt, und daß diese sich als reelle bezw. komplexe Dezimalbrüche darstellen lassen.
> Mit den hier gegebenen Mitteln läßt sich dieser Gaußsche Satz ebenfalls beweisen, und man kann auf ihn dann eine neue Theorie der Einheiten gründen, welche mit der der idealen Zahlen wörtlich übereinstimmt. Hierauf soll in einer späteren Arbeit genauer eingegangen werden.[424]

## 5.6 Falsche Transzendenzbeweise 1905 in Meran

Am 26.9.1905 hielt Hensel auf Wunsch des Vorstandes der Deutschen Mathematikervereinigung auf der Naturforscherversammlung in Meran einen Vortrag mit dem Titel *Über die arithmetischen Eigenschaften der algebraischen und transzendenten Zahlen.* In diesem wollte er die Leistungsfähigkeit seiner neuen Methoden dadurch demonstrieren, daß er zeigte, wie sie gleich eine Reihe von Transzendenzbeweisen ermöglichen. Die Fehlerhaftigkeit von Hensels Vorgehen wurde rasch erkannt. Dokumentiert ist, daß Perron in seinem Habilitationsvortrag am 30.6.1906 Hensels Vorgehen so umformulierte, daß eine Lücke sichtbar wurde.[425]

### 5.6.1 Vorstellung der $p$-adischen Zahlen

Hensel begann seinen Vortrag mit einem Vergleich zwischen "den beiden größten und wichtigsten Disziplinen der modernen Mathematik, der Funktionentheorie und der Zahlentheorie."[426] Er konstatierte eine weitgehende Analogie bezüglich der Resultate bei großer Verschiedenheit der Methoden, wobei die "Brauchbarkeit und Wirksamkeit ihrer Methoden sehr wesentlich zugunsten der Analysis ausfällt."[427] Besonders hob er die genauere Erkenntnis der transzendenten Funktionen hervor, die die moderne Funktionentheorie ermöglicht habe. Als Kriterium nannte er:

> Eine eindeutige Funktion ist dann und nur dann transzendent, wenn sie mindestens eine wesentlich singuläre Stelle hat.[428]

[423] [49, 1905, 32]. Hier tritt also am Rande noch der "Koeffizientenkörper" $K(\varepsilon)$ aus der Vorlesung auf, gemeint sind endliche Ausdrücke in $\varepsilon$.
[424] [49, 1905, 32].
[425] Abgedruckt als [Perron, 1907].
[426] [52, 1905, 545].
[427] [52, 1905, 545]. Dies überrascht weniger als Hensels Behauptung 1891, wo er quasi das Gegenteil behauptet hatte, vgl. den Abschnitt "Die Einleitung" in 3.1.2 und [9, 1891, 1f].
[428] [52, 1905, 546].

Solche kann man mit Hilfe von lokalen Darstellungen erkennen. Hensels behauptete, Transzendenzbeweise für Zahlen gelängen deshalb nicht, weil man keine weiteren Darstellungen zur Verfügung hätte. Also müsse man

> versuchen, statt der einzigen Darstellung durch einen Dezimalbruch unendlich viele andere zu finden, von denen jede einzelne uns einen neuen Aufschluß über das Verhältnis jener Zahl zu *einer* bestimmten ganzen Zahl gewährt.[429]

Daher habe er "jede rationale algebraische und transzendente Zahl $\gamma$ für den Bereich einer beliebigen Primzahl $p$ durch eine Reihe" dargestellt.[430] Weiter habe er gezeigt, daß sie "auf eine einzige Weise im s.g. *p-adischen Zahlensysteme*, d.h. in dem System mit der Grundzahl $p$ dargestellt werden kann."[431]
Der Ausdruck *p-adisch* tritt hier erstmals auf, die Aussage ist jedoch kaum greifbar, da transzendente Zahlen schwer zu beschreiben sind.[432]
Die angesprochene Darstellung sei bisher nur für die ganzen positiven Zahlen, welche "die Natur uns liefert",[433] bekannt gewesen. Die übrigen Zahlen (negative, gebrochene, irrationale) seien

> ja nur Rechnungssymbole [...], die man nach Belieben bezeichnen und mit ihnen rechnen kann[.][434]

Der Status der Objekte ist wie in [47, 1904]: *Die* Zahlen sind Symbole, die vermutlich durch die Operationen bestimmt sind und die man daher beliebig bezeichnen kann.
Hensels Erläuterungen passen zum Grundlagen- und Methodendiskurs der Berliner Schule, zeugen aber nicht von eigenem Interesse an den mathematikphilosophischen Fragen.

### Rationale $p$-adische Zahlen

Zur Motivation seiner Einführung der negativen Zahlen erinnerte Hensel daran, daß auch bei der Darstellung rationaler Zahlen als Dezimalbruch unendliche Dezimalbrüche zugelassen werden müssen, ihnen also "das gleiche Bürgerrecht mit den abbrechenden" gewährt werden muß.[435] Mit $a_0, a_1 \dots a_\varrho$ bezeichnete Hensel die natürliche Zahl $a_0 + a_1p + \dots + a_\varrho p^\varrho$. Die Darstellung der negativen Zahlen gelingt,

> wenn man dem Bereiche der abbrechenden $p$-adischen Zahlen $a_0, a_1 \dots a_\varrho$ auch alle diejenigen Zahlen
>
> $$a_0, a_1 \dots a_\varrho a_{\varrho+1} \dots = a_0 + a_1p + \dots + a_\varrho p^\varrho + \dots$$
>
> adjungiert, deren Ziffern nicht abbrechen, für welche aber ein solches Erzeugungsgesetz gegeben ist, daß diese Ziffern soweit, als man nur immer will, berechnet werden können.[436]

Diese Zahlen bezeichnete Hensel als *rationale p-adische Zahlen* und betonte, sie seien

> also reine Rechnungssysymbole, mit denen in gleich anzugebender bestimmter Weise gerechnet wird, und von denen ich nur weiß, daß alle *abbrechenden* $p$-adischen Zahlen mit den sämtlichen positiven Zahlen identisch sind.[437]

[429] [52, 1905, 546]. Diese Formulierung spricht Peter Ullrich (irritierenderweise) als Lokal-Global-*Prinzip* an, [Ullrich, 1999, 136].
[430] [52, 1905, 546].
[431] [52, 1905, 547]. Hervorhebung B.P.
[432] Da Hensels Beweisversuche indirekt waren, benötigte er für sie die Aussage für transzendente Zahlen nicht.
[433] [52, 1905, 547].
[434] Fortsetzung: "vorausgesetzt nur, daß die für die positiven ganzen Zahlen geltenden Rechengesetze auch für sie ungeändert bestehen bleiben,"[52, 1905, 547]. Ich habe diese *Permanenz der Rechengesetze* in eine Fußnote verbannt, weil sie spätestens seit den 1870er Jahren ein Allgemeinplatz der Diskussion war, den Hensel hier nur benutzte und nicht präzisierte.
[435] [52, 1905, 547]. Staatsmetaphern wie das "Bürgerrecht" sind in Aussagen von Mathematikern zu dieser Zeit nicht ungewöhnlich, vgl. z.B. [Klein, 1895, 232] und [Minkowski, 1905, 451].
[436] [52, 1905, 547f], die $a_i$ sind aus der Menge $\{0, 1, \dots, p-1\}$. Hensels Bestehen auf einem Erzeugungsgesetz ist dabei wiederum typisch für die auf Weierstrass und Kronecker zurückgehende Berliner Tradition der Arithmetisierung.
[437] [52, 1905, 548].

Daher fasse er die neu definierten Zahlgrößen nicht als Summe der Elemente, sondern als Aggregat der Ziffern auf. Die Operationen definierte er wiederum mit Hilfe der Näherungswerte, indem die Operationen mit den (endlichen) Näherungswerten die Näherungswerte des Ergebnisses ergeben. Zwei $p$-adische Zahlen sind gleich, wenn ihre Näherungswerte genügend hoher Ordnung für jede Potenz von $p$ kongruent sind. Hensel wies darauf hin, daß das elementare Rechnen "absolut ebenso wie mit den gewöhnlichen Dezimalbrüchen ausgeführt" wird, nur (in seiner Schreibweise) von links nach rechts.[438]

Hensels Vorstellungen standen jedoch in offenem Widerspruch zu seiner oben zitierten Behauptung, die $p$-adischen Zahlen seien reine Rechensymbole, über die man (wenn sie nicht abbrechen) nichts wissen könne. So behauptete er im Anschluß an die Definition der Operationen, die rationalen Zahlen seien mit den periodischen $p$-adischen Zahlen "identisch".[439] Noch deutlicher zeigt sich diese Diskrepanz in der folgenden Passage:

> Der so gewonnene große Bereich der rationalen $p$-adischen Zahlen enthält als Teilbereich die gewöhnlichen rationalen Zahlen, aber noch unendlich viele algebraische und transzendente Zahlen. Jedoch ist er noch nicht groß genug, um auch *alle* algebraischen zu umfassen; eine höchst einfache Erweiterung dieses Gebietes führt uns aber zu allen diesen Zahlen.[440]

**Algebraische $p$-adische Zahlen**

Den daran anschließenden Exkurs über die Zerlegung einer algebraischen Gleichung
$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (p)$ für den Bereich von $p$ begann Hensel mit der Definition, wann eine $p$-adische Zahl "konsequenter Weise" Wurzel einer solchen genannt werden soll,[441] nämlich wenn das Ergebnis bei Einsetzen eines ausreichend genauen Näherungswertes durch eine beliebig hohe Potenz von $p$ teilbar ist. Anschließend nannte er sein Resultat: In einem nochmal erweiterten Bereich gibt es genau $n$ ($p$-adische) Wurzeln $\xi_i$, mit deren Hilfe eine gewöhnliche Gleichung $n$-ten Grades in der Form $f(x) = a_0(x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_n) \qquad (p)$ zerlegt werden kann. Damit ergebe sich "die ganze Idealtheorie mit geradezu wunderbarer Einfachheit."

> Ich werde dies in einem hoffentlich noch in diesem Jahre erscheinenden Werke bis ins kleinste genau darlegen und habe die elementarsten Untersuchungen bereits in mehreren Abhandlungen veröffentlicht.[442]

Anschließend erläuterte Hensel die Gestalt der *algebraische $p$-adische Zahlen* genannten Objekte bzw. Gleichungswurzeln. Diese sind hier Reihen nach Potenzen von $\pi = \sqrt[e]{p}$, deren Koeffizienten $\varepsilon_i$ (neben 0) die $(p^f - 1)$ Potenzen einer primitiven $p^f - 1$-ten Einheitswurzel annehmen können.[443]

Um ihre Einführung zu rechtfertigen, bemühte Hensel noch einmal die Parallele zwischen $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{R}$: Bei den algebraischen $p$-adischen Zahlen handle es sich um

> neue Rechnungssymbole, denen wieder das gleiche Bürgerrecht zu gewähren ist, wie den positiven ganzen Zahlen. Ihre Einführung ist genau so notwendig, wie die Adjunktion der Zahl $i$, d.h. der Wurzel der quadratischen Gleichung $x^2 + 1 = 0$, und wir haben so das Resultat, daß jede Gleichung $n$ten Grades $n$ und nur $n$

[438] [52, 1905, 549].
[439] [52, 1905, 549].
[440] [52, 1905, 549].
[441] [52, 1905, 549].
[442] Beides [52, 1905, 550]. Wie bereits angemerkt, erschien das Buch erst 1908, [54, 1908]. Die angesprochenen Abhandlungen sind [47, 1904] und [49, 1905].
[443] Zumindest für diesen Vortrag sah Hensel von den Fragestellungen im Zusammenhang mit konkreten algebraischen Körpererweiterungen ab, die zu komplizierteren Konstruktionen für $\pi$ und $\varepsilon_i$ geführt hatten.

algebraische $p$-adische Zahlen als Wurzeln hat, welche mit jeder vorgegebenen Genauigkeit berechnet werden können.[444]

Während also die Zerlegung in Faktoren mit reellen Koeffizienten nur noch die Hinzunahme von $i$ erfordert, um zu den komplexen Wurzeln und Linearfaktoren zu gelangen, braucht man etwas kompliziertere Bestandteile, um zu algebraischen $p$-adischen Wurzeln und Linearfaktoren für den Bereich von $p$ zu gelangen.
Hensel erläuterte, daß man aus jeder $p$-adischen algebraischen Wurzel einer algebraischen Gleichung $\lambda = ef$ konjugierte Wurzeln erhält.[445] Sind diese $\xi_1, \ldots, \xi_\lambda$, so ist $f_0(x) = (x - \xi_1) \ldots (x - \xi_\lambda)$ ein irreduzibler Faktor von $f(x)$ mit rationalen $p$-adischen Koeffizienten. Es ergibt sich der Fundamentalsatz:

Jede Funktion $n$ten Grades $f(x)$ zerfällt im Gebiete der rationalen $p$-adischen Zahlen auf eine einzige Weise in irreduktible Faktoren

$$f(x) = f_0(x)f_1(x) \ldots f_{\nu_1}(x).$$

Jeder einzelne dieser irreduktiblen Faktoren, gleich Null gesetzt, besitzt soviele Wurzeln als sein Grad angibt, und diese bilden einen einzigen Zyklus konjugierter $p$-adischer Wurzeln der ursprünglichen Gleichung.[446]

Hensel hatte seine Theorie knapp vorgestellt, um Eigenschaften algebraischer Zahlen formulieren zu können, die schlußfolgern lassen, eine Zahl sei nicht algebraisch, sondern transzendent:

1. Jede algebraische Zahl $\gamma$ läßt sich nach ganzen Potenzen von $p^{\frac{1}{e}}$ entwickeln, mit $e < n, n$ fest. (Eine Zahl, die sich nur nach Potenzen von $p^{\frac{1}{p}}$ entwickeln läßt, muß transzendent sein.)
An dieser Stelle wird erstmals in diesem Vortrag eine Beziehung namens 'Entwickelbarkeit' zwischen den algebraischen Zahlen und den $p$-adischen algebraischen Zahlen behauptet, während es zuvor nur darum ging, ob die $p$-adische Gleichung genügend $p$-adische Wurzeln hat. Unklar ist an dieser Stelle vor allem, wie man nachweisen könnte, daß sich eine (z.B. transzendente) Zahl nicht nach bestimmten gebrochenen Potenzen von $p$ entwickeln läßt.

2. Jede algebraische Zahl genügt einer irreduziblen $p$-adischen Gleichung $\lambda$-ten Grades, $\lambda < n, n$ fest. (Eine Zahl, für die $\lambda$ mit $p$ unbegrenzt wächst, muß transzendent sein.)

3. Jede algebraische Zahl ist nur durch endlich viele Primzahlen (in ggf. gebrochener Potenz) teilbar. (Eine Zahl, die durch unendlich viele Primzahlen teilbar ist, ist transzendent.)

Für alle drei Schlußfolgerungen benötigt man für eine irgendwie gegebene Zahl $x$ eine Definition, wann sie durch eine (gebrochene) Potenz von $p$ teilbar heißen soll. Eine solche hatte Hensel (außer für algebraische Zahlen) noch nicht gegeben.

[444] [52, 1905, 551].
[445] Dabei werden für $\pi$ die verschiedenen $e$-ten Wurzeln aus $p$ und für $\varepsilon$ unabhängig davon die Zahlen $\varepsilon^{p^j}$ mit $j = 0, \ldots, f-1$ eingesetzt, [52, 1905, 551].
[446] [52, 1905, 551]. Hier wird die stets mitschwingende Aussage, daß die "minimale" lokale Konjugationsstruktur gefunden wurde, durch die Formulierung "einziger Zyklus" angesprochen.

### 5.6.2 Untersuchung von Reihen

Die "Untersuchung der transzendenten Zahlen"[447] begann Hensel mit der Definition von Betrag und *Größe für den Bereich von* $p$ für algebraische $p$-adische Zahlen mit festem $e$ und $f$. Dabei hängt anders als in [47, 1904] die Größe nur von der Ordnungszahl $r$ ab. Letztere ist durch $\gamma = \varepsilon \cdot p^{\frac{r}{e}}$ definiert, wobei $\varepsilon$ eine Einheit für den Bereich von $p$ ist. Der Absolutbetrag ist $|\gamma| = p^{\frac{r}{e}}$.

Maßgeblich für die Anordnung ist die $p$-adische Größendefinition, nach der eine Zahl sehr klein ist, wenn $r$ "eine sehr große *positive* Zahl", hingegen sehr groß ist, wenn $r$ "eine sehr große *negative* Zahl ist."[448]

Da auch die Absolutbeträge mit dem $p$-adischen Größenbegriff versehen sind, ergibt sich der folgende Umgebungsbegriff:

> Ist $x_0$ eine beliebige Zahl unseres Bereiches, so konstituieren alle Zahlen $x$ desselben die Umgebung von $x_0$, für welche der absolute Betrag $|x - x_0|$ unter einer gewissen Grenze $p^\varepsilon$ liegt.[449]

Hieran schloß Hensel die Betrachtung von Funktionen und Potenzreihen. Als Funktion bezeichnete er eine für jeden Wert eines ($p$-adischen) Zahlbereichs in endlich vielen Schritten beliebig genau ausführbare Rechenvorschrift. Als Beispiel nannte er rationale Funktionen mit (gewöhnlichen) rationalen Koeffizienten. Diese sind stetig und differenzierbar und die Ableitungen haben "dieselben Werte [...], wie bei der gewöhnlichen Anordnung der Zahlen nach ihrer Größe."[450]

Eine Potenzreihe $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ konvergiert genau da, wo sie berechenbar ist, d.h. $x$ muß

> alsdann auf ein Gebiet beschränkt werden, für welches [...] $y$ durch eine endliche Anzahl von Versuchen mit jeder vorgegebenen Genauigkeit berechnet werden kann.[451]

Die Definition des Absolutbetrags sichert, daß eine gewöhnliche Reihe $A_0 + A_1 + A_2 + \dots$ konvergiert, wenn die Reihe $|A_0| + |A_1| + |A_2| + \dots$ ihrer Beträge konvergiert.[452] Hensel konnte daher den Konvergenzbereich einer Potenzreihe $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ nach dem Satz von Cauchy-Hadamard folgendermaßen bestimmen: Ist $|a_n| = p^{\alpha_n}$ und $-\varrho_0 := \liminf \frac{\alpha_n}{n}$, "so konvergiert die Reihe $y$ für alle Zahlen $x = p^\varrho \varepsilon$, deren Exponent $\varrho > \varrho_0$ ist."[453]

Mit Hilfe dieser Ergebnisse bestimmte Hensel den Konvergenzradius der $e$-Funktion. Er untersuchte die "Konvergenz der Reihe

$$y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \dots n} + \dots$$

für den Bereich der $p$-adischen Zahlen,"[454] bestimmte also, für welche $p$-adischen Argumente die Reihe für den Bereich von $p$ konvergiert. Mit Hilfe einer Formel für die Ordnungszahl der Fakultät in Bezug auf

---

[447] [52, 1905, 552].

[448] [52, 1905, 553]. Später wurde es üblich, gleich $p^r$ zuzuordnen. Hensel nutzte hier die Freiheit der Definition auf eine spezifische Weise, so daß es unglücklich ist, über diesen Punkt (wie [Ullrich, 1998a, 322]) hinwegzugehen. Offenbar sollte für Hensel (in diesem Text) der Betrag eng mit der Zahl verbunden bleiben, während die Neudefinition der Ordnung ihn nicht störte.

[449] [52, 1905, 553]. Auch mit "unter" wird hier auf die $p$-adische Größe verwiesen.

[450] [52, 1905, 553]. "Eine Funktion $y = f(x)$ heißt für die Stelle $x$ stetig, wenn $\lim_{h=0}(f(x+h) - f(x)) = 0 \quad (p)$ ist, sie heißt differenzierbar, wenn

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

einen von dem Werte und von der Art des Abnehmens von $h$ unabhängigen Grenzwert besitzt," [52, 1905, 553].

[451] [52, 1905, 554].

[452] Dies bedeutet, daß es für jedes $r$ nur eine endliche Anzahl von Reihengliedern $A_i$ gibt, die genau durch $p^{\frac{r}{e}}$ teilbar sind.

[453] [52, 1905, 554]. Hierbei bedeutet '>' das gewöhnliche "größer".

[454] [52, 1905, 554].

$p$ erhielt Hensel das Resultat, die Reihe konvergiere für $x = p^{\frac{1}{p-1}+h} \cdot \varepsilon$, während sie für $x = p^{\frac{1}{p-1}-h} \cdot \varepsilon$ divergiere.[455]

Hensel erläuterte explizit, daß die obige Potenzreihe im Fall $p = 3$ für jede Einheit (also z.B. $x = 1$) divergiert, für jede durch $p$ teilbare Zahl (also z.B. $x = 3$) hingegen konvergiert. Er faßte seine Sicht der Situation für den Bereich von 3 folgendermaßen zusammen:

> Hieraus folgt nicht, daß die durch jenes Element definierte Funktion $y = \sum \frac{x^i}{i!}$ für $x = 1$ unendlich wird, sondern nur, daß dieses Funktionselement eben nicht zur Definition von $y$ für die Umgebung der Stelle $x = 1$ benutzt werden darf.[456]

Eine $p$-adische Funktion kann also in verschiedenen Umgebungen durch verschiedene 'Funktionselemente' beschrieben werden. Ein festes 'Funktionselement' kann eine Funktion in einigen Umgebungen bechreiben, in anderen hingegen nicht.

Hensel behauptete, die "auseinandergesetzten einfachen Prinzipien" gestatteten einen "Einblick in die arithmetischen Eigenschaften der transzendenten Zahlen und Funktionen", ihre Transzendenz sei nur "die erste und einfachste" dieser Eigenschaften und er wolle die "Untersuchungsmethode" am Beispiel der Exponentialfunktion erläutern.[457]

**Der Beweisversuch**

Im folgenden rekapitulierte Hensel Eigenschaften der Exponentialfunktion, um diese Eigenschaften auf eine Exponentialfunktion für den Bereich von $p$ zu übertragen:

> Ich definiere die Exponentialfunktion $E(x)$ wie gewöhnlich durch die Funktionalgleichung $E(x + y) = E(x)E(y)$ mit der Maßgabe, daß $E'(0) = 1$ sein soll. Dann gelangt man auf dem gewöhnlichen Wege dazu, daß $E(x)$ einmal durch die Potenzreihe:
>
> $$(10) \qquad E(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$
>
> definiert ist, sobald $x$ innerhalb des Konvergenzbereiches dieser Reihe gewählt wird, das andere Mal durch die Exponentialgleichung: $(10a) \quad E(x) = (E(1))^x = e^x$, wenn eben unter $e$ der Wert von $E(1)$ verstanden wird.[458]

Der folgende Abschnitt läßt verschiedene Interpretationen zu:

> Ich untersuche nun die so definierte Funktion für den Bereich einer beliebigen ungeraden Primzahl $p$; auch für sie gelten die beiden soeben gefundenen Gleichungen (10) und (10a), die Reihendarstellung aber nur für die Zahlen $x$, für welche jene Reihe konvergiert.[459]

Vermutlich meinte Hensel hier, er untersuche diejenige Funktion, die für den Bereich von $p$ ebenso definiert wird. (Und nicht: Die gerade definierte Exponentialfunktion werde für den Bereich von $p$ untersucht.)

[455] Er erhielt $\frac{\alpha_n}{n} = \frac{\frac{s_n}{n}-1}{p-1}$, worin $s_n$ die $p$-adische Ziffernsumme von $n$ bezeichnet, denn die Ordnungszahl von $n!$ bezüglich $p$ ist $\frac{n-s_n}{p-1}$. Daraus ergibt sich sofort $\varrho_0 = \frac{1}{p-1}$ und damit die obige Aussage, [52, 1905, 554f].

[456] [52, 1905, 555].

[457] Alle [52, 1905, 555].

[458] [52, 1905, 555f].

[459] [52, 1905, 556].

Diese hat dann $p$-adische Argumente.[460]

Hensel leitete aus den obigen Gleichungen (10) und (10a) für die neue Exponentialfunktion für den Bereich von $p$ mittels $x = p$ eine irreduzible Gleichung für $e$ ab. Es gilt:

$$E(p) = e^p = 1 + \frac{p}{1} + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^3}{3!} + \cdots = 1 + p(1 + a_1 p + \dots) = 1 + p\varepsilon \qquad (p),$$

wobei $\varepsilon$ eine "Einheit des $p$-adischen Zahlensystems" ist.[461] Also erfüllt $e$ die Gleichung $y^p = 1+p\varepsilon$, deren Irreduzibilität Hensel mit Hilfe der Substitution $y = z + 1$ und dem Eisensteinkriterium nachwies.[462]
Nach der (oben in Klammern stehenden) alternativen Interpretation würde man diese Gleichung direkt durch Betrachtung der gewöhnlichen Gleichung für den Bereich von $p$ erhalten. Es ist jedoch unwahrscheinlich, daß Hensel annahm, in einer relativ flexiblen Reihe könne die starre Information für eine Folge von Kongruenzen kodiert sein. In späteren Arbeiten nutzte er umgekehrt die Möglichkeit, die Glieder einer (komplexen) Reihe so zu bestimmen, daß sie für *ein* $p$ einen gewünschten $p$-adischen Grenzwert hat.[463]

Für seinen indirekten Beweis nahm Hensel an, $e$ sei Wurzel einer algebraischen Gleichung $n$-ten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann würde $e$ dieser auch für den Bereich von $p$ genügen und wäre daher Wurzel einer irreduziblen Gleichung mit rationalen $p$-adischen Koeffizienten vom Grad kleiner oder gleich $n$. Für $p > n$ ergibt sich daraus ein Widerspruch, denn aufgrund der Eindeutigkeit der Zerlegung in irreduzible Polynome mit (rationalen) $p$-adischen Koeffizienten kann $e$ nicht Wurzel verschiedener irreduzibler Gleichungen sein.

**Was ist hier passiert?** Perron wies in seiner Kritik darauf hin, daß die verschiedenen Exponentialfunktionen für den Bereich von $p$, die man z.B. mit $E_p(x)$ bezeichnen könnte, auch zunächst verschiedene Funktionswerte $e_p := E_p(1)$ an der Stelle Eins hätten. Dann sei nicht klar, welcher Zusammenhang zwischen $e_p$ und $e_q$ (für $p \neq q$), sowie $e$ bestünde.[464]
Hensel setzte voraus, die Beschreibungen der Größe nach seien auf der gleichen Ebene wie die Beschreibungen für den Bereich von $p$. Weiter war er der festen Überzeugung, die gleichzeitige Betrachtung der verschiedenen lokalen Beschreibungen sei nützlich. Daher prüfte er ungenügend, welcher Zusammenhang zwischen den verschiedenen Exponentialfunktionen besteht.[465]

Peter Ullrich hat darauf hingewiesen, daß darüberhinaus ein technisches Problem mit Hensels durch die oben zitierten Formulierungen "wie gewöhnlich" und "auf dem gewöhnlichen Wege" angedeutetem

[460] Peter Ullrich interpretiert Hensel nochmals abweichend so, daß die Funktion "sowohl reelle als auch $p$-adische Argumente haben kann, und zwar für jede Primzahl $p$," [Ullrich, 1998a, 323]. Dies erscheint jedoch unwahrscheinlich angesichts von Hensels Grundgedanken, einen Vorteil durch Konzentration auf ein $p$ zu erlangen. Vermutlich stammen die Argumente aus $K(p)$.
[461] [52, 1905, 556].
[462] [52, 1905, 556]. Die Gleichung wird im nächsten Abschnitt noch benutzt und daher dort zitiert.
[463] Vgl. zum Beispiel [53, 1907].
[464] Dies gibt nicht genau Perrons Text wieder, sondern ist eine Interpretation, die von Hensels Text zu Perrons "verschiedenen Zahlen $e$" aus verschiedenen $p$-adischen Körpern führt, [Perron, 1907, 153].
[465] Hingegen trennte Hensel den reellen und den $p$-adischen Konvergenzprozeß konzeptionell. Daher ist es irreführend, das Hauptproblem in den möglicherweise verschiedenen reellen bzw. $p$-adischen Grenzwerten einer Reihe zu sehen, wie es [Ullrich, 1998a, 324] und [Ullrich, 1995, 463] vereinfachend nahelegt.

Vorgehen besteht, denn die Exponentialfunktion auf $\mathbb{Q}_p$ kann nur indirekt als die mehrdeutige Umkehrfunktion der Logarithmusfunktion definiert werden.[466]

**Weitere Anwendungen**

Aus den von ihm abgeleiteten Gleichungen zog Hensel noch weitere Schlußfolgerungen. Setzt man in $y^p = 1 + p\varepsilon$ wie angesprochen $y = z + 1$ ein, so folgt für $z = e - 1$ die Gleichung

$$z^p + pz^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} z^{p-2} + \cdots + pz - p\varepsilon = 0$$

und aus dieser, daß $e-1$ genau durch $p^{\frac{1}{p}}$ teilbar ist. Dann kann $e-1$ nicht algebraisch vom Grad $n$ sein, denn dann müßte es mindestens durch $p^{\frac{1}{n}}$ teilbar sein,[467] was für $p > n$ auf einen Widerspruch führt. Alternativ kann man schlußfolgern, daß $e-1$ nicht algebraisch ist, weil eine algebraische Zahl nur endlich viele Primzahlen in positiver oder negativer (gebrochener) Potenz enthält.[468]

Anschließend modifizierte und iterierte Hensel seine Argumente. Sei dazu $\gamma$ eine Einheit für den Bereich von $p$. Dann erhält man für $y = e^\gamma$ ebenfalls eine Gleichung $y^p = 1 + p\varepsilon$, nämlich mit $\varepsilon = \gamma + \frac{p\gamma^2}{2!} + \ldots$, denn es ist $y^p = e^{p\gamma} = 1 + \frac{p\gamma}{1} + \frac{p^2\gamma^2}{2!} + \ldots$. Dann ist (mit dem gleichen Argument wie oben) auch $e^\gamma - 1$ genau durch $p^{\frac{1}{p}}$ teilbar und Hensel formulierte als Schlußfolgerung:

> Ist $\gamma$ eine Zahl, von der man weiß, daß sie in bezug auf die Primzahlen $p_1, p_2, \ldots$ eine Einheit ist, so ist $e^\gamma$ in Bezug auf dieselben Primzahlen eine Einheit, und zwar ist $e^\gamma - 1$ genau durch das über alle diese Primzahlen erstreckte Produkt $\prod p_i^{\frac{1}{p_i}}$ teilbar.[469]

Hieraus folgt zunächst, daß für algebraisches $\gamma$ die Zahl $e^\gamma$ transzendent ist, denn dann ist $\gamma$ für unendlich viele Primzahlen eine Einheit. Hensel schlußfolgerte hieraus die Transzendenz von $\pi$, denn es ist $e^{i\pi} = -1$, und wäre $\pi$ (und damit $i\pi$) algebraisch, dann müßte $-1$ transzendent sein.
Weiter folgt aber daraus, daß $e$ eine Einheit für alle Primzahlen ist, da $e-1$ "durch jede Primzahl teilbar" ist.[470] Also ist auch $e^e - 1$ durch jedes $p^{\frac{1}{p}}$ teilbar, damit ist $e^e$ transzendent und eine Einheit für alle $p$, schließlich ist $e^{e^e}$ transzendent usw.[471]
Hensel kündigte weitere Resultate an

> Es liegt nahe, mit diesen Hilfsmitteln nun auch andere transzendente, besonders die elliptischen Funktionen genauer zu untersuchen. Ich habe diese Untersuchungen bereits begonnen; sie bieten keine prinzipiellen Schwierigkeiten, und ich behalte mir vor auf ihre Resultate zurückzukommen.[472]

und faßte zusammen, er habe gezeigt, daß

> das Reich der Arithmetik, dieser Königin der Mathematik, auch noch über die Algebra hinaus auf die transzendenten Funktionen ausgedehnt werden kann, ohne daß die Einfachheit und Allgemeinheit der in ihrem Königreiche geltenden Gesetze auch nur die geringste Einbuße erleidet.[473]

[466] [Ullrich, 1998a, 326].
[467] Oder durch gar keine (gebrochene) Potenz von $p$.
[468] Diese Beweisvariante stammte von einem Studenten Hensels (Jordan), was belegt, daß Hensels Überlegungen nicht völlig ungeprüft waren, [52, 1905, 557].
[469] [52, 1905, 558].
[470] [52, 1905, 558]. Gemeint ist wieder durch eine positive (oder negative) gebrochene Potenz der Primzahl.
[471] [52, 1905, 558].
[472] [52, 1905, 558]. Hensels Ziel war es offenbar, die Funktionswerte einer transzendenten Funktion arithmetisch zu untersuchen.
[473] [52, 1905, 558].

Während Dirichlet, an dessen hundertsten Geburtstag Hensel en passant erinnerte, die Analysis in den Dienst der Arithmetik gezwungen habe, könne man aufgrund der "Lebensarbeit von Gauß, Dirichlet, Kummer, Kronecker und Dedekind" hoffen, daß die Zahlentheorie "jetzt stark genug sei, die Dienste in etwa zu vergelten, welche sie damals von der Analysis annahm."[474]

### 5.6.3 Der Status der Objekte 1902 - 1905 und später

Diese Zusammenfassung beginnt mit einer Beschreibung von Hensels Vorstellungen, wie sie sich aus dem Vortrag in Meran ableiten lassen. Anschließend wird untersucht, ob bzw. wie sich diese Vorstellungen zwischen 1902 und 1905 veränderten, und was sich davon direkt in den Arbeiten niederschlägt.

#### Hensels Bild der Situation in Meran

Hensels Vortrag unterscheidet sich sowohl in den Objekten, als auch in den Methoden deutlich von den Arbeiten zuvor. Daher enthält dieser Abschnitt wirklich nur Schlußfolgerungen aus diesem Vortrag.
Hensels (etwas überraschende) Grundannahme war, man könne transzendenten Objekten arithmetische Eigenschaften zuschreiben. Eng verwandt damit ist eine Überzeugung Hensels, die sich nur schwer präzise ausdrücken läßt, nämlich:
*Es gibt allgemeine Fälle, in denen für eine Zahlgröße $x$ und ein $p$ eine Entwicklung von $x$ für den Bereich von $p$ (mit geeigneten Koeffizienten) bekannt sein könnte.*[475]

Die rationalen und algebraischen $p$-adischen Zahlen, die Hensel eingeführt hatte, reichen aus, um solche Entwicklungen für alle algebraischen Zahlen zu bestimmen. Zu transzendenten Zahlen hatte Hensel sich noch nicht konkret geäußert. Klar ist jedoch, daß er der Meinung war, auch transzendente Zahlen könnten rationale $p$-adische Entwicklungen haben. Die gewöhnliche Dezimalbruchentwicklung sollte den $p$-adischen Entwicklungen (nur) gleichberechtigt sein.

Hensel äußerte sich implizit bejahend zu der Frage, ob jede $p$-adische Reihe als Entwicklung einer Zahlgröße vorkommt.[476] In den heutigen Begrifflichkeiten würde man Hensels Vorstellungen vermutlich folgendermaßen beschreiben:
Die (rationalen) $p$-adischen Zahlen sind in die komplexen Zahlen eingebettet.[477] Für jede algebraische Zahl gibt es umgekehrt einen $p$-adischen Bereich $K(p, \alpha)$ (in Hensels Notation), der sie enthält. Alle algebraischen Zahlen $\overline{\mathbb{Q}}$ können in einen Bereich aller algebraischen $p$-adischen Zahlen eingebettet werden. Bezeichnet man die Vervollständigung von $\overline{\mathbb{Q}_p}$ mit $\mathbb{C}_p$, so ergibt sich:

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p \hookrightarrow \mathbb{C}, \qquad \mathbb{Q} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_p.$$

[474] [52, 1905, 558].
[475] Es ist hierbei weder klar, was genau 'Zahlgröße' bedeutet, wie eine solche beschrieben werden könnte, noch worin sich "Entwicklung" zeigt. Eventuell würde Hensel dies sogar für alle $x$ und alle $p$ behaupten.
[476] Vgl. seine oben zitierte Aussage, von den rationalen $p$-adischen Zahlen seien einige transzendent, [52, 1905, 549], zitiert mit Fußnote 441.
[477] Hensel hatte darauf hingewiesen, daß viele von ihnen (in $K(p)$) keine Quadratwurzel besitzen.

**Veränderungen zwischen 1902 und 1905**

Außer in dem Vortrag in Meran präsentierte Hensel jeweils (mehr oder weniger ausführlich) ein Lokal-Global-Wunschszenario, mit dem er Transzendenzaussagen beweisen wollte: Kann man entscheiden, ob eine 'Zahlgröße $y$' für ein beliebig gegebenes $p$ eine Entwicklung algebraischen Charakters nach (gebrochenen) Potenzen von $p$ hat, so sollte aus der Existenz aller dieser Entwicklungen folgen, daß die Zahlgröße algebraisch ist (ohne daß die dann bestehende Periodizität gefordert wird). Existiert hingegen für $y$ und ein $p$ keine solche Entwicklung, so ist $y$ transzendent.
Nach seinen Meraner Überlegungen wäre es hingegen zunächst nicht ausgeschlossen, daß eine Zahl, die überall Entwicklungen algebraischen Charakters hat, trotzdem transzendent sein muß.

In der Vorlesung 1902 entwickelte Hensel eine Betrachtungsweise für den Bereich zu $p$, für die er einen Äquivalenzbegriff einführte. Diesen baute er in den Veröffentlichungen 1904/05 zu einem neuen Gleichheitsbegriff um.
Am Anfang der Vorlesung ist die enge Beziehung zwischen einer (beliebigen) Zahlgröße und ihrer Entwicklung für den Bereich von $p$ deutlich präsent: Zunächst werden die Zahlgrößen algebraischen Charakters, die also eine Entwicklung eines bestimmten Typs haben, zusammengefaßt. Die Objekte sind daher diejenigen (alten) Zahlgrößen, denen ein neuer (allgemeinerer) Typ von Entwicklungen entspricht.[478]
Nach Hensels Betrachtungen zu den Zahlen, die überall rationalen Charakter haben, könnte man spekulieren, ob verschiedene Zahlgrößen die gleiche Entwicklung für den Bereich von $p$ haben können. Es gibt jedoch im Text zahlreiche Argumente, die dagegen sprechen.[479]
Hensel wechselte unproblematisch zwischen den Ebenen und brachte jede auftauchende Entwicklung mit einer Zahlgröße in Verbindung. Begrifflich operierte er aber meist mit den Zahlgrößen und nur sehr selten mit ihren Entwicklungen.

Gegen Ende der Vorlesung hatte Hensel sein Vorgehen revidiert: Bei der Betrachtung des relativen Falls sind Potenzreihen aus $K(\pi, \varepsilon)$ die relevanten Objekte und die als Potenzreihen (in $K(\pi_0, \varepsilon_0)$) konstruierten Wurzeln entsprechen nur noch als Menge den algebraischen Wurzeln der Ausgangsgleichung. Die auftretenden Potenzreihen behalten daher ihren Charakter als selbständige Objekte und mathematisches Hilfsmittel für die Situation.

In den Arbeiten [47, 1904] und [49, 1905] führte Hensel die Elemente von $K(p)$ und $K(p, \alpha)$ als strikt selbständige Objekte ein. Diese Einführung wirkt sehr abstrakt. Hensel übernimmt dabei den Theorierahmen, den er als Mitglied der Berliner Schule zur Verfügung hatte. Die Elemente von $K(p)$ bekommen dabei den gleichen Status wie die reellen Zahlen. Hensel bezeichnete sie ausdrücklich als 'Zahlen' und gab keine Andeutungen, wie sie mit nicht-algebraischen Zahlen in Verbindung stehen könnten.
Im Vortrag in Meran hingegen kamen auch die Vorstellungen, die Hensel mit den $p$-adischen Zahlen verband, zum Ausdruck. So behauptete er, viele der rationalen $p$-adischen Zahlen seien transzendent. Der

[478] Hensel wies nicht nur für Zahlen aus $K(\alpha)$, sondern auch für bestimmte andere algebraische Zahlen nach, daß es für sie eine Entwicklung in $K(\alpha, p)$ gibt. Er zeigte aber an keiner Stelle, daß es für eine Zahlgröße keine solche Entwicklung gibt.
[479] Vgl. FN 47, 58 und 109.

Beweisversuch enthält einen wesentlich neuen Ansatz: Hensel versuchte, eine durch Funktionalgleichungen bestimmte Funktion für verschiedene lokale Wertebereiche einzuführen.[480]

Zu Beginn der Vorlesung waren die Objekte, die man heute $p$-adische Zahlen nennen würde (wohldefinierte $p$-Reihen, allgemeine Entwicklungen) selbständiger als die den algebraischen Zahlen zugeordneten Potenzreihen (z.B. in [40, 1902]), da sie in den Zerlegungen für den Bereich von $p$ zunächst ohne Entsprechung *auftraten* oder den Ausgangspunkt für die Konstruktion einer weiteren (algebraischen) Zahl bildeten. Trotzdem waren sie mit bestehenden Objekten, den (für uns vagen) Zahlgrößen verbunden.
Am Ende der Vorlesung sind die (verschiedenen algebraischen) $p$-adischen Zahlen unabhängige Objekte (die nicht mehr mit einer Zahlgröße in Verbindung gebracht werden), die aber einer konkreten mathematischen Situation zugeordnet sind.
Die starke Wirkung, die von der Arbeit [47, 1904] ausging, lag an dem Nachdruck, mit dem in ihr die unabhängige Existenz der $p$-adischen Zahlen postuliert wurde. Hensel zeigte dementsprechend ein Szenario, in dem seine Theorie (außer zu den rationalen Zahlen) keinerlei Berührungspunkte zu anderer Mathematik hatte.[481]

**Post an Hasse - der Stand 1920**

Einen Anhaltspunkt dafür, daß Hensel seine grundlegenden Vorstellungen nicht verworfen hatte, gibt die berühmt gewordene Postkarte an Hasse aus dem Jahr 1920:

> Ich habe immer die Idee, daß da eine ganz bestimmte Frage zu Grunde liegt. Wenn ich von einer analytischen Funktion weiß, daß sie an allen Stellen rationalen Charakter hat, so ist sie rational. Wenn ich bei einer Zahl dasselbe weiß, daß sie für den Bereich jeder Primzahl $p$ und für $p_\infty$ $p$-adisch ist, so weiß ich noch nicht, ob sie eine rationale Zahl ist. Wie wäre das zu ergänzen?[482]

Hensel hatte 1902 behauptet, er könne diese Aussage beweisen.[483] Hier soll sie in drei Fälle zerlegt werden, deren mathematischer Inhalt einzeln beleuchtet wird:
Der erste Fall ist derjenige, in dem die angesprochene Zahl $\alpha$ algebraisch ist und der Zahlkörper $\mathbb{Q}(\alpha)$ galoissch. Hat dann $\alpha$ überall rationalen Charakter bzw. ist $p$-adisch für jede Primzahl $p$, so ist $\alpha$ rational. Dies folgt aus dem Satz von Minkowski über die Diskriminante eines Zahlkörpers. Da diese nicht Eins sein kann, muß es eine verzweigte Primzahl $q$ geben. Dann folgt aus Hensels Theorie, daß es Elemente gibt, die durch eine gebrochene Potenz von $q$ genau teilbar sind und daher nicht $q$-adisch.[484]
Der zweite Fall ist derjenige, in dem $\alpha$ algebraisch ist, aber $\mathbb{Q}(\alpha)$ nicht galoissch. Dann entspricht Hensels Aussage die Frage, ob $\alpha$ bereits dann rational ist, wenn es für jede Primzahl $p$ ein Primideal $P$ über $p$ gibt, das unverzweigt ist und dessen Restklassenkörper Grad Eins hat.[485] Die Antwort auf diese Frage ist positiv. Den folgenden Beweis verdanke ich René Schoof. Er benutzt den Chebotarev'schen Dichtigkeitssatz,

[480] Danach kehrte er zu seiner ursprünglichen Lokal-Global-Idee zurück, vgl. den letzten Abschnitt dieses Kapitels.
[481] Diese starke Wirkung würde vermutlich vernichtet, wenn man in [47, 1904] lesen könnte, einige der $p$-adischen Zahlen seien transzendente Zahlen, andere algebraisch. Die strukturellen Analogien führen nach meiner Ausdrucksweise zu einer Art Parallelexistenz, nicht zu Berührungen.
[482] Zitiert nach [Hasse, 1962, 4], vgl. auch [Frei, 2001].
[483] Vgl. 5.1.1.
[484] Vgl. 5.5.
[485] [Ullrich, 1998, 174] sieht diese schärfere Aussage offenbar nicht, wenn er ausführt, Hensels Behauptung folge fr beliebige algebraische Zahlen aus dem Satz von Minkowski.

den dieser 1922 in seiner Dissertation bewies.[486]

> Sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, $f$ das Minimalpolynom von $\alpha$ über $\mathbb{Q}$, $G$ die Galoisgruppe eines normalen Abschlusses von $K$. Dann operiert $G$ transitiv auf der Menge $X$ der Wurzeln von $f$. Hensels Bedingung, daß $\alpha$ von rationalem Charakter für jedes $p$ ist, übersetzt sich in die Bedingung, daß jedes Frobeniuselement in $G$ einen Fixpunkt in $X$ hat. Nach Chebotarev folgt daraus, daß jedes Element $s \in G$ einen Fixpunkt in $X$ besitzt. Es gilt
>
> $$\sum_s \#\ \mathrm{Fix(s)} = \sum_{\alpha_i} \#\ \mathrm{Stab}(\alpha_i),$$
>
> wobei $\mathrm{Fix}(s)$ die Menge der Fixpunkte von $s$ ist und $\mathrm{Stab}(\alpha_i)$ die Untergruppe von $G$, die $\alpha_i$ festhält. Da $G$ transitiv operiert, hat jeder Stabilisator $\frac{\# G}{\# X}$ Elemente und auf der rechten Seite der Formel steht $\# X \cdot \frac{\# G}{\# X} = \# G$. Da jedes $s \in G$ einen Fixpunkt hat, ist die linke Seite größer oder gleich $(\# G - 1) + \# X$. Damit ist $(\# G - 1) + \# X \leq \# G$, also $\# X = 1$ und $K = \mathbb{Q}$.

Ob Hensel einen Beweis für die angesprochene Aussage kannte, ist nicht belegt. In der Tat läßt sich die von Hensel benötigte Aussage auch aus einem Satz von Frobenius ableiten.[487]

Der dritte Fall ist schließlich der, in dem $\alpha$ transzendent ist. Die Erwähnung der analytischen Funktionen im Text der Postkarte scheint darauf hinzudeuten, dass Hensel zumindest *auch* diesen im Jahr 1920 noch ins Auge faßte. Hensels Ansatz wurde nicht vervollständigt, aus heutiger Sicht scheint dies auch unmöglich.[488]

[486] Zu Chebotaryov vgl. [Lenstra/Stevenhagen, 1996], für eine Veröffentlichung seiner Dissertation vgl. [Chebotaryov, 1922].
[487] Vgl. [Lenstra/Stevenhagen, 1996, 32] und [Frobenius, 1896]. Es wurde oben bereits darauf hingewiesen, daß Hensel und Frobenius befreundet waren. Die Arbeit [Frobenius, 1896] wurde von Frobenius bereits 1880 verfaßt, ihre Veröffentlichung verzögerte sich aber, da Dedekind 1882 brieflich Prioritätsansprüche anmeldete. Dedekind veröffentlichte schließlich 1894 den an Frobenius verfaßten Brief [Dedekind, 1894], letzterer daraufhin 1896 die Arbeit. Ob es einen Anlaß für diese beiden Veröffentlichungen gab, ist nicht bekannt.
[488] Dies könnte auch daran liegen, daß die richtige Interpretation von Hensels Andeutungen noch nicht gefunden wurde...

# Kapitel 6

# Technische Zusammenfassung

Die folgende Graphik soll die Entwicklung von Hensels Überlegungen veranschaulichen. Ein Rechteck entspricht dabei in etwa einer epistemischen Konfiguration im Sinne von Moritz Epple: Epple adaptiert den Begriff der epistemischen Konfiguration von Rheinberger, indem er als eine solche ein epistemisches Objekt und eine epistemische Technik zusammenfaßt.[1] Da Hensels Fragestellungen nicht in einem offensichtlichen Sinn objektbezogen sind, wird hier statt eines epistemischen Objekts ein zusammengesetzter Ausgangspunkt gewählt:

Dieser Ausgangspunkt besteht nicht nur aus einer mathematische Fragestellung bzw. Aufgabe, sondern auch aus den mathematischen Begriffen, die für diese benötigt werden. Zusätzlich können mathematische Techniken hinzukommen, z.B. wenn auch diese zur Formulierung der Aufgabe nötig sind oder wenn sie für Hensel standardmäßig mit der Aufgabe verbunden waren.

Zu diesem Ausgangspunkt kommen epistemische Techniken. Dies können einerseits mathematische Techniken sein, die ursprünglich im Zusammenhang mit anderen Fragestellungen standen und von Hensel an seine Bedürfnisse angepaßt wurden. Andererseits gibt es aber auch *neue* epistemische Techniken, die Hensel selbst zur Bearbeitung seiner Zielstellung entwickelte.

In der Graphik dient die erste Zeile der Einordnung, d.h. sie erläutert Chronologie, Kapitel und grobe Situation. Die zweite Zeile deutet die gelöste Aufgabe an. Schließlich werden im unteren Teil die wesentlichen epistemischen Techniken benannt, anhand derer auch die gekennzeichneten Zusammenhänge deutlich werden.

[1] Vgl. [Epple, 1999, 14-17] bzw. [Rheinberger, 1992].

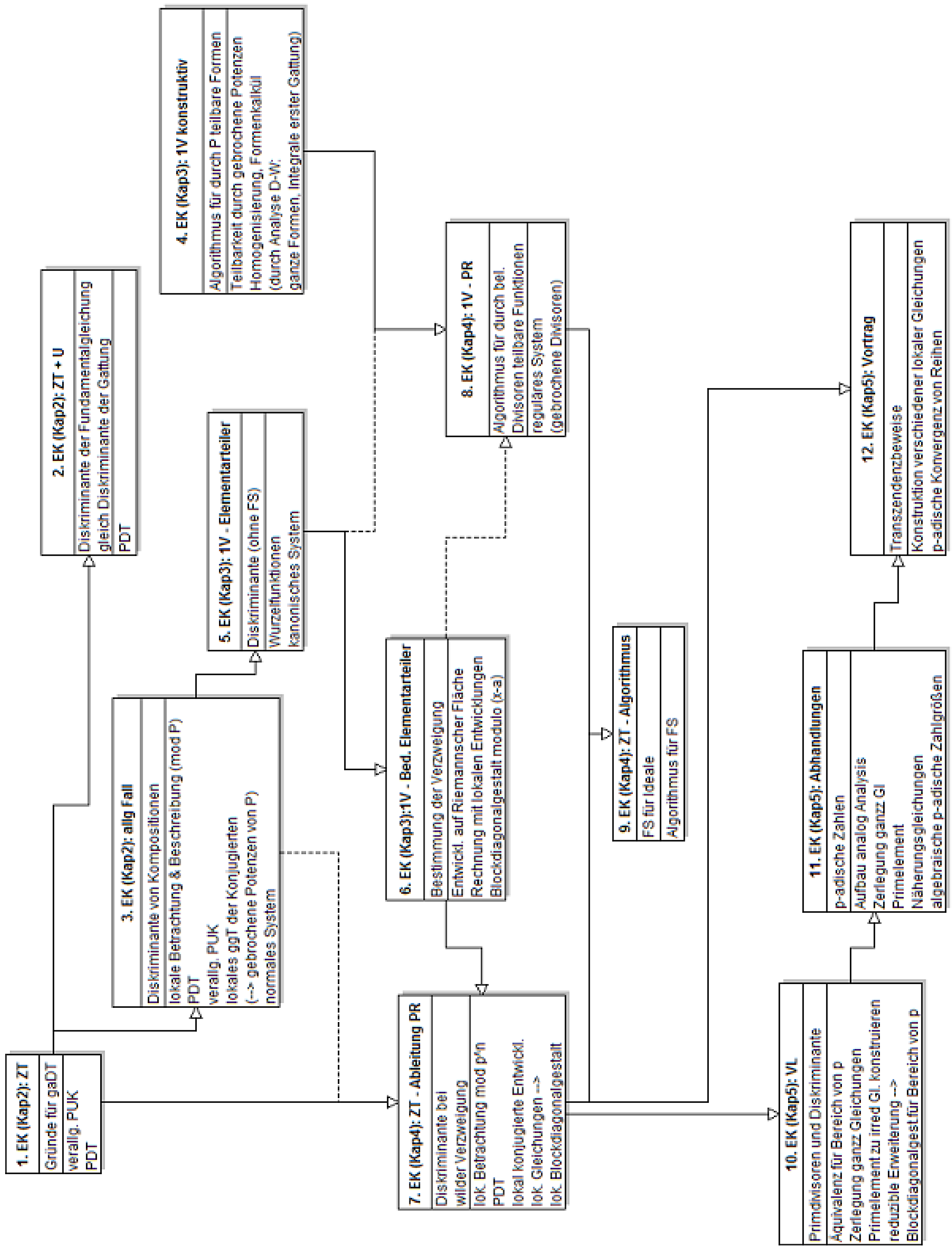


Abb. 1: Ein Überblick über die epistemischen Konfigurationen in den Arbeiten Hensels, die zur Entstehung der $p$-adischen Zahlen führten

**Zu Kapitel 2**

In seinen ersten mathematischen Untersuchungen fragte Hensel nach Gründen für das Auftreten der gaDT im zahlentheoretischen Fall. (Dabei beschränkte er sich auf den Fall, in dem die zu untersuchende Primzahl $q$ nicht in der Diskriminante des Zahlkörpers vorkommt.) Als epistemische Technik nutzte er (Kroneckers) Primdivisortheorie.
Weiter wendete Hensel die für ihn spezifische epistemische Technik der *Verallgemeinerung der Periodenunterkörper* an. Zuerst betrachtete er die Periodenunterkörper des Körpers der 13. Einheitswurzeln. Von seinen Ergebnissen in diesem Spezialfall ausgehend behandelte er als nächstes Periodenunterkörper beliebiger Kreisteilungskörper. Weiter versuchte er die gewonnenen Aussagen auf galoissche Zahlkörper und schließlich auf beliebige Zahlkörper zu übertragen.
Die Periodenunterkörper fungierten dabei als *Modellobjekte*, d.h. Hensel suchte gezielt nach Überlegungen, die er schrittweise auf die allgemeineren Fälle übertragen konnte. Während solche Modellobjekte oft schwer bzw. nicht eindeutig zu identifizieren sind, ist das im vorliegenden Fall möglich, weil unveröffentlichte Quellen die spezielleren Teile der Theorie enthalten.
So bemerkte Hensel im Fall der Periodenunterkörper, daß die Reste (bezüglich eines Primdivisors) der Konjugierten eines Elements nicht beliebig sind, sondern Zyklen bilden. Alle Reste eines Zyklus sind dabei durch einen von ihnen bestimmt, konkret sind sie über einem Unterkörper konjugiert. Die Kriterien für die gaDT folgten aus den möglichen Anzahlen solcher Zyklen.

Anschließend beschäftigte sich Hensel mit Kroneckers Theorie der algebraischen Zahlen. Dieser arbeitete systematisch mit dem "methodische[n] Hülfsmittel der unbestimmten Coëfficienten."[2] So bildete er aus einer Ganzheitsbasis die *Fundamentalform*, eine lineare Form in $n$ Unbestimmten, die die Elemente der Ganzheitsbasis als Koeffizienten hat. Diese Form verkörpert alle algebraisch ganzen Zahlen - man erhält letztere, indem man statt der Unbestimmten geeignete rationale ganze Zahlen einsetzt. Betrachtet man die Minimalgleichung dieser Form und die Diskriminantenform dieser Gleichung, so wollte Hensel Kroneckers Beweis vervollständigen, daß der Zahlteiler der Diskriminantenform gleich der Diskriminante des Zahlkörpers ist.
Hensel nutzte wiederum die Theorie der Primdivisoren als epistemische Technik. Dies ermöglichte als Nebeneffekt die Bestimmung der Primdivisoren von $p$ aus der Zerlegung der Fundamentalgleichung. (Kronecker hatte obiges Ergebnis unabhängig von der Theorie der Primdivisoren gewinnen wollen, um es zum Aufbau dieser Theorie nutzen zu können.)

Mit der Arbeit [5, 1889] wechselte Hensel in den ebenfalls von Kronecker in den *Grundzügen* behandelten Fall, in dem der Grundkörper beliebig viele Unbestimmte enthalten kann. Diese Allgemeinheit führte zu technischen Probleme, auf die hier nicht noch einmal eingegangen wird.
Hensel wollte die Diskriminante einer komponierten Gattung in Abhängigkeit von den komponierenden Gattungen (im linear unabhängigen Fall) bestimmen.
Als neue epistemische Technik entwickelte Hensel die lokale Betrachtungsweise: Ist $P$ ein Primdivisor des

[2] [Kronecker, 1881, 200].

Grundkörpers so definierte er ein *Fundamentalsystem für den Modul $P$* als ein System, das die Eigenschaften einer Ganzheitsbasis nur in Bezug auf $P$ hat. Aus einem solchen läßt sich noch der $P$-Anteil der Diskriminante bestimmen.
Um ein solches Fundamentalsystems für den Modul $P$ zu erhalten, nutzte er Kroneckers Primdivisortheorie als epistemische Technik, denn er setzte es (mit Vorfaktoren) aus Fundamentalsystemen für die Primdivisoren zusammen.

Auch für diese Theorie nutzte Hensel den Körper der 13. Einheitswurzeln mit seinen beiden Unterkörpern der drei- und viergliedrigen Perioden als Modellobjekt. Sind allgemein ein Körper $n$-ten und ein zweiter Körper $m$-ten Grades gegeben, so suchte er nach Bedingungen, unter denen sich aus den $mn$ Kombinationen der Elemente der Fundamentalsysteme modulo $P$ *leicht* ein Fundamentalsystem modulo $P$ für die komponierte Gattung bestimmen läßt.
Dazu ergänzte Hensel seine lokale Betrachtungsweise um eine lokale Beschreibung eines linear unabhängigen Systems mit $n$ Elementen. (Dabei ist $n$ der Grad der Körpererweiterung.) Zu einem solchen betrachtete er die Konjugiertenmatrix, in deren Spalten die Konjugierten der Elemente stehen. Hensel bildete jeweils den größten gemeinsamen Teiler von $P$ und allen Elementen einer Spalte. Dieser ist eine gebrochene Potenz von $P$, sein Exponent also eine rationale Zahl $r_i$, die Hensel der Spalte zuordnete.
Der als *normales System in Bezug auf $P$* modellierte Idealfall ist der, in dem aus diesen rationalen Zahlen der $P$-Anteil der Diskriminante des Systems bestimmt werden kann: Die Diskriminante ist das Quadrat der Determinante der Konjugiertenmatrix. Im Idealfall ist die Summe der rationalen Zahlen $r_i$ gleich dem Exponenten des $P$-Anteils dieser Determinante, der Exponent des $P$-Anteil der Diskriminante ist also $2 \cdot \sum_{i=1}^{n} r_i$.
Insbesondere läßt sich aus normalen Fundamentalsystemen modulo $P$ analog zum Fall der Periodenunterkörper ein solches für die Komposition bestimmen: Dazu bildet man zunächst die Produkte aller Kombinationen der Elemente. Diejenigen Produkte, die durch $P$ teilbar sind, muß man anschließend noch durch $P$ teilen.

**Zu Kapitel 3**

Hensels erste Untersuchung zur Theorie der algebraischen Funktionen benutzte nur strikt konstruktive Methoden. Dies bedeutete insbesondere, daß eine rationale Funktion von $x$ nicht in Linearfaktoren der Form $(x-a)^k$ zerlegt werden konnte.
Er stellte einen Algorithmus vor, mit dem die durch eine (i.A. nicht prime) Form $F$ teilbaren Formen bestimmt werden können. Dazu definierte er als epistemische Technik die Teilbarkeit einer Form durch gebrochene Potenzen von $F$, um schrittweise die durch $F^{\frac{k+1}{n}}$ teilbaren Formen aus den durch $F^{\frac{k}{n}}$ teilbaren auszusondern.
Konkret führte Hensel eine Homogenisierung ein und benutzte Techniken des Formenkalküls, insbesondere Taylor-Entwicklungen.
Es gelang ihm, die Schritte der Arbeit [Dedekind/Weber, 1882] so nachzubilden, daß er zu den Integralen erster Gattung gelangte: Mit dem Algorithmus für die durch $F$ teilbaren Formen konnte er alle ganzen

Formen, aus diesen alle Formen erster Gattung und aus diesen die gesuchten Integrale erster Gattung bestimmen.

Der von Hensel in dieser Arbeit benutzte Ansatz blieb singulär. Nach Kroneckers Tod benutzte er die epistemische Technik der Elementarteiler, um die Diskriminante im Fall einer Variablen einfacher zu bestimmen. Diese Technik verdankte er vermutlich seiner Bekanntschaft mit Frobenius, der der Nachfolger von Kronecker in Berlin war: Frobenius hatte 1879 eine Aussage über Elementarteiler publiziert, auf die er 1894 zurückkam und an die Hensel ebenfalls 1894 anschloß.
Er benutzte seine lokale Beschreibung eines linear unabhängigen Systems aus dem allgemeinen Fall. Als epistemische Technik verwendete er statt der Primdivisoren die einfacheren Wurzelfunktionen. Dies war möglich, da nur größte gemeinsame Teiler von einer oder mehreren *vollständigen* Familien konjugierter Funktionen benötigt werden, die sich als Wurzelfunktionen ausdrücken lassen.
Hensel betrachtete wiederum die Konjugiertenmatrix, in deren Spalten die Konjugierten zu je einem Element eines linear unabhängigen Systems stehen. Als Spaltenteiler werde der größte gemeinsame Teiler der Elemente einer Spalte dieser Matrix bezeichnet.
Äquivalent zum Begriff des *normalen Systems für den Modul* $(x-a)$ ist dann der mit Hilfe der Elementarteiler formulierte Begriff *kanonisches System für den Modul* $(x-a)$: Die Elementarteiler beschreiben immer die Diskriminante. Das Kriterium für *kanonisch* lautet daher, daß die aus den Exponenten von $(x-a)$ in den Elementarteilern und den Spaltenteilern gebildeten Mengen übereinstimmen.
Systeme, mit denen man die gleichen Funktionen darstellen kann, bezeichnet man als äquivalent. Solche Systeme haben die gleichen Elementarteiler. Hensel entwickelte einen Algorithmus, mit dem jedes System in ein äquivalentes kanonisches System überführt werden kann. Da für ein kanonisches System klar ist, durch welche Divisionen man es in ein Fundamentalsystem für die ganzen Funktionen umwandeln kann und muß, ist ein System genau dann ein Fundamentalsystem für die ganzen Funktionen, wenn alle Elementarteilerexponenten kleiner als Eins sind.
Insbesondere kann man (ohne den Algorithmus auszuführen) bereits aus den Elementarteilern eines beliebigen linear unabhängigen Systems die Elementarteiler eines Fundamentalsystems und damit die Diskriminante bestimmen: Man muß nur die Elementarteilerexponenten auf ihre Reste modulo Eins reduzieren.
Hensel nutzte diese Resultate auch zu vereinfachten Aussagen über die Integrale erster Gattung. Dazu führte er eine leicht veränderte Homogenisierung ein. Die zu bestimmenden Formen erster Gattung sind dann diejenigen, deren Elementarteilerexponenten zwischen $-1$ und $0$ liegen.

Anschließend benutzte Hensel die Potenzreihen der Theorie der Riemannschen Flächen als epistemische Technik, um den Zusammenhang zwischen den Elementarteilerexponenten von $(x-a)$ und der Verzweigung über $(x-a)$ (bzw. der Primdivisorzerlegung von $(x-a)$) abzuleiten.
Nach dieser Theorie gehören zu einem Verzweigungspunkt konjugierte lokale Entwicklungen. Hensels neue epistemische Technik war die Benutzung der lokalen Entwicklungen in der Konjugiertenmatrix. Er bestimmte den $(x-a)$-Anteil der Diskriminante, indem er ein Fundamentalsystem modulo $(x-a)$ konstruierte, dessen Elemente je an genau einem Verzweigungspunkt über $x=a$ nicht durch $(x-a)$ teilbare

Entwicklungen haben. Damit hat die Konjugiertenmatrix *modulo* $(x-a)$ *Blockdiagonalgestalt*, wobei jedem Block eine Kreisteilungsgleichung entspricht.
Hensel gelangte zu dem Ergebnis, daß die Verzweigung durch Sequenzen von Elementarteilerexponenten beschrieben wird, also insbesondere nur bestimmte Mengen an Elementarteilern möglich sind: Einem Verzweigungspunkt der Ordnung $k$ über $x = a$ entspricht die Sequenz $0, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}$ in den Exponenten der $(x-a)$-Anteile der Elementarteiler.

**Zu Kapitel 4**

Anders als im Fall der algebraischen Funktionen einer Variablen kann im zahlentheoretischen Fall wilde Verzweigung auftreten. Hensels Ziel war es, den Exponenten einer Primzahl $p$ in der Diskriminante auch in diesem Fall zu *erklären*, d.h. diesen Exponenten mit Zahlen in Verbindung zu bringen, die den Primdivisoren zugeordnet sind.
Hensels neue epistemische Technik bestand in der Konstruktion lokaler Potenzreihenentwicklungen, die die lokalen Strukturen beschreiben. Dazu führte er die Betrachtungsweise modulo $p^M$ für beliebig großes $M$ ein. Ordnet man jedem Konjugierten eines Elements eine Entwicklung modulo $p^M$ zu, so bilden diese Entwicklungen Zyklen. Die Elemente eines Zyklus sind lokal konjugiert, d.h. sie erfüllen modulo $p^M$ eine Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten.
Diese Zyklen sind eine Verallgemeinerung der Zyklen aus dem ersten Kapitel (im unverzweigten Fall), denn dort hatte Hensel nur die Reste, also die ersten Glieder der Reihe, betrachtet.

Zur Ableitung der Entwicklungen benutzte Hensel zunächst eine Primdivisortheorie als epistemische Technik. In dieser Theorie war bekannt, wie man ein Element $\varepsilon$ bestimmt, dessen Potenzen ein vollständiges Restsystem modulo eines Primdivisors erzeugen. Weiter war bekannt, daß man mit Hilfe eines Elements $\pi$, das genau einmal durch den Primdivisor teilbar ist, eine Entwicklung eines Elements $x$ nach Potenzen von $\pi$ aufstellen kann, deren Koeffizienten rationale Funktionen (beschränkten Grades) in $\varepsilon$ sind. Dieser Typ der Entwicklung trat zum Beispiel bei [Dedekind/Weber, 1882] auf. Ihm wurde jedoch keine weiterreichende Bedeutung zugeschrieben.
Hensel modifizierte die von der Primdivisortheorie gelieferten Entwicklungselemente $\pi$ und $\varepsilon$ so, daß sie lokale Gleichungen niedrigerer Grade erfüllten. Mit Hilfe dieser lokalen Gleichungen erhält man die Zyklen konjugierte Entwicklungen: Konkret sind die Konjugationen $\varepsilon \mapsto \varepsilon_i,\ \pi \mapsto \pi_{i,j}$.

Zur Bestimmung der Diskriminante im Fall der wilden Verzweigung konstruierte Hensel (wie zuvor im Fall der algebraischen Funktionen einer Variablen) ein Fundamentalsystem (für den Modul $p$), dessen Konjugiertenmatrix Blockdiagonalgestalt hat, wenn man die lokalen Entwicklungen einsetzt und sie modulo $p^M$ betrachtet. Dabei entspricht jedem Primdivisor ein Block.
Für die Bestimmung des $p$-Anteils der Diskriminante des Zahlkörpers benötigt man den $p$-Anteil des Determinantenquadrats eines solchen Blocks. Dieser ist (aufgrund der Struktur des Fundamentalsystems für den Modul $p$) gleich dem $p$-Anteil der Diskriminante der lokalen Gleichung.

Im Zuge seiner Untersuchungen lotete Hensel auch in der Theorie der algebraischen Funktionen die Möglichkeiten der (dort bekannten) Potenzreihen aus. Diese nutzen die Verzweigung, aus der man Elementarteiler und Diskriminante ableiten kann. Daher sind die Elementarteiler nicht mehr Bestandteil der Theorie.
Die Potenzreihen ermöglichten einen Algorithmus, um ein Fundamentalsystem für die im Endlichen liegenden Multipla eines beliebig gegebenen Divisors $\mathcal{O}$ aufzustellen. Als Spezialfall konnte Hensel insbesondere ein Fundamentalsystem für alle ganzen Funktionen erhalten. Daneben vereinfachte er in dieser Arbeit die Theorie von Dedekind-Weber durch die Betrachtung gebrochener Divisoren.
Hensel brauchte nur die Anfangskoeffizienten der lokalen Potenzreihen für die Definition eines *regulären Systems*. Dieser Begriff ist äquivalent zu dem des kanonischen bzw. normalen Systems.
Der Algorithmus zur Bestimmung eines Fundamentalsystems (für alle ganzen Funktionen oder die Vielfachen eines Divisors) vereinfacht sich, weil die Teilbarkeiten aller Einträge der lokalen Konjugiertenmatrix unmittelbar abgelesen werden können und nicht nur die größten gemeinsamen Teiler der Spalten zugänglich sind.

Der so gewonnene Algorithmus läßt sich in die zahlentheoretische Situation übertragen und dort erweitern: Auch hier kann man für die lokale Betrachtung der Konjugiertenmatrix die gefundenen Entwicklungen benutzen. Dann muß die Konjugiertenmatrix schrittweise auf eine Normalform gebracht werden, damit das korrespondierende System ein Fundamentalsystem für die ganzen Zahlen bzw. ein Ideal wird.

**Zu Kapitel 5**

In den Vorlesungen im Sommersemester 1902 wollte Hensel in der zahlentheoretischen Situation Primdivisoren aus unabhängig von ihnen eingeführten Reihenentwicklungen ableiten und anschließend die Theorie ebenso wie in Kapitel 3 bis zur Bestimmung der Diskriminante aufbauen.
Als epistemische Technik führte er die Betrachtungsweise für den Bereich von $p$ ein. Eine *Äquivalenz für den Bereich von* $p$ umfaßt unendlich viele Kongruenzen modulo $p^k$, nämlich eine für jedes $k$.
Hensel verfolgte die aus der Theorie der algebraischen Funktionen entlehnte Idee eines Lokal-Global-Prinzips: Eine Zahlgröße sei genau dann rational bzw. algebraisch, wenn sie für jedes $p$ Entwicklungen mit rationalen bzw. algebraischen Bestandteilen hat.

Eine irreduzible Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten zerfällt für den Bereich von $p$ in eindeutige Faktoren, die alle Vielfachheit 1 haben. Jedem solchen Faktor soll ein Primdivisor von $p$ entsprechen. Dieser Grundgedanke, die mehrfachen Faktoren modulo $p$ durch Betrachtung höherer Glieder zu beseitigen, geht auf Selling zurück.
Die Zerlegung ist konstruktiv im Sinne der Berliner Schule möglich, d.h. sie kann bis zu einer beliebig vorgegebenen Genauigkeit bestimmt werden. (Heute bezeichnet man diese Aussage als *Hensels Lemma.*)
Dabei müssen geeignete Anfangsstücke durch Probieren bestimmt werden, bis weitere Terme mit Hilfe der Determinantendarstellung der Resultante hinzugefügt werden können.
Die Koeffizienten der unendlich fortgesetzten Verfeinerung sind neue Objekte, die Hensel zunächst als

*wohldefinierte p-Reihen* einführte und später als $p$-adische Zahlen bezeichnete.

Für die Potenzreihenentwicklungen benötigte Hensel ein Element, das genau einmal durch den entsprechenden Primdivisor teilbar ist und nach dessen Potenzen entwickelt wird. Bleibt die definierende Gleichung des Zahlkörpers für den Bereich von $p$ irreduzibel, so wählte Hensel als Primelement ein Element $\pi$, das durch die minimale gebrochene Potenz von $p$ teilbar ist: In diesem Fall ist die gebrochene Potenz von $p$, die ein Element $x$ genau teilt, an der Norm von $x$ ablesbar und minimal $\frac{1}{n}$. Es reicht, die Elemente eines vollständigen Restsystems modulo $p$ zu untersuchen.
Mit Hilfe dieses Primelements gelangte er ebenso wie bei Benutzung einer Primdivisorentheorie zu den Entwicklungen.
Im allgemeinen Fall behandelte Hensel die irreduziblen Faktoren für den Bereich von $p$ einzeln. Diese haben in diesem Fall $p$-adische, aber keine rationalen Koeffizienten. Zunächst benutzte Hensel Wurzeln dieser Faktoren, ohne darauf einzugehen, wie er sie erhielt. Am Ende der Vorlesung konstruierte er sie (im relativen Fall) als Potenzreihen aus den algebraischen Wurzeln geeigneter endlicher Näherungsgleichungen.
Anschließend setzte er seine Ergebnisse mit Hilfe der von Kronecker stammenden epistemischen Technik der *reduziblen Erweiterung* zusammen. Damit erreichte er wiederum, daß die Konjugiertenmatrix des Fundamentalsystems modulo $p$ Blockdiagonalgestalt hat, woraus sein Ergebnis zur Diskriminante bei wilder Verzweigung folgte.

Die Arbeit *Neue Grundlagen der Arithmetik* bezog sich nur indirekt auf die zahlentheoretische Situation. In ihr wurden die *Zahlgrößen für den Bereich von p* mit ihren Operationen motiviert und präzise eingeführt, sowie das eindeutige Zerfallen einer Gleichung für den Bereich von $p$ gezeigt. Die wesentliche epistemische Technik war dabei die Übertragung von Aufbauprinzipien aus der Analysis in die Arithmetik. Zum Beispiel entspricht der typischen Aussage des Weierstrass'schen $\varepsilon, \delta$-Kalküls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N : |x_i - x_j| < \varepsilon \, \forall \, i,j > N \quad \text{die Aussage } \forall M > 0 \, \exists N : x_i - x_j \equiv 0 \bmod p^M \, \forall \, i,j > N.$$

Hensel präsentierte einen an Operationen orientierten Aufbau seines neuen Zahlbereichs: Ausgehend von der endlichen Reihendarstellung der natürlichen Zahlen für den Bereich von $p$ erweiterte er den Bereich, um Ergebnisse für beliebige Subtraktionen und Divisionen zu erhalten.
Den Beweis für die Eindeutigkeit der Zerlegung in irreduzible Faktoren für den Bereich von $p$ führte er analog zur Vorlesung, wobei er die Gelegenheit nutzte, die Begriffe Diskriminante, Resultante und den Satz über die Diskriminante eines Produkts auf den Bereich von $p$ zu übertragen.

In der zweiten Crelle-Arbeit *Über eine neue Theorie der algebraischen Zahlen* nutzte Hensel die eindeutige Zerlegung für den Bereich von $p$, um in der zahlentheoretischen Situation für jede algebraische Zahl $n$ auf $p$ bezogene Entwicklungen zu erhalten.
Ist die definierende Gleichung irreduzibel für den Bereich von $p$, so bestimmte Hensel wiederum ein Primelement $\pi$ als eines, das durch die minimale gebrochene Potenz von $p$ teilbar ist. Aus diesem lassen sich,

wie schon in Kapitel 3 gezeigt, $n$ konjugierte Entwicklungen ableiten.
Anderenfalls betrachtete er endliche Näherungsgleichungen der irreduziblen Faktoren. Aus deren algebraischen Wurzeln bestimmte er Entwicklungen erst für die Wurzeln der Näherungsgleichung und dann für die des irreduziblen Faktors. Für jeden irreduziblen Faktor $k$-ten Grades erhielt er $k$ konjugierte Zyklen.
*Algebraische Zahlgrößen für den Bereich von $p$* sind für Hensel wohldefinierte Reihen nach Potenzen von $p$ bzw. $\pi$ jeweils mit Koeffizienten aus einem vollständigen Restsystem.

Hensels Vortrag 1905 war dem Ziel untergeordnet, die $p$-adischen Zahlen für Transzendenzbeweise zu benutzen. Daher führte er einfachere algebraische $p$-adische Zahlen ein, die nach Potenzen einer Wurzel aus $p$ laufen und deren Koeffizienten Potenzen einer primitiven $p^f - 1$-ten Einheitswurzel sind. Insbesondere wird also nicht von einem Zahlkörper ausgegangen. Hensels Idee war es, für eine Zahlgröße je eine irreduzible Gleichung für die Bereiche von $p, q, r$ etc. zu konstruieren, also Aussagen für die Bereiche verschiedener Primzahlen zu kombinieren.

Als epistemische Technik hierfür entwickelte Hensel den Beginn einer Potenzreihentheorie für $p$-adische Argumente und Koeffizienten. Diese umfaßte die Definitionen von Betrag, Umgebung, stetiger Funktion und Potenzreihe. Eine Potenzreihe konvergiert genau dann, wenn die Reihe ihrer Absolutbeträge konvergiert. Daher konnte Hensel das Kriterium von Cauchy-Hadamard benutzen, um Konvergenzbereiche zu bestimmen.
Für jedes $p$ konvergiert die gewöhnliche Berechnungsvorschrift für $e^p$ im Bereich von $p$. Hensel faßte diese Vorschrift als irreduzible Gleichung $p$-ten Grades für $e$ für den Bereich von $p$ auf. Nimmt man an, daß die Gleichungen für den Bereich von $p, q, r$ etc. alle das gleiche $e$ beschreiben, so erhält man (wegen der unbegrenzt steigenden Grade) die Transzendenz von $e$.

# Kapitel 7

# Einordnung der $p$-adischen Zahlen in die mathematische Moderne

In diesem Kapitel sollen zunächst die grundlegenden Positionen der aktuellen mathematikhistorischen Literatur zur *mathematischen Moderne* skizziert werden. Weiterhin wird vorgestellt, wie die entsprechenden Autoren (und einige weitere) sich zu Hensel und seinem Umfeld äußern.[1] Zum Abschluß wird herausgearbeitet, inwiefern Hensels Vorgehen und die $p$-adischen Zahlen den verschiedenen Modernitätsbegriffen entsprechen.

## 7.1 Positionen zur mathematischen Moderne

Herbert Mehrtens führt die Redeweise von einer *mathematischen Moderne* 1990 in seinem Buch *Moderne – Sprache – Mathematik* ein.[2] Moritz Epple greift Mehrtens' Herangehensweise auf, um die Entstehung einer modernen mathematischen Disziplin am Beispiel der Knotentheorie zu untersuchen.[3]
Jeremy Gray benutzt im Gegensatz dazu den Begriff *modernism*, um damit an den Modernismus in anderen kulturellen Sphären, wie z.B. Architektur, Musik und Literatur, anzuknüpfen.[4]
Leo Corry untersucht in seinem Buch *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures* die Entwicklung hin zum paradigmatisch *modernen* Lehrbuch *Moderne Algebra*.[5] Daher werden seine Ergebnisse ebenfalls gestreift.

### 7.1.1 Herbert Mehrtens' *Moderne – Sprache – Mathematik*

Mehrtens strebt eine Diskursanalyse im Sinne Foucaults an. Ihr Gegenstand ist der reflexive Diskurs der Mathematiker, d.h. ihre Äußerungen über die Mathematik.[6]
Als *modern* bezeichnet er den Umstand, daß ein wesentlicher Teil der Mathematik im späten 19. Jahr-

[1] Dies betrifft sowohl Personen als auch mathematische Gegenstände.
[2] [Mehrtens, 1990].
[3] [Epple, 1999].
[4] [Gray, 2008].
[5] [Corry, 1996], das Lehrbuch ist [van der Waerden, 1930].
[6] [Epple, 1999, 211].

hundert weder die physische Welt repräsentierte noch Bezug auf eine transzendente Ordnung nahm.[7] Die *moderne* Mathematik unterteilt er weiter in Moderne und Gegenmoderne je nachdem, ob sie als freie Schöpfung des menschlichen Geistes angesehen wird (Moderne) oder nicht. Die Vertreter der Gegenmoderne lehnen demnach jede Schöpfungswillkür ab und fordern, aus Anschauung bzw. Intuition müsse zunächst ein Gesetz abgeleitet werden, das die Möglichkeiten der Mathematik bestimmt.[8]
Für Mehrtens wird die Mathematik zu einer (an sich bedeutungslosen) Sprache, an der die Mathematiker arbeiten.[9] Daher verlieren selbst elementare Begriffe ihre Selbstverständlichkeit und um die weitere Einheit und Bedeutung der Mathematik muß gerungen werden.[10]

Zur Illustration der beginnenden Moderne nutzte Mehrtens Carl Friedrich Gauß: Bereits Gauß befürwortete (im Zusammenhang mit den komplexen Zahlen) die Autonomie der Mathematik in Theorie und Praxis sowie eine fachinterne Ontologie.[11] Nachdem die Möglichkeiten nichteuklidischer Geometrien akzeptiert waren, mußte explizit zwischen einer aus allgemeinen Begriffen erwachsenden Mathematik und Hypothesen über die Realität unterschieden werden.[12] Die dabei neu entstehenden Begriffe bildeten Netze, die sich gegenseitig stützten:

> Die neue Sprache der Mathematik bedarf nicht der Vergewisserung an einem äußeren Sein, weil sie sich in der steten Arbeit an sich selbst vergewissert.[13]

Da die Mathematik nicht mehr zur Beschreibung von Ausschnitten der Realität dienen kann und will, stellt sich die Frage, wie sie überhaupt beschreiben kann und wo die Grenzen dieser Möglichkeiten liegen.[14]

Die folgenden Ausführungen sollen *eine* mögliche Position der Moderne knapp illustrieren: David Hilbert trat für eine Moderne der Produktivität und Autonomie ein und wandte sich explizit gegen epistemologische Selbstbeschränkungen. Gerade aufgrund der Möglichkeit, Problemebenen und -kontexte zu verschieben, sei der Mathematik die Lösung aller Probleme möglich.[15]
In seinen Untersuchungen zu den Grundlagen der Geometrie begann er mit einem System von Begriffen und Axiomen, das durch reines Denken erschaffen wurde und "keinen Anker der Objektivität" besitzt.[16]
Die aus diesem System entwickelte Theorie kann sich daher nur auf ihre eigenen Regeln beziehen.[17]
Eine solche formale Theorie erhielt Bedeutung durch ihre heuristische Perspektive.[18] Wert und Wesen der Mathematik sollten sich durch ihren Erfolg in der Praxis erweisen. Dazu sollten die vom menschlichen Geist formulierten mathematischen Probleme von den Mathematikern autonom zur Bearbeitung ausgewählt werden.[19]

---

[7] [Mehrtens, 1990, 9]. *Modern* in diesem spezifischen Sinne Mehrtens' wird im Folgenden stets kursiv gesetzt.
[8] Die *Anschauung* steht dafür, daß die Gegenmoderne tatsächlich *modern* ist, da sie nicht die realitätsbehafteten (und damit vormodernen) Begriffe 'Raum' und 'Größe' verwendet, [Mehrtens, 1990, 9f, 76 u. 222].
[9] [Mehrtens, 1990, 8].
[10] [Mehrtens, 1990, 26].
[11] [Mehrtens, 1990, 29ff].
[12] [Mehrtens, 1990, 55].
[13] [Mehrtens, 1990, 68].)
[14] Mehrtens nennt es die "Struktur der Regeln", [Mehrtens, 1990, 93f].
[15] [Hilbert, 1900, 297f] und [Mehrtens, 1990, 110].
[16] [Mehrtens, 1990, 119f]. Hilbert sprach jedoch in Anspielung auf Leibniz von einer "praestabilierten Harmonie", die die Anwendbarkeit der Mathematik sichert. Vgl. [Mehrtens, 1990, 126].
[17] [Mehrtens, 1990, 123].
[18] [Mehrtens, 1990, 121].
[19] [Mehrtens, 1990, 127].

Die Vertreter der Gegenmoderne forderten die Sichtbarkeit von Sinn und Bedeutung der Mathematik.[20] Mehrtens formuliert die damit einhergehenden Anforderungen an die mathematische Praxis:

> Die Gegenmoderne zielt letztlich auf eine moralisch begründete Praxis der Mathematik; die Begründung aber wird in Wesen und Ursprung der Mathematik gesucht.[21]

Ein Beispiel für eine solche Position ist Kroneckers Konstruktivismus. Er traf dabei eine (philosophische) Vorentscheidung darüber, worin der Ursprung aller Mathematik liegt, nämlich in den natürlichen Zahlen. Diese Vorentscheidung wurde mathematisch vollzogen:[22] Was zur Mathematik gehört, sollte auf natürliche Zahlen zurückführbar sein und alles, was auf natürliche Zahlen zurückführbar ist, sollte zur Mathematik gehören.[23]
Davon unabhängig forderte Kronecker für mathematische Begriffe endliche Berechenbarkeit.[24]

### 7.1.2 Moritz Epples Theorierahmen zur Historiographie der mathematischen Moderne

In seinem Buch *Die Entstehung der Knotentheorie* betrachtet Moritz Epple die Entwicklung der modernen Mathematik unter einem wissenschaftssoziologischen Blickwinkel, wobei er sich vor allem auf Max Weber beruft. Für die mikrohistorische Beschreibung der mathematischen Handlungen adaptiert er ein Begriffssystem von Hans-Jörg Rheinberger, das sich um den Begriff der *epistemischen Konfiguration* gruppiert.[25] Für Epple besteht eine epistemische Konfiguration aus einem noch unverstandenen, zu untersuchenden epistemischen Objekt und einer epistemischen Technik, die im Unterschied dazu keine Unsicherheit mit sich bringt. Epistemische Techniken können aus anderen Bereichen bzw. Problemstellungen übernommen und angepaßt werden oder für ein bestimmtes epistemisches Objekt entwickelt werden.[26]

Epple formulierte Mehrtens' Thesen zum Antagonismus *Moderne versus Gegenmoderne* folgendermaßen: Viele Teile der Mathematik des späten 19. Jahrhunderts zeichnen sich durch *moderne* epistemische Objekte aus. Typisch für die Moderne ist, daß das mathematische Handeln nur durch Konsistenzbedingungen eingeschränkt wird. Kennzeichnend ist daher die *Freiheit* der Mathematik, welche zu Symbolsprachen führt, die sich nur auf ihre eigenen Regeln beziehen.
Dem gegenüber stehen die Versuche der Gegenmoderne, das mathematische Handeln an nichtmathematische Kontexte zu *binden*. Da die Notwendigkeit einer solchen Bindung ebenfalls aus den neuen epistemischen Objekten erwächst, ist auch die Gegenmoderne im Epochensinn *modern*.
Für Mehrtens sind (spätestens) in der *Moderne* die epistemischen Gegenstände der Mathematik sprachlich, also "Bezeichnungssysteme". Da die epistemischen Techniken dann solche der Sprachkonstruktion

[20] [Mehrtens, 1990, 188].
[21] [Mehrtens, 1990, 189].
[22] [Mehrtens, 1990, 190].
[23] [Mehrtens, 1990, 192 & 199]. Letzteres sichert der Mathematik Autonomie, in Ersterem sieht Mehrtens auch die moralische Forderung nach "eine[r] einheitliche[n] Sprache über eine Sache, die 'Natur' hat und ist", [Mehrtens, 1990, 199].
[24] [Mehrtens, 1990, 205]. Die begriffliche mathematische Arbeit mit einem Objekt, das nicht rechnerisch bestimmt werden könnte, wird dadurch untersagt. Für Mehrtens handelt es sich um eine moralische Norm.
[25] Vgl. [Rheinberger, 1992].
[26] Vgl. [Epple, 1999, 14ff].

sind, wird mathematisches Handeln zur "technische[n] Konstruktion strikt geregelter Bezeichnungssysteme".[27] Der Unterschied zwischen Gegenmoderne und Moderne besteht in der Ansicht darüber, ob für die *Sprache Mathematik* ein Sinn festgelegt bzw. erarbeitet werden müsse oder nicht.
Während Mehrtens sich auf die Charakterisierung der Mathematik im reflexiven Diskurs beschränkt und daraus seine Beschreibung des mathematischen Handelns folgert, arbeitet Epple die modernen Spezifika des mathematischen Forschungshandelns während der Entstehung der Knotentheorie aufgrund detaillierter Analysen heraus.[28] Im Mittelpunkt stehen dabei nicht technische Konstruktionen im Sinne von Mehrtens.

Epple konstatiert in der mathematischen *Moderne* einen Umbruch der mathematischen Kultur auf verschiedenen Ebenen.[29] Auf der sozialen Ebene ging die zunehmende Differenzierung der Wissenschaften im 19. Jahrhundert einher mit einer veränderten Balance zwischen heteronomer und autonomer Motivation mathematischen Handelns.
Auf der kognitiven Ebene wurden die Legitimität und die Regeln mathematischer Objekt- und Begriffsbildung sowie der Argumentationsmethoden neu ausgehandelt.[30] Charakteristisch dafür war die Herausbildung der mengentheoretischen Denkweise und des axiomatischen Stils.[31]

Am Ende dieses Prozesses steht ein neues Selbstbild der gesamten Mathematik, der auch ein neuer Platz im kulturellen Gefüge zugewiesen wird. Die Mathematik ist ein einheitliches System, deren komplexere Objekte sich aus den einfacheren zusammensetzen. Analog sind auch die Theorien und Probleme hierarchisch strukturiert. Obwohl sie autonom motiviert betrieben wird, geht man davon aus, daß sich ihre Ergebnisse in anderen Wissenschaften als anwendbar erweisen.[32]

Die Ursache für die umfassende Selbstreflexion mathematischen Handelns, die in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts begann, sieht Epple in den neuen epistemischen Gegenständen der Mathematik, die nicht mehr oder nur noch mit großen Schwierigkeiten als "Abstraktionen von Eigenschaften sinnlich wahrnehmbarer Dinge" aufgefaßt werden konnten.[33] Damit wurde der Bezug der mathematischen Begriffe auf die 'wirkliche Welt' zumindest problematisch. Es schlossen sich Fragen nach der Bedeutung und Rechtfertigung mathematischer Gegenstände, mathematischer Sprache und mathematischen Wissens an, die auf Ontologie und Epistemologie verwiesen.[34]

Die *axiomatische Methode* liefert charakteristisch moderne Antworten auf die Fragen nach Bedeutung und Rechtfertigung mathematischer Gegenstände.[35] Betrachtet man Hilberts Vorgehen in seiner para-

[27] [Epple, 1999, 210], letzte Formulierung [Mehrtens, 1999].
[28] [Epple, 1999, 23].
[29] [Epple, 1999, 201].
[30] Epple spricht von "neuen Formen handlungsleitender Rationalität", [Epple, 1999, 201ff].
[31] [Epple, 1999, 201f].
[32] Letzteres hatte wiederum Auswirkungen auf die soziale Dimension, denn daraus entstand ein Arbeitsmarkt für Mathematiker außerhalb der Universitäten, [Epple, 1999, 204].
[33] [Epple, 1999, 205].
[34] [Epple, 1999, 206].
[35] [Epple, 1999, 207].

digmatischen Festschrift *Grundlagen der Geometrie* [Hilbert, 1899], so werden mit Hilfe von Definitionen Objekte und Relationen verschiedenen Typs betrachtet, für die bestimmte Aussagen, die Axiome, gefordert werden.[36] Epple bezeichnet solche Definitionen als in doppelter Hinsicht ontologisch neutral: Unklar ist erstens ob und zweitens durch welche Objekte in der Welt die Axiome erfüllt werden.[37]
Aufgrund dieser ontologischen Neutralisierung wurde die *produktive Imagination* aufgewertet, denn mit Hilfe des axiomatische Stils konnten alle Theorien gerechtfertigt werden, für deren epistemische Objekte epistemische Techniken bekannt waren oder konstruiert werden konnten.[38]

Die Differenzierung und Autonomisierung setzte sich auch innerhalb der disziplinären Organisation der Mathematik fort. Epple spricht davon, daß bestimmte Problembündel eigene epistemische Konfigurationen erhielten und in diesen von immer weiter spezialisierten Mathematikern bearbeitet wurden. Dies führte insbesondere zu neuen, vom ursprünglichen Kontext autonomen Fragestellungen, gegebenenfalls zu einer schrittweisen "Elimination der zunächst motivierenden Kontexte" und daher zu einer Neukonstruktion der epistemischen Objekte.[39]

### 7.1.3 Mathematischer Modernismus bei Jeremy Gray

Grays Adaption des kulturgeschichtlichen Begriffs *modernistisch* ist ein Versuch, die Erzählung über die Entwicklung der modernen Mathematik mit dem Modernismus in anderen kulturellen Sphären (z.B. Architektur, Literatur, Musik) in Verbindung zu bringen. Er definiert die Eigenschaften eines modernistischen Systems mathematischer *Ideen* (body of ideas) folgendermaßen:

i) Es ist autonom, hat also kaum Motivationen außerhalb der Mathematik.
ii) Es enthält formale Aspekte, die auch explizit betont werden.
iii) Es steht in einer komplizierten Beziehung zur Alltagswelt.
iv) Es wird von einer professionellen Gruppe von Mathematikern vertreten bzw. benutzt, die den aktuellen und zukünftigen Resultaten dieses Systems hohen Wert beimessen.[40]

Modernistische Ideen passen laut Gray zum neuen Bild (der Mathematik und) der Mathematiker als einer autonomen professionellen Gruppe mit Bedeutung für die Naturwissenschaften und die Philosophie:

> Modernism in mathematics is the appropriate ideology, the appropriate rationalization or overview of the enterprise.[41]

Wesentliche inhaltliche Veränderungen beobachtet Gray in der Ontologie und in der Epistemologie der Mathematik.[42] Dabei führte die Abstraktion und Allgemeinheit der neuen Ontologie quasi automatisch

[36] Im Fall der Geometrie heißen die Objekte 'Punkte', 'Geraden' und 'Ebenen', die Relationen u.a. 'liegen', 'parallel' und 'kongruent'. Die Axiome fordern Aussagen, in denen diese Objekte und Relationen vorkommen, z.B. 'Durch je zwei Punkte liegt genau eine Gerade.'
[37] Diese zweite Offenheit ermöglicht unvorhergesehene, z.B. auch innermathematische Anwendungen eines Konzepts. Der erste Punkt birgt das Problem, die Widerspruchsfreiheit nachzuweisen. Hilbert hatte dessen prinzipielle Schwierigkeit noch nicht erkannt.
[38] Epple spricht von der "Entfesselung der mathematischen Imagination" und faßt diese zusammen mit der ontologischen Neutralisierung unter "epistemische Autonomie" zusammen, [Epple, 1999, 209].
[39] [Epple, 1999, 205].
[40] [Gray, 2008, 1].
[41] [Gray, 2008, 37].
[42] Hierin stimmen Gray und Epple überein, wobei die Betonung einer neuen Ontologie auf die Arbeit [Gray, 1992] zurückgeht.

zu einer neuen Epistemologie.[43] Es mußte neu ausgehandelt werden, welche Beweise akzeptiert und welche hoch bewertet werden.[44]
Gray führte auch *modernistische mathematische Objekte* ein. Diese können i.A. nur mit abstrakten Methoden untersucht werden.[45] Er stellt einige Beispiele vor, um zu illustrieren, daß sie aus substantiellen Gründen eingeführt wurden und typischerweise nur für reine Mathematiker interessant waren.

Gray behauptet eine gewisse Beunruhigung (anxiety) der Mathematiker. Er begründet sie mit der umstrittenen Natur mathematischer Objekte, die nicht länger mit physikalischen Objekten identifiziert werden konnten.[46] Daraus folgen epistemologische Fragen, die den intrinsischen Wert der Mathematik betreffen[47], sowie Fragen, die den extrinsischen Wert der Mathematik in der Gesellschaft berühren.[48]
Der modernistische Charakter der damals aktuellen Mathematik wurde laut Gray zwischen 1900 und 1914 öffentlich debattiert, weil er zu diesem Zeitpunkt von einer ausreichend wichtigen Gruppe von Mathematikern akzeptiert worden war.[49]
Bezüglich der Algebra und der Zahlentheorie sind dafür vor allem deutsche Mathematiker maßgeblich. Deren ausreichendes Einverständnis führt Gray auf die (autonomen) professionellen Strukturen der deutschen Mathematik in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts und insbesondere auf die Orientierung am Humboldtschen Neuhumanismus zurück.[50]

### 7.1.4 Corry

Obwohl das Thema von Leo Corrys Buch *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures* nicht die mathematische Moderne (sondern die zunehmende *Strukturalität* der Mathematik) ist, muß es hier erwähnt werden, da im ersten Teil die Entwicklung hin zu Bartel L. van der Waerdens berühmtem Lehrbuch *Moderne Algebra* (1930) dargestellt wird, das als paradigmatisch für einen modernen mathematischen Text gelten kann. In letzterem ist der Aufbau nicht mehr an Zahlsystemen orientiert, sondern die Anordnung erfolgt strikt nach der Komplexität der Strukturen.
Corry arbeitet überzeugend heraus, daß die zahlentheoretischen Arbeiten Dedekinds und Hilberts zwar mit neuen mathematischen Strukturen arbeiten, aber nicht strukturalistisch sind. Für beide ist der Begriff 'Gruppe' abstrakter als 'Ring', da eine Gruppe eine zugeordnete Struktur ist, während der Ring den Gegenstandsbereich ausmacht. Nach der strukturalistischen Sichtweise ist diese Unterscheidung obsolet, zudem ist jeder Ring eine Gruppe.[51]

[43] Es geht Gray dabei (vermutlich) darum, daß es schwieriger wird, potentielle Aussagen über die Objekte zu erhalten und anschließend ihren Wahrheitsgehalt zu klären, [Gray, 2008, 21].
[44] [Gray, 2008, 152].
[45] Er erlaubt explizit, daß die Objekte in diese Form erst überführt wurden, [Gray, 2008, 235].
[46] Damit stimmt er in der Interpretation der historischen Ausgangspunkte für die Moderne mit Mehrtens und Epple überein.
[47] Zum Beispiel: Wie ist das Verhältnis von Mathematik zu Logik?, Was ist ein Beweis?
[48] [Gray, 2008, 271].
[49] [Gray, 2008, 37], die Formulierung ist leicht verändert.
[50] [Gray, 2008, 153].
[51] Als Steigerung dazu gab es z.B. bei [Fueter, 1905] zwei verschiedene Namen für Gruppen, je nachdem ob die Verknüpfung als Multiplikation oder als Addition geschrieben wurde, vgl. [Corry, 1996, 152f].

## 7.2 Hensels Konstellation in der mathematischen Moderne - der Blick der mathematikhistorischen Forschung

Dieser Abschnitt versammelt zunächst Positionen zu Hensels Konstellation aus Untersuchungen, die Hensel bzw. die $p$-adischen Zahlen nicht zum wesentlichen Thema hatten. Anschließend wird das von Peter Ullrich entworfene Bild für die Entstehung der $p$-adischen Zahlen mit Hilfe der Ergebnisse dieser Arbeit geschärft.

### 7.2.1 Bestandteile von Hensels Konstellation

Im folgenden Abschnitt soll zunächst mit Catherine Goldstein und Norbert Schappacher ein Blick auf die Zahlentheorie zwischen 1840 und 1900 geworfen werden. Anschließend werden speziellere Aussagen von Mehrtens, Epple und Gray vorgestellt, die Hensel und sein mathematisches Umfeld betreffen. Im Einzelnen geht es dabei um Zahlkonzepte, Leopold Kronecker, Richard Dedekind, David Hilbert und die $p$-adischen Zahlen.
Zum Abschluß wird knapp auf Günther Freis Beobachtungen zur Vorgeschichte von Hensels Lemma eingegangen.

**Zahlentheorie**

Nach einer Analyse Catherine Goldsteins und Norbert Schappachers etablierte sich um 1850 das Forschungsfeld *arithmetische algebraische Analysis*.[52] Dieses faßte elliptische Funktionen, algebraische Gleichungen, Reziprozitätsgesetze und Reihen mit arithmetischer Interpretation in sich zusammen. Prominente Vertreter waren u.a. Kummer, Kronecker und Hermite.
Trotz verschiedener Schlüsselobjekte waren die Akteure von der inneren Einheit des Feldes überzeugt. Die zeitweilige Stabilität ergab sich durch enge Kommunikation zwischen den Akteuren, die neben einer wechselseitigen Anregung und Beeinflussung zwischen den verschiedenen Untersuchungen auch zur Erstellung eines Gedächtnisses führte. (Später trennte sich das Feld anhand der Gegenstände.)

Die Zahlentheorie um 1870 umfaßte nach Goldstein drei *quantitativ* bedeutsame Cluster.[53] Der umfangreichste Cluster schloß an Legendre und Gauß an und betonte verschieden restriktiv die Reinheit der Methoden und des Gegenstands.[54] Ein weiterer beinhaltet Arbeiten zu Dirichletschen Reihen und anderen arithmetischen Funktionen.
Der dritte schloß an Arbeiten von Hermite und Kronecker an und behandelte Modulargleichungen, quadratische Formen und die Möglichkeit, über eine Theorie der zerlegbaren Formen auf Kummers Theorie der idealen Faktoren zu verzichten. Davon abweichende Versuche, Kummers Theorie zu verallgemeinern

[52] Für den ganzen Abschnitt vgl. [Goldstein/Schappacher, 2007, 52f], im Original heißt es "arithmetic algebraic analysis". Der Begriff des Forschungsfeldes ist von Bourdieu angeregt, obwohl nicht alle für ein solches Feld typischen Merkmale zutreffen.
[53] Ganzer Abschnitt nach [Goldstein/Schappacher, 2007a, 73f]. Die Cluster sind das Ergebnis einer bibliometrischen Untersuchung, die auch implizite Bezüge erfaßte.
[54] Dies konnte von der Ablehnung komplexer Funktionen über die Ablehnung komplexer Zahlen bis zur Ablehnung algebraischer Zahlen reichen.

bzw. zu ersetzen, gehören in keinen der Cluster, sondern blieben singulär: Selling und Bachmann publizierten je eine solche Arbeit, kehrten aber mit weiteren Arbeiten zur Zahlentheorie in die oben genannten Cluster zurück.[55]

Epple zählt "Zahlentheorie, Theorie algebraischer Funktionen und algebraische Geometrie"[56] zu den mit am höchsten bewerteten Themen der Mathematik des 19. Jahrhunderts. Die Gegenstände dieser Gebiete haben dabei keine direkt erkennbare Bedeutung für die Naturwissenschaften.
Auch Gray erinnert daran, daß die algebraische Zahlentheorie in Deutschland ein Gebiet mit hoher Reputation gewesen sei. Bei ihrer Verallgemeinerung auf beliebige Zahlkörper habe es sich daher um eine als wichtig angesehene Forschungsfrage gehandelt.[57]

**Zahlkonzepte**

Für Mehrtens liegt in Gauß' Umgang mit den komplexen Zahlen ein epistemologischer Bruch: Gauß argumentierte mit ihrer Darstellbarkeit in der komplexen Ebene, also mit einem innermathematischen Gedanken, der nicht die Fähigkeit zur Beschreibung der Welt thematisierte.[58]

Epple systematisiert die neuen Zahlentypen im späten 19. Jahrhundert danach, welche Funktionen der zuvor bekannten Zahlen sie nicht mehr erfüllen: Beschrieben reelle Zahlen Größen, so traf dies auf die ebenfalls kontinuierlichen komplexen Zahlen, Quaternionen und 'hyperkomplexen' Zahlen nicht mehr zu. Ebenso dienten die ganzen Zahlen dem Zählen, die ebenfalls diskreten ganzen komplexen Zahlen, idealen Zahlen und ganzen algebraischen Zahlen jedoch nicht.[59]

Der Ausgangspunkt für Grays Überlegungen zu Zahlkonzepten sind Kummers 'ideale Zahlen', die im Wesentlichen Teilbarkeitsbedingungen lieferten.[60] Für Gray sind die Vorschläge für ihre Verallgemeinerung von Dedekind und Kronecker wieder Zahlen.[61] Dies ist besonders in Bezug auf Dedekind eine sehr ungewöhnliche Interpretation, die die vorliegende Arbeit nicht übernehmen möchte. Möglicherweise ist sie Grays Konzept geschuldet, weitgehend auf technische Termini zu verzichten. An Dedekinds Theorie der algebraischen Zahlen betont Gray vor allem die verallgemeinerten Entsprechungen für "ganze Zahl", "prim" und "teilbar".[62]

Mit Hilfe eines Textes von Perron betont Gray, die irrationalen Zahlen seien "in jedem Fall unsere eigenen Schöpfungen" und hätten nichts Mystisches an sich, so daß sich die Frage stelle, "warum wir sie gerade *so* erschaffen und nicht anders."[63] Obwohl die üblichen Konstruktionen für irrationale Zahlen

[55] [Selling, 1865] und [Bachmann, 1867].
[56] [Epple, 1999, 203].
[57] [Gray, 2008, 77].
[58] [Mehrtens, 1990, 29ff].
[59] [Epple, 1999, 205]. Epple gibt analoge Beschreibungen der Entwicklungen für die Begriffe 'Funktion' bzw. im Bereich der Geometrie, die hier nicht benötigt werden.
[60] Mit Vielfachheiten, [Gray, 2008, 77].
[61] Er schreibt, es ginge um "the nature of the new types of number being introduced into the subject," [Gray, 2008, 148].
[62] [Gray, 2008, 150f].
[63] [Perron, 1907, 148f]. Es handelt sich um Perrons Habilitationsvortrag *Was sind und sollen die irrationalen Zahlen.* In ihm hatte Perron Hensels Beweisversuch für die Transzendenz von $e$ öffentlich kritisiert. Gray interpretiert Perrons Text

der Darstellung von Größenbeziehungen dienten, sei der Begriff der Zahl "vollkommen unabhängig vom Begriff der Größe."[64]

In seinem Nachruf auf Hensel bezeichnet Oskar Perron die Schöpfung der $p$-adischen Zahlen als eine "glänzende und höchst originelle Leistung".[65] Er erläutert, damit habe er der um 1904 bereits seit einigen Jahrzenten geläufigen Redeweise von den irrationalen Zahlen als "willkürliche[n] Schöpfungen unseres Verstandes" überraschend einen neuen Sinn gegeben, da für die gewöhnliche Konstruktion anschließend nicht nur "keine Notwendigkeit vorliegt", sondern es tatsächlich eine alternative Konstruktion mit einem nicht-isomorphen Resultat gibt.

**Leopold Kronecker**

Wie bereits angesprochen, zählt Mehrtens Kronecker zur Gegenmoderne. Er entwirft für ihn das Bild des "Rechners".[66] Er habe die Gegenstände mit Hilfe von Unbestimmten konkretisiert, "jeder Gedanke sei Formel, jedes Wort Gestalt" geworden.[67]

Gray untersucht nicht, inwiefern Kroneckers Ansichten modernistisch sind, sondern bezeichnet dessen Theorieauffassung als syntaktisch. Er betont, daß Kronecker begrifflich bewiesene Existenzaussagen für wertlos hielt, solange sie nicht erlaubten, das entsprechende Objekt zu konstruieren.[68]
Für ihn ist Kroneckers Teilbarkeitstheorie daher ontologisch sparsamer als Dedekinds Idealtheorie.

**Richard Dedekind**

Für Dedekind entwirft Mehrtens das Bild des "Erzählers". Er habe neue Objekte entworfen und bezeichnet, um ihnen dann bestimmte Eigenschaften zuschreiben und sie miteinander in Beziehung treten lassen zu können.[69]
In *Was sind und was sollen die Zahlen* sprach Dedekind von freien Schöpfungen des menschlichen Geistes.[70] Für ihn beruhten diese Schöpfungen jedoch auf den elementaren Fähigkeiten des menschlichen Geistes und waren in diesen begründet. Aus diesem Grund ist er für Mehrtens vormodern.[71]

Für Gray hingegen ist Dedekinds Definition der natürlichen Zahlen in *Was sind und was sollen die Zahlen* eine der bahnbrechenden Handlungen des mathematischen Modernismus. Hierbei wird das System der natürlichen Zahlen anhand seiner bzw. mit seinen Mengeneigenschaften identifiziert.[72] Für den Existenznachweis rekurrierte Dedekind allerdings auf die Gesamtheit seiner Gedanken, da er die Existenz

jedoch nicht im Licht einer solchen eher ungewöhnlichen öffentlichen Kritik.

[64] [Perron, 1907, 149].

[65] Dieses und die beiden folgenden Zitate: [Perron, 1948, 235].

[66] [Mehrtens, 1990, 197].

[67] [Mehrtens, 1990, 197], hierbei zitiert er eine Festrede über Kronecker von Adolf Kneser, [Kneser, 1925, 224].

[68] [Gray, 2008, 156]. Als Beispiel führt er die irreduziblen Teiler eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten an.

[69] [Mehrtens, 1990, 197]. Charakteristisch für Dedekind ist die Entstehung neuer Objekte durch Mengenbildung.

[70] Bereits in seinem Habilitationsvortrag [Dedekind, 1854/1932] hatte er angesprochen, daß vor allem die Wirksamkeit eines Begriffs entscheidend sei.

[71] [Mehrtens, 1990, 36].

[72] Das heißt, Dedekind wählte zunächst geeignete Mengeneigenschaften aus, aus denen er anschließend die weiteren Eigenschaften folgerte. Zum Abschluß wies er nach, daß seine Definition im Wesentlichen eindeutig ist.

einer beliebigen unendlichen Menge benötigte.[73]

Analog baute Dedekind auch seine Idealtheorie auf: Er betrachtete die Menge aller Zahlen, die durch eine gegebene Zahl teilbar sind. Dann wählte er geeignete strukturelle Eigenschaften dieser Menge, die es erlaubten, eine Theorie aller Mengen mit diesen Eigenschaften aufzubauen. Im konkreten Fall definierten die ausgewählten Eigenschaften die Ideale.[74]

Gray bezeichnet Dedekind als modernistisch, wobei er besonders dessen internalistische Motivationen hervorhebt:

> Dedekind's approach is recognizably modernist in its emphasis on the need for internal definitions of objects, tailored to meet internally set goals of the theory.[75]

### David Hilbert

Für Mehrtens repräsentiert Hilbert eine Moderne der Produktivität und Autonomie. Sie "versammelt die schon vollzogenen Brüche und findet sich zu einem produktiven Betrieb zusammen."[76] In der entstehenden Aufbruchsstimmung werden zögerliche Bedenken weggewischt:

> Hilbert gelang es, einen Zauberkreis aus Forschungsthemen, methodischen Konzeptionen, symbolischen und mythischen Markierungen, philosophischen Rückhalten und fachlichen Abgrenzungen zu schlagen, unter dessen Bann die Moderne höchst produktiv wurde.[77]

Für Gray gehört bereits Hilberts *Zahlbericht*, der Dedekinds Ontologie weitgehende Akzeptanz einbrachte, zum Modernismus.[78] Er bezeichnet ihn als eine strukturelle Umformulierung der algebraischen Zahlentheorie, wobei das Ordnungsprinzip die Galoistheorie gewesen sei.[79]

### Die $p$-adischen Zahlen

Gray bezeichnet die $p$-adischen Zahlen als ein modernistisches Objekt. Er beschäftigt sich mit der Frage, was Hensel die Einführung dieser neuen Zahlen erlaubte.[80] Als Argument führt er die Willkürlichkeit (arbitrarity) an, die für ihn im folgenden Zitat über die negativen und rationalen Zahlen zum Ausdruck kommt:

> Diese beiden Klassen von Zahlgrößen sind Rechnungssymbole, deren Bezeichnung zunächst willkürlich ist. Nur muß die Einführung so geschehen, daß die fundamentalen Gesetze, die für das Rechnen mit den ganzen positiven Zahlen gelten, auch in dem erweiterten Gebiete erhalten bleiben.[81]

Hensel habe die für seine Ziele geeigneten Ausdrücke (mit Verknüpfungen) anhand dieser Bedingung eingeführt und konnte sie daher Zahlen nennen.[82] Gray behauptet weiter, die $p$-adischen Zahlen würden

[73] [Gray, 2008, 168].

[74] Zur Entstehung des Idealbegriffs bei Dedekind vgl. [Haubrich, 1992].

[75] [Gray, 2008, 150]. In späteren Versionen wurden Dedekinds Ausführungen auch von seinen internen Normen geleitet. Dies könnte man Grays zweitem Punkt (formalistisch) zuschlagen.

[76] [Mehrtens, 1990, 140].

[77] [Mehrtens, 1990, 138]. Mehrtens betont auch die Rolle der "höchst komplexen und vielfältigen Interaktion und Kollaboration" in diesem Betrieb, [Mehrtens, 1990, 141].

[78] Hilbert verfaßte einen Synkretismus aus den Theorien Dedekinds und Kroneckers, vgl. [Hilbert, 1897] und [Lemmermeyer/Schappacher, 1998] und [Schappacher, 2005].

[79] [Gray, 2008, 179].

[80] Gray arbeitet mit dem Vorwort von Hensels Lehrbuch *Theorie der algebraischen Zahlen* von 1908. Es geht ihm also nicht um den Entdeckungszusammenhang, sondern um die Möglichkeit der Rechtfertigung.

[81] [54, 1908, 12].

[82] Gray behauptet, "[they] had to be considered numbers", [Gray, 2008, 236]. Vgl. dazu die Bemerkungen im Abschnitt über Zahlkonzepte.

auf eine neue Art und Weise alle Lücken zwischen den rationalen Zahlen füllen.[83]

Um für den Modernismus der $p$-adischen Zahlen zu argumentieren, nutzt Gray Perrons im Abschnitt über Zahlkonzepte bereits zitierten Habilitationsvortrag *Was sind und sollen die irrationalen Zahlen*. Perron bezieht sich darauf, daß Hensels $p$-adische Zahlen Transzendenzuntersuchungen ermöglichen sollten.[84] Daher weist er darauf hin, daß für die letzten Schritte des von Hensel versuchten Ausbaus der Analogie zwischen Zahlentheorie und Funktionentheorie noch eine Möglichkeit benötigt werde, $p$-adische und $q$-adische Zahlen zu vergleichen.[85] Gray interpretiert dies als ein Argument für die Anziehungskraft des strukturellen Zugangs.[86]

### Hensels Lemma

Günther Frei weist in seiner Interpretation des unveröffentlichten achten Teiles von Gauß' *Disquisitiones Aritmeticae* [Frei, 2007] darauf hin, daß Gauß eine Vorform von Hensels Lemma bewiesen hatte. Für ein Polynom mit ganzen Koeffizienten, dessen Zerlegung modulo $p$ keine mehrfachen Faktoren besitzt, gab er ein explizites Verfahren an, um diese Zerlegung schrittweise in eine Zerlegung modulo $p^k$ für steigendes $k$ umzuwandeln.[87] Den allgemeinen Fall hat Gauß nicht ausgeführt, einige Einträge seines mathematischen Tagebuchs zeigen jedoch, daß er hoffte, einen Zugang gefunden zu haben.[88]

Ebenfalls eine Version von Hensels Lemma erkennt Frei in einer Arbeit des Berliner Mathematikers Hermann Kühne.[89] Die entsprechende Passage dieser Arbeit soll hier knapp skizziert werden, denn Kühnes Ansatz weist technische Parallelen zu Hensels Konstruktion der $p$-adischen Zahlen auf.[90]
Kühne begann mit der Konstruktion eines endlichen Restsystems $R$, das im einfachsten Fall die Gestalt $\{0, \ldots, p-1\}$ haben konnte. Zu diesem betrachtete er den Bereich $B = R[x]$ der Polynome in $x$ mit Koeffizienten aus $R$. Er setzte die Rechenschritte der schriftlichen Division unendlich fort und ließ daher die dazu benötigten Summanden mit negativen Potenzen von $x$ zu, erhielt also "eine Entwickelung"[91]

$$X = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \sum_{i=-k}^{M} a_i x^{-i} \text{ mit } a_i \in R, 0 \leq k \in \mathbb{Z}, \text{ die beliebig weit, also für beliebig großes } 0 \leq M \in \mathbb{Z}$$

[83] "[T]hey filled in all the gaps in the rational numbers. But they did so in a new way", [Gray, 2008, 236]. Auch diese vereinfachte und ahistorische Formulierung ist vermutlich eine Folge seines Versuchs, die Leser nicht mit technischen mathematischen Details zu überfrachten.
[84] [Perron, 1907, 153].
[85] Erst dann wäre die Hoffnung begründet, daß "die Entwicklung der Zahlentheorie im allgemeinsten Sinn mit der Funktionentheorie Schritt halten kann," [Perron, 1907, 155].
[86] "It is a dramatic answer that suggests how strong was the appeal of the structural approach to mathematics - even to Perron, who grew into a markedly traditional creative mathematician," [Gray, 2008, 237]. Möglicherweise ist Gray nicht bewußt, daß Perron hier direkt auf die Hoffnungen Hensels eingeht und diese abschwächt, also nicht zwingend eigene Hoffnungen formuliert.
[87] [Frei, 2007, 185].
[88] Es handelt sich um die Einträge 77-79, [Gauß, 1976, 72].
[89] [Kühne, 1903].
[90] Es ist sehr wahrscheinlich, daß Hensel und Kühne sich kannten, denn Kühne studierte ab 1886 in Berlin und promovierte 1892 über ein vermutlich von Kronecker gestelltes Thema. (Der offizielle Betreuer war Fuchs, vgl. [Biermann, 1988, 160].) Kühne lebte jedoch seit 1896 nicht mehr in Berlin, so daß nicht bekannt ist, ob er und Hensel weiterhin Kontakt hatten, vgl. [Frei, 2007, 174].
[91] [Kühne, 1903, 102].

berechnet werden kann. Ein endliches Anfangsstück, in dem die negativen Exponenten beschränkt sind, bezeichnete er als “Annäherung” $A$ an $X$:[92]

$$A = \sum_{i=-k}^{N-1} a_i x^{-i} \text{ mit } a_i \in R, 0 \leq k \in \mathbb{Z} \text{ wobei gilt } X = A + R \text{ und } \deg(R) < -N$$

für beliebig groß vorgegebenes $0 \leq N \in \mathbb{Z}$.[93]

Diese Überlegungen nutzte Kühne für eine Theorie der Polynome $B[y]$ mit Koeffizienten in $B = R[x]$. Er begann mit einer Variablentransformation der Gestalt $y = x^c z$ mit einem geeigneten $c > 0 \in \mathbb{Z}$.[94] Die gewünschte Zerlegung eines Polynoms $F(y)$ kann dann auf die Zerlegung eines Ausdrucks $G(z)$ zurückgeführt werden, der in Bezug auf $x$ einen nichtverschwindenden Absolutterm $G_0$ und daneben nur Terme negativer Grade (in $x$) enthält.

Kühne zerlegte zuerst den Term $G_0$. Die erhaltene Zerlegung konnte er schrittweise auf die kleineren Grade in $x$ verfeinern, d.h. modulo $x^{-1}$, modulo $x^{-2}$ etc. Nachdem er die anfängliche Transformation rückgängig gemacht hatte, ordnete Kühne sein Ergebnis folgendermaßen ein:

> Diese Darstellung enthält eine angenäherte Zerlegung von $F$ in Factoren und entspricht der Zerlegung einer ganzen Function mit Zahlencoefficienten in reelle Factoren ersten und zweiten Grades.[95]

Die Idee, hohe negative Potenzen von $x$ zu vernachlässigen und von Annäherungen zu sprechen, ist typisch für das Umfeld Kroneckers. Interessant ist der Hinweis auf die Parallelität zur Zerlegung mit reellen Koeffizienten, da Hensel diese in der Vorlesung 1902 auch anführte.[96] Darüberhinaus ist auch der Gebrauch des Begriffs *Entwicklung* bemerkenswert, denn die Entwicklungen nach steigenden negativen Potenzen von $x$ unterscheiden sich von den gewöhnlichen Potenzreihen nach positiven Potenzen von $x$ etwa ebenso wie Hensels $p$-adische Zahlen mit ihrer Entwicklung nach positiven Potenzen von $p$ von den üblichen Dezimalbruchentwicklungen nach negativen Potenzen von Zehn (oder einer anderen Zahl.)

Wendet man die heute übliche Terminologie an, so bewies Kühne die Gültigkeit von Hensels Lemma in der Komplettierung von $\mathbb{F}_q(x)[y]$ an $x = 0$.

### 7.2.2 Die Entstehung der $p$-adischen Zahlen nach Peter Ullrich

In diesem Abschnitt werden die von Ullrich implizit vertretenen globalen Thesen zur Entstehung der $p$-adischen Zahlen thematisiert.[97]

**Die Arbeit** *The genesis of Hensel's p-adic numbers*

Hier soll zunächst Ullrichs ausführlichste Publikation *The genesis of Hensel's p-adic numbers* [Ullrich, 1998] vorgestellt werden. Anschließend werden einige der kritischen Punkte kommentiert.

Das Resümee von Ullrichs Untersuchungen lautet folgendermaßen:

[92] [Kühne, 1903, 103].

[93] In dieser Darstellung dürfen beliebige $a_i$ verschwinden. Es geht nur darum, daß nur endlich viele Glieder mit positiven Exponenten vorhanden sein dürfen. Solche müssen nicht vorliegen.

[94] Die Existenz eines geeigneten $c$ erfordert dabei eine technische Vorraussetzung, vgl. [Kühne, 1903, 104].

[95] [Kühne, 1903, 106].

[96] Vgl. 5.2.1.

[97] Auf die Arbeiten selbst wurde detaillierter in Kapitel 5.6 eingegangen.

> Hensels Motivation war die Analogie zwischen Zahlkörpern und den Körpern algebraischer Funktionen einer Variablen. Seine Grundidee war die Übertragung der Methode der lokalen Reihenentwicklungen aus der komplexen Analysis, die ihm auch ein Lokal-Global-Prinzip nahelegte.[98]

Ullrich erläutert ausführlich die Entstehungs- und Veröffentlichungsgeschichte der Arbeiten [Kronecker, 1881] und [Dedekind/Weber, 1882]. In beiden wurde die Analogie zwischen der Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen und der Theorie der algebraischen Zahlen benutzt, um die jeweiligen Herangehensweisen an den zahlentheoretischen Fall auf die algebraischen Funktionen zu übertragen.
Da Hensel Vorlesungen bei Weierstraß gehört hatte und ihn (wie jeder Berliner Privatdozent) in den 1890er Jahren wöchentlich besuchte, ist es für Ullrich nicht allzu überraschend ("not too surprising"), daß Hensel die Ergebnisse von Kronecker, Dedekind und Weber über die Analogie zwischen Funktionen- und Zahlkörpern mit dem Kalkül der Potenzreihen kombinierte.[99]
Ullrich stellt weiter dar, welche Gestalt die von Hensel eingeführten Entwicklungen haben und wie sie durch Konjugation zusammenhängen. Dabei kann man in Analogie zum Fall der algebraischen Funktionen ebenfalls von Verzweigung sprechen.[100]
Beginnend mit seiner Crelle-Arbeit 1904 sieht Ullrich Hensel auch mit Fragen der Konvergenz beschäftigt.[101]
Daher seien die $p$-adischen Zahlen für ihn nicht länger rein formale Objekte gewesen.[102]

Die angesprochenen Arbeiten [Kronecker, 1881] und [Dedekind/Weber, 1882] waren beide wichtig für Hensel.[103] Für seine grundsätzliche Herangehensweise erscheint es jedoch bedeutsamer, daß Kronecker in seinen *Grundzügen* [Kronecker, 1882] den Fall der algebraischen Zahlen und den der algebraischen Funktionen in einer Theorie vereinigte. Hensel arbeitete z.B. in [5, 1889] mit dieser allgemeinen Theorie. In späteren Arbeiten beschränkte er sich auf Spezialfälle, in denen sich Vereinfachungen ergaben.[104]
Aus dem Brief Hensels an Weber vom 23.11.1897 (vgl. 4.2.1) läßt sich entnehmen, daß Hensel etwa 1893 begann, nach einer neuen Grundlage für seine Forschungen zu suchen. Seine Motivation war, daß er mit den Kroneckerschen Hilfsmitteln bei seinen selbstgestellten Aufgaben nicht weiter kam.[105] Neben den genannten drei Arbeiten, die die Analogie zwischen algebraischen Zahlen und algebraischen Funktionen beleuchten, kannte Hensel zu diesem Zeitpunkt auch die Theorie von Weierstraß.[106] Nachdem die verschiedenen Ausgangspunkte für Hensels Neuerung geklärt sind, stellt sich aber auch die Frage, *warum*

[98] "He was motivated by the analogies of the number field case and the function field case [...] Hensel's basic idea was to transfer the method of complex analysis of studying local expansions $\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu (z-c)^\nu$ in order to get information on the global properties of a function to the setting of number theory. In particular, from the beginning on he had a 'local-global principle' in mind", aus dem abstract, [Ullrich, 1998, 163]. Zu ergänzen wäre, daß Hensels Reihen als *arithmetische* Reihen Teilbarkeitsaussagen kodieren sollten.
[99] [Ullrich, 1998, 168].
[100] "Also already in 1897, Hensel clearly saw the analogy between ramification in the setting of functions and in that of numbers," [Ullrich, 1998, 169].
[101] [Ullrich, 1998, 170].
[102] "He could from then on treat infinite sums $\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu p^\nu$ not only as formal but even as *p-adically convergent* objects," [Ullrich, 1998, 171].
[103] Vgl. u.a. Kapitel 3.1.2 und 5.3.1.
[104] Vgl. [20, 1895] und 3.2.1.
[105] Es ist durchaus möglich, daß Hensel zu diesem Zeitpunkt Ziele hatte, die in keiner seiner späteren Arbeiten aufscheinen. Zur Erinnerung: Die Arbeit [5, 1889] hatte im allgemeinen Fall die Aufgabe gestellt, die Diskriminante und ein Fundamentalsystem einer Komposition aus den Diskriminanten und Fundamentalsystemen der komponierenden Körper zu bestimmen. Ersteres gelang Hensel auch in späteren Arbeiten nur in ganz speziellen Fällen, zweiteres auch in Spezialfällen nur lokal.
[106] Gemeint sind die Arbeiten [Dedekind/Weber, 1882], [Kronecker, 1881] und [Kronecker, 1882].

Hensel eine neue Grundlegung anstrebte,[107] d.h. für welche Aufgabenstellungen er sie nutzen wollte: Wie in 3.4 gezeigt wurde, hatte z.B. Hensels Kombination der Potenzreihenentwicklungen auf einer Riemannschen Fläche mit seiner arithmetischen Theorie der Funktionenkörper einer Variablen in der Arbeit [21, 1895] einen konkreten technischen Vorteil: Die lokale Beschreibung durch Potenzreihen erlaubte es, den $(x-a)$-Anteil des ggTs einer Funktion mit ihren Konjugierten, an dem Hensel zuvor schon interessiert gewesen war, direkt abzulesen.

Ullrich schreibt Hensel ab der Crelle-Arbeit [47, 1904] ein Interesse an Konvergenzfragen zu. Dies scheint unglücklich formuliert zu sein: Zwar erforderte Hensels Ziel, die Potenzreihen unabhängig von einer Divisorentheorie abzuleiten, eine explizite Aussage darüber, welche neuen Objekte zulässig sind, da sie nicht mehr gegebenen Objekten zugeordnet werden konnten. Diese Frage der Zulässigkeit hat jedoch primär nichts mit Fragen der Konvergenz zu tun: Hensel schloß sich den Vorgaben des Berliner Konstruktivismus an, nach denen ein Objekt wohldefiniert ist, wenn es in endlich vielen Schritten beliebig genau bestimmt werden kann. Die Zuordnung einer Maßzahl, die bei zulässigen Objekten im gewöhnlichen Sinne konvergiert ist dem nur nachgeordnet.[108]
Auch Hensels Lemma entspricht dieser Konstruktivitätsforderung: Die gesuchte eindeutige Zerlegung eines Polynoms mit $p$-adischen Koeffizienten in irreduzible Faktoren kann in endlich vielen Schritten beliebig genau bestimmt werden.[109]
Auch in seinem Meraner Vortrag [49, 1905] benutzte Hensel den Begriff der Konvergenz nur für $p$-adische Potenzreihen: Eine Potenzreihe konvergiert für $x = a$ nach Definition genau dann, wenn die $p$-adische Zahl, die nach Einsetzen von $a$ für $x$ entsteht, in Hensels konstruktivem Sinn berechenbar ist.

**Weitere Abhandlungen**

Die Arbeit [Ullrich, 1999a] untersucht die Analogie zwischen Zahl- und Funktionenkörpern als Ursprung des Konzepts des Dedekind-Rings.[110] Hensel verließ sich nach Ullrich in seinen Arbeiten so sehr auf sie, "daß er sie zur Basis einer eigenständigen Teildisziplin machte."[111]
Um den Einfluß der Weierstraßschen Funktionentheorie auf Hensel zu unterstreichen, zitiert Ullrich aus André Weils Vorwort in Kummers *Collected Works*, in dem Weil bestimmte Argumente Kummers als $p$-adisches Denken bezeichnete. Anschließend erläuterte Weil dies:

> Of course he never introduced the concept of $p$-adic fields; the credit for this goes to his pupil, or rather his pupil's pupil Hensel. Perhaps this concept could only occur to someone like Hensel, who had also been Weierstrass's pupil and who was familiar, not only with Cantor's definition of the real numbers, but with the ideas of Dedekind and Weber on the analogies between number-fields and function-fields.[112]

[107] Um diesen Punkt noch einmal zu unterstreichen, sei daran erinnert, daß in der Arbeit [Dedekind/Weber, 1882] auch Entwicklungen nach einmal durch den Primdivisor teilbaren Elementen vorkamen.
[108] Analog mißinterpretiert Ullrich auch in [Ullrich, 1998a, 322] Hensels konstruktiven Theorieaufbau in [47, 1904] als einen Versuch, nicht nur auf die Definitionstechniken, sondern auch auf die Konvergenzbegriffe der gewöhnlichen Analysis zurückzugreifen.
[109] Zum Berliner Konstruktivismus vgl. 1.2.1.
[110] Ullrich stellt in ihr u.a. ausführlich die Rolle der Weierstrass'schen Theorie der transzendenten Primfunktionen dar.
[111] [Ullrich, 1999a, 127]. Hensel *wollte* diese Analogie einerseits als Basis der Theorie der algebraischen Zahlen etablieren, was ihm nicht gelang. Andererseits wollte er (dokumentiert ab 1905) eine sehr weitreichende, lokal arithmetische Sichtweise zur Verfügung stellen. Auch hierbei war er nicht erfolgreich.
[112] [Weil, 1975, 6f]. Ullrich weist noch darauf hin, daß Hensel (wie er zuvor nachwies) diese Analogie auch in Weierstraß' Vorlesungen hätte kennenlernen können. Da aber die ersten mathematischen Arbeiten Hensels völlig an Kroneckers *Grundzüge*

Hervorgehoben sei der dabei indirekt angesprochene Bezug zu Weierstrass' Definition der reellen Zahlen, denn diese Analogie spielte eine wesentliche Rolle bei der Ausgestaltung der endgültigen Einführung der $p$-adischen Zahlen.[113]
Inwiefern der "starke Weierstraßsche Einfluß auf Hensel" sich in dessen Lehrbuch *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen* widerspiegelt,[114] sei jedoch dahingestellt, denn die Wahl der Potenzreihen als Grundlage ist insbesondere eine Folge von Hensels Entscheidung für die Potenzreihen in der Zahlentheorie und in der Theorie der algebraischen Funktionen zweier Variablen.

Schließlich beschäftigt sich Ullrich in einer weiteren Abhandlung [Ullrich, 1998a] speziell mit Hensels verfehltem Beweisversuch für die Transzendenz von $e$ in Meran 1905. Er behauptet darin ohne weitere Ausführungen, Hensel habe sich schon in den 1890er Jahren bei der Einführung der (algebraischen) $p$-adischen Zahlen von der Hoffnung auf Transzendenzbeweise leiten lassen.[115] Eine Stütze für diese These liefert Hilberts Reisetagebuch aus dem Jahr 1888, denn dieses zeigt,[116] daß Hensel bereits damals einen indirekten Transzendenzbeweis für $e$ plante, wobei er zeigen wollte, daß in der Diskriminante eines Zahlkörpers, der $e$ enthält, jede Primzahl vorkommen müsse. Es muß jedoch offen bleiben, ob für Hensel eine Verbindung zwischen dieser Idee und Potenzreihen bestand.
Inhaltlich besteht eine gewisse Ähnlichkeit zwischen diesem Ziel und Hensels (vergeblichem) Widerspruchsbeweis 1905: Hensel leitete die Aussage ab, daß $e$ für den Bereich jeder Primzahl $p$ eine irreduzible Gleichung $x^p = 1 + p\varepsilon$ erfüllt. Eine durch diese Gleichung beschriebene Erweiterung ist aber auch in $p$ verzweigt, enthielte also $p$ in der Diskriminante.[117]

## 7.3 Die Modernität der $p$-adischen Zahlen

In diesem Abschnitt werden die $p$-adischen Zahlen in Bezug zu den verschiedenen Modernitätsbegriffen sowie den modernen Zahlkonzepten gesetzt. Anschließend wird dargestellt, welche von Epples allgemeinen Kennzeichnungen der Entstehung der Knotentheorie auch auf die $p$-adischen Zahlen zutreffen.

### 7.3.1 Verortung der $p$-adischen Zahlen im Moderne-Diskurs

Wie oben dargestellt wurde,[118] spricht Mehrtens von einer Moderne im Epochensinn, wobei das dazugehörige Adjektiv hier *modern* geschrieben wird. Diese unterteilt sich noch einmal in die Moderne, deren Vertreter die Mathematik als freie Schöpfung des menschlichen Geistes ansahen, und die Gegenmoderne, deren Vertreter die Möglichkeiten der Mathematik anhand (jeweils verschiedener) Bindungen einschränkten. Zunächst wird überprüft, inwiefern diese drei Attribute auf die $p$-adischen Zahlen bzw. Hensels mathematische Handlungen zutreffen.

anschließen, ist diese Bemerkung zwar richtig, aber in Bezug auf Hensel gegenstandslos.
[113]Vgl. 5.4.1.
[114][Ullrich, 1999a, 128] bzw. [Hensel/Landsberg, 1902].
[115][Ullrich, 1998a, 321].
[116]Vgl. 1.1 das Zitat zu FN 35.
[117]Die Verbindung ist lose. Es ist nicht rekonstruierbar, worin Hensels Gedanke bestand.
[118]Vgl. 7.1.1.

*Modern* ist die Theorie der $p$-adischen Zahlen (einschließlich aller Vorarbeiten Hensels) bereits aufgrund ihres Gegenstandes. Hensels Untersuchungen der algebraischen Zahlen sind innermathematisch, d.h. in der Ausdrucksweise von Erhard Scholz und Moritz Epple autonom, motiviert. In Hensels Umfeld fand eine Debatte über die Möglichkeiten und Beschränkungen der fachinternen Ontologie statt, diese ist jedoch nicht sichtbar an Thesen über die Realität gekoppelt.

Hensels Herangehensweise ist jedoch nicht modern: Vereinzelt hatte sich Hensel dem strikten Konstruktivismus des späten Kronecker angeschlossen. Etwa ab 1893 entspricht seine Methodik dem moderaten Konstruktivismus der Berliner Schule.[119] Er würde weder wie Cantor die unbegrenzte Freiheit der Mathematik bejahen noch wie Hilbert postulieren, daß beliebige Probleme gelöst werden können, indem man die Problemstellung entsprechend modifiziert.[120] Dieses Bild bestätigt sich, wenn man die in 7.1.2 als modern angeführten Attribute einzeln betrachtet:

- Hensels Vorgehen ist *nicht mengentheoretisch*, da seiner Auffassung nach alle benutzten Mengen explizit abzählbar sein müssen.
- Sein Vorgehen ist *nicht axiomatisch*, sondern konstruktiv: Er geht von mathematisch etablierten Elementen aus und variiert bekannte Konstruktionsverfahren. Vermutlich würde er axiomatische Definitionen auch ablehnen, solange nicht nachgewiesen wird, welche “wirklichen mathematischen Objekte” darunter fallen.

Der von Mehrtens entworfene “Hilbertsche Zauberkreis” der Moderne schlug Hensel nicht in seinen Bann.[121] Er blieb seiner eigenen traditionellen Position und seinem Mathematikbild treu. Daher suchte er weder nach methodischen Konzeptionen oder symbolischen und mythischen Markierungen noch nach philosophischer Unterstützung.
Er wandte sich nicht aktiv gegen moderne Bestrebungen, wie zum Beispiel den Versuch seines Assistenten Fraenkel, die $p$-adischen Zahlen zu axiomatisieren, aber sie interessierten ihn nicht, selbst wenn sie von ihm geschaffene Mathematik betrafen.

Hensels $p$-adische Zahlen gestatteten jedoch eine moderne Vereinnahmung: So benutzte Perron in seinem Habilitationsvortrag, der Hensels Transzendenzbeweise kritisierte, ein von Mehrtens als typisch modern bezeichnetes Vokabular: Er bezeichnete die irrationalen (und damit auch die $p$-adischen) Zahlen als “Schöpfungen” des Menschen, die dieser für seine Zwecke “erschaffen” habe.[122]

Hensels Position ist aber auch nicht klar gegenmodern. Es besteht keine der von Epple angeführten Bindungen, weder an das Anschauungsvermögen oder andere Fähigkeiten des menschlichen Geistes noch an humanistische Bildung oder technische Anwendungen.[123] Hensel orientierte sich in seinen Arbeiten

[119] Vgl. das Ende von 1.2.2.
[120] Vgl. 7.1.1.
[121] Vgl. in 7.2.1 das Zitat zu FN 77.
[122] [Perron, 1907, 148f] bzw. [Mehrtens, 1990, 124].
[123] Vgl. [Epple, 1999, 210].

nach Kroneckers Tod am Berliner Konstruktivismus,[124] bei ihm erscheint diese Position jedoch nicht moralisch aufgeladen.[125] Ihr entspricht eine konservative Grundhaltung, nach der zulässige mathematische Objekte kontrollierbar und zugänglich sind.

Betrachtet man Grays Anforderungen an eine modernistische Vorgehensweise, so kann man zweifellos bejahen, daß die gesamte Theorie autonom motiviert war. Ebenso stehen selbst ihre einfachsten Objekte, die $p$-adischen Zahlen, in einer komplizierten Beziehung zur Alltagswelt. Hensel versuchte eine Theorie von hohem innermathematischen Wert aufzubauen. Seine $p$-adischen Zahlen sind nicht intuitiv bzw. durch Anschauung zugänglich, können also in diesem Sinne also nur abstrakt untersucht werden. Explizit formal ist Hensels Theorie nur in einem Argumentationsschritt, in welchem er betont, es gebe verschiedene Darstellungen für die natürlichen Zahlen und entsprechende Fortsetzungen ihrer Operationen.[126]

Zum Abschluß dieses Abschnitts werden die $p$-adischen Zahlen mit den Eigenschaften der neuen Zahlkonzepte in Verbindung gebracht, die in Abschnitt 7.2.1 vorgestellt wurden. Den $p$-adischen Zahlen liegt die Überlegung zu Grunde, man könne Teilbarkeit ebenso beschreiben, wie man traditionell Größe beschreibt. Hensel war zu der Auffassung gelangt, die von ihm konstruierten Entwicklungen ähnelten doch eher reellen Zahlen als Potenzreihen. Daher bezeichnete er sie als $p$-adische *Zahlen*. Trotzdem dienen sie offenbar weder dem Zählen noch der Größenbeschreibung.
Die $p$-adischen Zahlen beschreiben kein gegebenes Kontinuum, aber sie sind im folgenden intuitiven Sinn kontinuierlich: Betrachtet man zu jeder $p$-adischen Zahl den zugeordneten Dezimalbruch (zur Basis $p$), und ordnet sie so, wie es die Ordnung auf diesen Dezimalbrüchen induziert, so liegt ebenso wie bei gewöhnlichen Dezimalbrüchen zwischen zwei gegebenen (verschiedenen) $p$-adischen Zahlen stets eine dritte.[127]
Da Hensels Theorie der algebraischen Zahlen u.a. diejenige von Dedekind ablösen sollte, sei hier noch auf die für die natürlichen Zahlen gebräuchlichen Begriffe eingegangen, deren Verallgemeinerungen Gray an Dedekinds Theorie hervorgehoben hatte (ganze Zahl, prim, teilbar).[128]
Hensels Grundidee war, bei arithmetische Betrachtungen zunächst für jede Primzahl $p$ einzeln Überlegungen anzustellen. Die Gesamtheit der erhaltenen lokalen Aussagen wollte er anschließend zu einer globalen Aussage zusammenfassen. So verfuhr er insbesondere mit dem Begriff der ganzen Zahl: eine Zahl ist genau dann algebraisch ganz, wenn sie für jede Primzahl $p$ algebraisch ganz in Bezug auf $p$ ist.
Teilbarkeiten sollten laut Hensel von den zugeordnete Entwicklungen ablesbar sein. Für eine tatsächliche Begründung der von ihm gewünschten Theorie der algebraischen Zahlen hätte es jedoch noch neuer Überlegungen zum Begriff *prim* bzw. Primdivisor bedurft.

[124] Vgl. das Ende von 1.2.2.
[125] Die entsprechenden Formulierungen in seinen Texten sind relativ unauffällig, so daß sie von heutigen Lesern leicht übersehen werden können. Mehrtens forderte für einen Vertreter der Gegenmoderne, seine Position müßte *eindeutig* durch moralische Werte motiviert sein.
[126] Zum Beispiel [47, 1904, 51].
[127] Hensel hatte diese Ordnung in [47, 1904] eingeführt. Sowohl bei den $p$-adischen Zahlen als auch bei den gewöhnlichen Dezimalbrüchen kann es durch Perioden gleiche Zahlen geben, die auf den ersten Blick verschiedene Darstellungen haben.
[128] Vgl. 7.2.1 zu FN 62.

### 7.3.2 Moderne Merkmale der Entstehung der $p$-adischen Zahlen

In diesem Abschnitt wird ausgeführt, welche von Epples abstrakte Beschreibungen der Entstehung der Knotentheorie als einer modernen Theorie sich auf die Entstehung der $p$-adischen Zahlen übertragen lassen. Damit wird deutlich, daß Hensels Forschungen zumindest in diesem Sinn modern sind.

#### Die Ableitung von neuen epistemischen Konfigurationen aus Problembündeln

Eine Übersicht über die epistemischen Konfigurationen und ihren Zusammenhang befindet sich im Kapitel 6.[129] Hier sei nur die Entstehung von drei miteinander zusammenhängenden epistemischen Konfigurationen illustriert:

Ein erstes Problembündel entstand für Hensel, als er die Komposition von Körpern (im allgemeinen Fall von Kroneckers *Grundzügen*) untersuchte. Eines dieser Probleme war die Bestimmung der Diskriminante der Komposition aus den Diskriminanten der komponierten Körper. Für diese Frage entwickelte Hensel eine lokale Sichtweise und damit eine neue epistemische Konfiguration: Ist $P$ ein Primdivisor des Grundkörpers, so umfaßt die neue epistemische Konfiguration zunächst den Begriff des Fundamentalsystems für den Bereich von $P$. Hinzu kommt die Beschreibung bestimmter ggTs als gebrochene Potenzen von $P$, sowie der Begriff des normalen Fundamentalsystems für den Bereich von $p$, der die Exponenten dieser ggTs benutzt.

Die so entstandene epistemische Konfiguration veränderte Hensel, als er sich einem neuen Problembündel zuwandte: Er beschränkte sich auf den Fall eines Zahlkörpers und suchte eine Erklärung für den Exponenten einer Primzahl $p$ in der Diskriminante des Zahlkörpers, wenn diese Primzahl wild verzweigt ist.

Dazu verstärkte er die lokale Herangehensweise, indem er lokale Beschreibungen der Konjugierten einer algebraischen Zahl in die epistemische Konfiguration aufnahm: Die dazu eingeführten arithmetischen Potenzreihen nannte er später algebraische $p$-adische Zahlen. Für einzelne Elemente konstruierte er darüberhinaus lokale Gleichungen, d.h. Gleichungen, die diese modulo $p^M$ für jedes $M$ erfüllen.

Mit Hilfe dieser epistemischen Konfiguration konnte Hensel das Problem der wilden Verzweigung lösen. Aus dieser Lösung ergab sich jedoch ein völlig neuartiges Problembündel: Hensel wollte die mit Hilfe einer Primdivisortheorie erhaltenen Potenzreihen auch ohne eine solche ableiten und anschließend mit ihrer Hilfe eine Primdivisorentheorie begründen. Die dafür entwickelte epistemische Konfiguration enthielt u.a. die rationalen $p$-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$, denn diese waren der erste Schritt seines Versuchs, eine solche Primdivisorentheorie zu entwickeln.

#### Produktive Imagination versus Zeichenformalismus

Produktive Imagination soll im Sinne von Epple hier bedeuten, daß neue mathematische Objekte konstruiert werden, die mit vorhandenen mathematischen Objekten zwar in einigen Eigenschaften übereinstimmen, darüberhinaus aber nicht die Realität beschreiben. Daher müssen sie abstrakt charakterisiert werden. Ihre Bearbeitung erfordert eine charakteristische neue Form der Vorstellungskraft.[130] Man kann

[129] Für die Begrifflichkeiten “epistemische Konfiguration”, “epistemisches Objekt” und “epistemische Technik” sei ebenfalls auf Kapitel 6 verwiesen.

[130] Vgl. [Epple, 1999, 209].

verschiedene Schritte auf dem Weg zu Hensels $p$-adischen Zahlen auf diese Weise deuten.

Am deutlichsten wird dies bei Hensels Übertragung einer Riemannschen Fläche aus dem Fall der algebraischen Funktionen einer Variablen auf den zahlentheoretischen Fall. Für Hensel lagen die verschiedenen Blätter einer Riemannschen Fläche über der komplexen Ebene, wobei jedem über $x = a$ liegenden Punkt ein komplexer Wert $y_a \in \mathbb{C}$ zugeordnet ist.[131]
Das Objekt, das Hensel schuf, bestand aus Punkten, die in verschiedenen Blättern über je einer Primzahl lagen. Jedem solchen Punkt entsprach ein Primdivisor der darunterliegenden Primzahl $p$.[132] Es ist nicht bekannt, ob bzw. wie Hensel sich die Primzahlen räumlich angeordnet vorstellte. Deutlich wurde jedoch, daß er bewußt eine räumliche Ausdrucksweise wählte.
Analog zu den lokalen Entwicklungen auf der gewöhnlichen Riemannschen Fläche schuf Hensel lokale Entwicklungen, die ein Element des Zahlkörpers in einer *Umgebung* eines solchen über $p$ liegenden Punktes beschreiben sollten. Ungeklärt ist dabei, inwiefern zwei Punkte, die über unterschiedlichen Primzahlen liegen, miteinander verbunden sind.[133] Abstrakt sind dabei sowohl das Punktgebilde als auch die zugeordneten Entwicklungen.
Ein weiteres Beispiel einer produktiven Imagination besteht in der Auffassung der gefundenen Potenzreihenentwicklungen als *Zahlen*. Für Hensel reichte es dafür aus, daß die Operationen mit den natürlichen Zahlen auf die gewohnten Ergebnisse führen und die Operationen mit den übrigen Elementen (im für ihn maßgeblichen konstruktiven Sinn der Berliner Schule) erklärt sind. Es gibt keine räumliche Veranschaulichung der $p$-adischen Zahlen. Hensel führte sogar eine neue Ordnung auf den natürlichen Zahlen ein, um zu betonen, daß aus Teilbarkeitssicht eine andere Anordnung angemessen ist.

Ebenfalls Zeichen einer produktiven Imagination sind Hensels Begriffsbildungen, die immer wieder den Fragen nachgingen:
– Unter welchen Umständen wüßte man genug über die Situation?
– Wie kann man diese Umstände anstreben?

Dieser Typ der produktiven Imagination führte ihn u.a. zu dem Konstruktionsziel, daß die lokalen Potenzreihenentwicklungen eine Matrix in Blockdiagonalgestalt bilden.

Es ging Hensel nicht darum, die Möglichkeiten des Zeichenformalismus auszuschöpfen. Vermutlich führte er die $p$-adischen Zahlen in der Arbeit [47, 1904] abstrakt und isoliert ein, weil er verschiedene weiterführende Hoffnungen mit ihnen verband. Auf jeden Fall benötigte er sie jedoch für eine ganz spezielle Aussage seiner Theorie der algebraischen Zahlen: Die Zerlegung einer irreduziblen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten für den Bereich von $p$ ist eindeutig und führt auf paarweise verschiedene Faktoren.

[131] Diese Riemannsche Fläche ist in gewissem Sinn selbst schon modern, denn sie liegt im vierdimensionalen Raum. Hensel arbeitete nicht mit den abstrakteren Definitionen einer Riemannschen Fläche, die es zu jenem Zeitpunkt auch bereits gab.
[132] Im Allgemeinen entsprachen umgekehrt einem Primdivisor jedoch mehrere Punkte.
[133] Im Fall einer gewöhnlichen Riemannschen Fläche gibt es oft Wege zwischen gegebenen Punkten.

**Wechselspiel zwischen epistemischen Techniken und epistemischen Objekten**

Aus der von Epple benannten *epistemischen Autonomie* folgt für ihn ein "Wechselspiel zwischen der produktiven Imagination neuartiger epistemischer Dinge und der Konstruktion von partiell erfolgreichen Bearbeitungstechniken für dieselben."[134] Hier sei ein solches Wechselspiel an zwei charakteristischen Beispielen illustriert:[135]

Ein erstes Beispiel für ein Wechselspiel zwischen neuen epistemischen Objekten und neuen epistemischen Techniken beginnt mit der Einführung der neuen Potenzreihenentwicklungen in die Zahlentheorie. Hensel stellte sich daraufhin die Aufgabe, diese unabhängig von einer Primdivisortheorie abzuleiten. Daher mußte er neue epistemische Techniken entwickeln. Seine Idee, die definierende Gleichung in lokal irreduzible Faktoren zu zerlegen, die je einem Primdivisor entsprechen, kann man vielleicht als einen Prototyp einer epistemischen Technik bezeichnen.
Bei der Ausgestaltung dieses Prototyps entstand ein neues epistemisches Objekt: die $p$-adischen Zahlen, die als Koeffizienten der angestrebten Zerlegung benötigt wurden. Unmittelbar im Anschluß daran entstand als dazugehörige epistemische Technik der konstruktive Beweis von Hensels Lemma, der es erlaubte, diese Zerlegung auch durchzuführen.

Läßt man auch neue Begriffe als neue epistemische Objekte zu, so kann man die Weiterentwicklung der lokalen Betrachtungsweise bis zu den lokalen Gleichungen, die die Diskriminante eines Zahlkörpers bei wilder Verzweigung beschreiben, ebenfalls als ein Wechselspiel zwischen epistemischen Techniken und epistemischen Objekten betrachten:

Hensel hatte 1889 den Begriff eines lokalen Fundamentalsystems für den Modul $P$ eingeführt und ihn in den beiden äquivalenten Begriffen des normalen bzw. kanonischen Systems für den Modul $P$ spezialisiert. Daraus ergab sich für ihn 1895 in der Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen die Aufgabe, ein gegebenes System in ein äquivalentes kanonisches System zu überführen. Hensel entwickelte eine entsprechende epistemische Technik; die Nachteile dieser Vorgehensweise brachten ihn aber anschließend dazu, in der Theorie der algebraischen Funktionen von Anfang an mit lokalen Entwicklungen zu arbeiten. Man kann diese wohlbekannten lokalen Entwicklungen als importierte epistemische Technik betrachten. Mit ihrer Hilfe gelang es deutlich leichter, die gestellte Aufgabe zu lösen. Hensel nutzte sie darüberhinaus auch zum Beweis der Aussage, daß die Elementarteilerexponenten lokal Sequenzen bilden und diese die Verzweigung beschreiben.
Für den Beweis konstruierte er ein neues epistemisches Objekt, nämlich ein lokales Fundamentalsystem, dessen Konjugiertenmatrix Blockdiagonalgestalt modulo $(x-a)$ hat.

[134] [Epple, 1999, 392]. Vgl. auch [Epple, 1999, §67] und 7.1.2. Er schlägt vor, diejenigen Schlüsselobjekte und -techniken zu verfolgen, die ein besonders reiches Handlungsspektrum eröffneten.
[135] Mit Hilfe dieses Vokabulars läßt sich insbesondere leicht erfassen, wie ein Ortswechsel einer Person bzw. die Hinzuziehung einer weiteren Person zu neuen Impulsen führen. Im vorgestellten Entstehungsprozeß der $p$-adischen Zahlen traten solche Effekte nur am Rande auf.

Aus diesen Ergebnissen leitete Hensel 1897 die weitere Vorgehensweise für den analogen Aufbau der Theorie der algebraischen Zahlen direkt ab:

Zunächst mußte er in der zahlentheoretischen Situation lokale Entwicklungen (d.h. ein neues epistemisches Objekt) konstruieren.

Anschließend leitete er die analogen, aber technisch etwas komplizierteren Aussagen ab, die an die Stelle der Aussagen der Theorie der algebraischen Funktionen treten. Die dazu durchgeführte technische Analyse läßt sich als epistemische Technik interpretieren. Auf diese Art gelangte Hensel u.a. zu der Forderung, die Konjugiertenmatrix des zu konstruierenden lokalen Fundamentalsystems solle modulo $p^M$ für beliebig großes $M$ Blockdiagonalgestalt haben.

Für das Problem der wilden Verzweigung mußte Hensel zusätzlich die Determinante der Blöcke dieser Blockdiagonalmatrix kontrollieren. Dazu entwickelte er ein weiteres epistemisches Objekt mit zugehörigen Techniken: Er führte lokale Gleichungen ein und zeigte, wann und wie gegebene Elemente modifiziert werden können, um gewünschte lokale Gleichungen zu erfüllen.

**Elimination des motivierenden Kontextes**

Bei verschiedenen Ergebnissen der Knotentheorie (u.a. erstes Knotenpolynom) hatte Epple eine charakteristische Elimination des zunächst motivierenden (mathematischen) Kontextes bemerkt. Etwas Ähnliches geschieht bei Hensel bezüglich der $p$-adischen Zahlen:

Hensel präsentierte den Beginn seiner Überlegungen zu den $p$-adischen Zahlen in zwei Teilen. In der ersten Abhandlung *Neue Grundlagen der Arithmetik* stellte er sie völlig unabhängig vom Kontext der Theorie der algebraischen Zahlen vor. Dies hatte vermutlich zum Ziel, für die grundsätzliche Herangehensweise zu werben. Eventuell hoffte Hensel zu diesem Zeitpunkt auch auf Implikationen, die über Transzendenzbeweise weit hinausgegangen wären.[136]

Hensels daran anschließende Arbeit *Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen* zeigt, daß die $p$-adischen Zahlen zu diesem Zeitpunkt für Hensel noch fest mit dem Aufbau einer neuen Primdivisortheorie verknüpft waren. Diese Verbindung blieb noch länger bestehen, denn 1908 veröffentlichte Hensel sein seit 1897 geplantes Lehrbuch über die Theorie der algebraischen Zahlen, in dem er die $p$-adischen Zahlen als Grundlage dieser Theorie einführte.

Da ihm aber die gewünschte unabhängige Grundlegung seiner Theorie nicht gelang, benutzte er die $p$-adischen Zahlen 1913 in einem weiteren Lehrbuch [56, 1913] in anderen Bereichen der Zahlentheorie.

Demnach hatte Hensel die $p$-adischen Zahlen so vorgestellt, daß sie unabhängig von ihrem motivierenden Kontext betrachtet und benutzt werden konnten. Die Aufnahme folgte dabei zunächst weniger Hensels Idee einer Zusammenschau verschiedener arithmetischer Blickrichtungen, sondern nahm die $p$-adischen Zahlen als Objekt zum Anlaß für begriffliche Überlegungen zu abstrakten Körpern [Steinitz, 1910], Ringen [Fraenkel, 1912] bzw. Bewertungen [Kürschák, 1913].

Hensel selbst scheiterte mit seinen Ideen für Transzendenzbeweise und arbeitete (daher?) noch einige Zeit an der mathematischen Situation, für die er die $p$-adischen Zahlen ursprünglich geschaffen hatte. Den Wunsch, die Dienste, die die Analysis der Arithmetik erwiesen hatte, zu vergelten, konnte er sich

[136] Anhaltspunkte für diese Vermutung finden sich in [52, 1905].

selbst nicht erfüllen.[137]

### 7.3.3 Zusammenschau zur mathematischen Moderne

Die $p$-adischen Zahlen sind in Epochensinn *modern*, was bereits aus dem Problemkontext folgt, in dem sie entstanden. Als modernistisch erscheinen sie insbesondere, nachdem sie aus dem motivierenden Kontext isoliert und von der Moderne vereinnahmt wurden, da sie dann zudem formal wirken.
Hensels Vorgehen kann grundsätzlich als konservativ charakterisiert werden: Er vertrat keine dezidierte metamathematische Position, war aber gegenüber den neuen Möglichkeiten (z.B. der Mengenlehre oder der Axiomatik) desinteressiert und zunächst eher skeptisch. Damit ist er in Sinne Mehrtens' weder modern noch gegenmodern.
Es stellt sich daher die Frage, ob die im Abschnitt 7.3.2 gegebenen Beschreibungen von Hensels Forschungshandeln tatsächlich einen Zusammenhang zur Modernität der $p$-adischen Zahlen haben.[138] Um dies zu entscheiden, müßten zunächst vergleichbare Untersuchungen für andere Episoden mathematischen Handelns z.B. zwischen 1880 und 1920 angestellt werden.
Auffällig im Vergleich zur von Moritz Epple dargestellten Entstehung der Knotentheorie ist vor allem,[139] daß keine "Übergabe" des Problems stattfand: Einerseits eignete sich niemand Hensels epistemische Konfigurationen für eine eigene Bearbeitung an, andererseits gab Hensel seine Grundfragestellungen auch nicht auf, um sich anderen Fragen zuzuwenden.

Die vorliegende Untersuchung liefert eine ungewöhnliche Facette der Geschichte der mathematischen *Moderne*, die den umfassenden Blick auf die Entstehung *moderner* mathematischer Konzepte zugleich weiten und schärfen kann.

[137] Vgl. das Zitat aus [52, 1905, 558] am Ende von 5.6.2.
[138] Alternativ könnten sie typisch für die Art von Untersuchungsgegenstand oder überhaupt für das mathematische Forschungshandeln zwischen 1880 und 1920 sein.
[139] Vgl. [Epple, 1999].

# Anhang

## A Unveröffentlichte Materialien

Mathematisches Tagebuch Kurt Hensels, in Familienbesitz, nach freundlicher Mitteilung von Harold M. Edwards, zitiert: TB.

Seminarausarbeitung Kurt Hensels zum 23.5. 1883, Archiv der Humboldt-Universität zu Berlin, Bestand NL/ Kurt Hensel, Mathematisches Seminar, zitiert: V1.

Auszug aus drei Seminarvorträgen Kurt Hensels (23.5., 6.6., 1.8.1883), Archiv der Humboldt-Universität zu Berlin, Bestand Hensel, Auszug aus 3 Seminarvorträgen, zitiert: V2.

Habilitationsgesuch Kurt Hensels, undatiert (Gutachten dazu erbeten am 4.3.1886), Archiv der Humboldt-Universität zu Berlin, Phil. Fak. 1213, Blatt 145-150.

Gutachten Kroneckers zu Hensels Habilitationsgesuch vom 16.7.1886, Archiv der Humboldt-Universität zu Berlin, Phil. Fak. 1213, Blatt 150 (+RS) - 151, zitiert: GAK.

Personalakte Kurt Hensels in Berlin, Archiv der Humboldt-Universität zu Berlin, Phil. Fak. 1213, zitiert: Akte H.

Personalakte Kurt Hensels in Marburg, Hessisches Staatsarchiv Marburg, Signatur 305a, acc. 1976/19 No 3494, zitiert: [Personalakte Hensel, Blatt].

Bei Kurt Hensel abgeschlossene Promotionen (1903 - 1932), Hessisches Staatsarchiv Marburg, Universitätsakten der Universität Marburg, Philosophische Fakultät, Signatur 307d.

Biographische Mitteilungen Hensels an die Leopoldina Halle 1908, Matrikel-Mappe 3256

Vorlesungsmitschrift *Algebraische Zahlen*, Sommersemester 1902, Imperial College, London, vormals Mathematics Library.

Brief Hensels an Weber vom 23.11.1897, Handschriftenabteilung Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, 8° Cod. Ms. philos. 205.

Briefe Hensels an Hurwitz, Handschriftenabteilung Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, 8° Cod. Ms. Math. Arch. 76, 8 Briefe.

Briefe Hensels an Hilbert, Handschriftenabteilung Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Cod. Ms. D. Hilbert 146, 15 Briefe.

Briefe Hensels an Helmut Hasse, Handschriftenabteilung Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Cod. Ms. H. Hasse 33:1, 33:2, 1:672, 1:672 Beilagen.

Schriftwechsel am 13.6. und 16.6.1939 zwischen Helmut Hasse und Kurt Hensel bzgl. Austritt Hensels aus der DMV, Handschriftenabteilung Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Cod. Ms. H. Hasse 26:2, Bl. 53 und 54.

Briefe Hensels an seine Schwester Cécile Leo, Originale im Familienbesitz, zitiert nach: Abschlußbericht des DFG-Projekts *Kurt Hensel (1861 - 1941) und die Genese des Begriffs der p-adischen Zahlen. Eine biographisch-ideengeschichtliche Untersuchung.* Projekt-Nr.: Ja 608/2-1.

Reisetagebuch David Hilberts von der Reise vom 9. März bis 7. April 1888, Handschriftenabteilung Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Cod. Ms. D. Hilbert 741, zitiert [Hilbert, RTB 1888].

Brief Dedekinds an Hilbert vom 30.6.1892, Handschriftenabteilung Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Cod. Ms. D. Hilbert 66.

Briefwechsel zwischen Klein und Fricke 1891, Nachlass Fricke, Universitätsarchiv Braunschweig.

Briefe Frobenius' an Dedekind vom 24.1.1895 und 22.3.1896, nach freundlicher Mitteilung von Ralf Haubrich.

Rektoratsbericht vom 14.12.1894 zur Nachfolge Dedekinds in Braunschweig, Universitätsarchiv Braunschweig.

Habdank-Eichelsbacher, Britta: Tonbandabschrift eines Interviews mit Nachkommen Hensels auf einem Familientreffen am 6.9.1998 in Schlierbach im Odenwald, in: Abschlußbericht des DFG-Projekts *Kurt Hensel (1861 - 1941) und die Genese des Begriffs der p-adischen Zahlen. Eine biographisch-ideengeschichtliche Untersuchung.* Projekt-Nr.: Ja 608/2-1.

Weierstraß, Karl: Vorlesungszyklus Analysis, Mitschriften von Kurt Hensel u.a. zum WS 1882/83, Bibliothek des IRMA, Straßburg.

Kronecker, Leopold: Mitschriften zu diversen Vorlesungen, Bibiliothek des IRMA, Straßburg. Zum Teil online zugängig unter http://mathdoc.emath.fr/LiNuM/, angesehen am 27.11.2010.

# B Veröffentlichte Arbeiten und Schriftstücke

Dieser Abschnitt unterteilt sich in Arbeiten Hensels und Arbeiten anderer Autoren. Die historisch betrachteten Arbeiten der letzteren werden im Abschnitt C noch einmal chronologisch sortiert aufgeführt.

## Veröffentlichungen Hensels 1884 - 1909

Die folgende Liste enthält alle mathematischen Veröffentlichungen (ohne Herausgebertätigkeiten) Kurt Hensels zwischen 1884 und 1909. Die Liste wird von einer späteren Veröffentlichung vervollständigt. Die Einträge werden in der Form [Nr., Jahr, Seite] zitiert.


1. *Arithmetische Untersuchungen über Discriminanten und ihre ausserwesentlichen Teiler,* Dissertation Berlin, 1884.

2. Untersuchung der ganzen algebraischen Zahlen eines gegebenen Gattungsbereiches für einen beliebigen algebraischen Primdivisor, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 101, S. 99-141, 1887.

3. Theorie der unendlich dünnen Strahlenbündel, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 102, S. 278-303, 1888.

4. Über die Darstellung der Zahlen eines Gattungsbereiches für einen beliebigen Primdivisor, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 103, S. 230-237, 1888.

5. Über Gattungen, welche durch Composition aus zwei anderen Gattungen entstehen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 105, S. 329-344, 1889.

6. Anwendung der Theorie der Modulsysteme auf ein Problem der Optik, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 108, S. 140-143, 1891.

7. Zur Theorie der linearen Formen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 107, S. 241-245, 1891.

8. Über die Darstellung der Determinante eines Systems, welches aus zwei andern componirt ist, *Acta Mathematica* 15, S. 317-319, 1891.

9. Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der algebraischen Integrale. I., *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 109, S. 1-42, 1891.

10. Über die Gleichungen, mit deren Hülfe man die säcularen Störungen der Planeten bestimmt, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 110, S. 180-183, 1892.

11. Über den Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Function einer Variabeln, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 1, S. 56-59, 1892.

12. Über die Darstellung der ganzen algebraischen Functionen einer Variablen durch ein Fundamentalsystem, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 111, S. 139-155, 1893.

13. Untersuchung der Fundamentalgleichung einer Gattung für eine reelle Primzahl als Modul und Bestimmung der Teiler ihrer Discriminante, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 113, S. 61-83, 1894.

14. Arithmetische Untersuchungen über die gemeinsamen ausserwesentlichen Discriminantenteiler einer Gattung, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 113, S. 128-160, 1894.

15. Über die Klassification der nicht homogenen quadratischen Formen und der Oberflächen zweiter Ordnung, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 113, S. 303-317, 1894.

16. Über reguläre Determinanten und die aus ihnen abgeleiteten Systeme, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 114, S. 25-30, 1894.

17. Über die Elementarteiler componirter Systeme, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 114, S. 109-115, 1894.

18. Théorie des fonctions algébriques d'une variable. (Premier mémoire.) Traduit par M. G. Brincard, *Acta Mathematica* 18, S. 247-317, 1894.

19. Bemerkung zu der Abhandlung "On the theory of Riemann's integrals" by H. F. Baker, Bd. 45 der Mathematischen Annalen, *Mathematische Annalen* 45, S. 598-599, 1894.

20. Über einen neuen Fundamentalsatz in der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 115, S. 254-294, 1895.

21. Über die Ordnungen der Verzweigungspunkte einer Riemann'schen Fläche, *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* , S. 933-943, 1895.

22. Über die Verzweigung der drei- und vierblätterigen Riemann'schen Flächen, *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* , S. 1103-1114, 1895.

23. Über den grössten gemeinsamen Teiler aller Zahlen, welche durch eine ganze Function von $n$ Veränderlichen darstellbar sind, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 116, S. 350-356, 1896.

24. Über die Darstellbarkeit der Integrale erster Gattung durch ein Fundamentalsystem, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 117, S. 29-41, 1896.

25. Über die Reduction algebraischer Systeme auf die kanonische Form, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 117, S. 129-139, 1896.

26. Über die Fundamentalteiler algebraischer Gattungsbereiche, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 117, S. 333-345, 1897.

27. Über die Elementarteiler zweier Gattungen, von denen die eine unter der anderen enthalten ist, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 117, S. 346-355, 1897.

28. Über die Fundamentalteiler eines Gattungsbereiches in Bezug auf zwei verschiedene Rationalitätsbereiche, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 118, S. 173-185, 1897.

29. Über die Bestimmung der Discriminante eines algebraischen Körpers, *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, S. 247-253, 1897.

30. Über die Fundamentalgleichung und die ausserwesentlichen Discriminantenteiler eines algebraischen Körpers, *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, S. 254-260, 1897.

31. Über die Zurückführung der Divisorensysteme auf eine reducirte Form, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 118, S. 234-250, 1897.

32. Über die Zurückführung der Divisorensysteme auf ihre reducirte Form. (2. Abhandlung.), *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 119, S. 114-130, 1898.

33. Über die elementaren arithmetischen Eigenschaften der reinen Modulsysteme zweiter Stufe, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 119, S. 175-185, 1898.

34. Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* $6_1$, S. 83-88, 1899.

35. Über diejenigen algebraischen Körper, welche aus zwei anderen componirt sind, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 120, S. 99-108, 1899.

36. Über die Theorie der algebraischen Functionen zweier Variabeln, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* $7_1$, S. 58-61, 1899.

37. Über eine neue Theorie der algebraischen Functionen zweier Variabeln, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* $8_1$, S. 221-231, 1900.

38. Über eine neue Theorie der algebraischen Functionen zweier Variabeln, *Acta Mathematica* 23, S. 339-416, 1900.

39. Zur Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen und der *Abel*schen Integrale, *Mathematische Annalen* 54, S. 437-497, 1901.

40. Über einige Verallgemeinerungen des *Fermat*schen und des *Wilson*schen Satzes, *Archiv der Mathematik und Physik* (3) 1, S. 319-322, 1901.

41. Über die Entwickelung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen, *Mathematische Annalen* 55, S. 301-336, 1902.

42. mit Georg Landsberg: *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale,* Teubner, Leipzig, 1902, zitiert [Hensel/Landsberg, 1902].

43. Über analytische Funktionen und algebraische Zahlen, *Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft* 1, S. 29-32, 1902.

44. Über die arithmetischen Eigenschaften der Faktoriellen, *Archiv der Mathematik und Physik* (3) 2, S. 293-294, 1902.

45. Bemerkungen zur Determinantentheorie, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 126, S. 73-82, 1903.

46. Zur Theorie der Systeme, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 126, S. 165-170, 1903.

47. Neue Grundlagen der Arithmetik, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 127, S. 51-84, 1904.

48. Theorie der Körper von Matrizen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 127, S. 116-166, 1904.

49. Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 128, S. 1-32, 1905.

50. Über die zu einem algebraischen Körper gehörigen Invarianten, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 129, S. 68-85, 1905.

51. mit Dimitry Mirimanoff: Sur la relation $\left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^{n-h}$ et la loi de réciprocité, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 129, S. 86-87, 1905.

52. Über die arithmetischen Eigenschaften der algebraischen und transzendenten Zahlen, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 14, S. 545-558, 1905.

53. Über die arithmetischen Eigenschaften der Zahlen, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 16, S. 299-319, 388-393, 473-496, 1907.

54. *Theorie der algebraischen Zahlen. I. Bd.*, Teubner, Leipzig, 1908.

55. Über die zu einer algebraischen Gleichung gehörigen Auflösungskörper, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 136, S. 183-209, 1909.

später:

56. *Zahlentheorie,* Göschen, Berlin & Leipzig, 1913, zitiert [Hensel, 1913].

## Veröffentlichungen anderer Autoren

Die angegebene Literatur wird in der Form [Autor, Jahr, Seite] zitiert. Dabei bezieht sich "Jahr" auf das Jahr der Veröffentlichung, "Seite" aber auf das Dokument, nach dem zitiert wird, also oft auf leichter zugängliche Werkausgaben.

Bachmann, Paul: *Die Theorie der complexen Zahlen welche aus zwei Quadratwurzeln zusammengesetzt sind*, Weber, Berlin, 1867. Ergebnisse mitgeteilt in: Zur Theorie der complexen Zahlen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 67, S. 200-204, 1867.

——:*Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehung zur Zahlentheorie; Academische Vorlesungen*, Teubner, Leipzig, 1872.

Baker, Henry Frederick: On the theory of Riemann's integrals, *Mathematische Annalen* 75, S. 118-132, 1894.

Bergmann, Birgit; Epple, Moritz (Hg.): *Jüdische Mathematiker in der deutschsprachigen akademischen Kultur* (Ausstellungskatalog), Springer, Berlin, 2009.

Biermann, Kurt-Reinhard: *Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität : 1810 - 1933; Stationen auf dem Wege eines mathematischen Zentrums von Weltgeltung*, erw. Ausg., Akademie-Verlag, Berlin, 1988.

Blumenthal, Otto: Lebensgeschichte [Hilberts], in: Hilbert, David: *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 3, S. 388 - 429, Springer, Berlin, 1935.

Bölling, Reinhard (Hg.): *Briefwechsel zwischen Karl Weierstraß und Sofia Kowalewskaja*, Akademie-Verlag, Berlin, 1993.

Bourbaki, Nicolas: *Elemente der Mathematikgeschichte*, übersetzt von Oberschelp, Anke, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1971.

Brechenmacher, Frédéric: La controverse de 1874 entre Camille Jordan et Leopold Kronecker, *Revue d'Histoire des Mathématiques* 13, S. 187-257, Jahrgang 2007, erschienen 2008, zitiert [Brechenmacher, 2008].

Brill, Alexander; Noether, Max: Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 3, S. 107-566, 1894.

Brocke, Bernhard vom: *Hochschul- und Wissenschaftspolitik in Preußen und im Deutschen Kaiserreich 1882-1907: das "System Althoff"*, Klett-Cotta, Stuttgart, 1980.

Cantor, Georg: *Briefe*, Hg. Meschkowski, Herbert; Nilson, Springer, Berlin, 1991.

Chebotaryov, Nikolai G.: Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören, *Mathematische Annalen*, 95, S. 191 - 228, 1925. (Dort "Tschebotareff" umschrieben.)

Corry, Leo: *Modern algebra and the rise of mathematical structures*, Birkhäuser, Basel, 1996.

Dedekind, Richard: Über die Einführung neuer Funktionen in die Mathematik; Habilitationsvortrag vom 30.6.1854, aus dem Nachlaß veröffentlicht in: *Gesammelte mathematische Werke*, Bd.3, S. 428-438, zitiert [Dedekind, 1854/1932].

——: Abriß einer Theorie der höheren Kongruenzen in bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 54, S. 1-26, 1857. Zitiert nach: *Gesammelte mathematische Werke*, Bd.1, S. 40-66.

——: Theorie der Ideale im zweiten Teil des zehnten Supplements "Ueber die Composition der binären quadratischen Formen", §§159-170, S. 423-497. In: Lejeune-Dirichlet, Peter Gustav: *Vorlesungen über Zahlentheorie*, herausgegeben und mit Zusätzen versehen von Richard Dedekind, 2.vermehrte Auflage, Vieweg, Braunschweig, 1871.

——: Zur Theorie der Ideale, *Göttingische gelehrte Anzeigen*, 20.9.1871, S. 1489, zitiert [Dedekind, 1871a].

——: [Besprechung von] Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehung zur Zahlentheorie, Akademische Vorlesungen von Dr. Paul Bachmann, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 18, Literaturzeitung S. 14-24, 43. Zitiert nach: *Gesammelte mathematische Werke*, Bd. 3, S. 408-419. (Zwei der Ergänzungen auf S. 43 fehlen im WA.)

——: Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Kongruenzen, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 23, S. 1-23, 1878. Zitiert nach: *Gesammelte mathematische Werke*, Bd.1, S. 202-230.

——: Über die Diskriminanten endlicher Körper, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 29, S. 1- 56, 1882. Zitiert nach: *Gesammelte mathematische Werke*, Bd.1, S. 351-396.

——: *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Vieweg, Braunschweig, 1888.

——: Zur Theorie der Ideale, *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, S. 272-277, 1894.

——: Ueber die Begründung der Idealtheorie, *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, S. 106-113, 1895. WA: *Gesammelte mathematische Werke*, Bd.2, S. 50-58.

——: *Gesammelte mathematische Werke*, Vieweg, Braunschweig, 1. Band: 1930, 2. Band: 1931, 3. Band: 1932.

Dedekind, Richard; Weber, Heinrich: Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 92, S. 181-290, 1882. Zitiert [Dedekind/Weber, 1882] nach: Dedekind, Richard: *Gesammelte mathematische Werke*, Bd. 1, S. 238-349.

Dingler, Hugo: *Das Prinzip der logischen Unabhängigkeit in der Mathematik : zugleich als Einführung in die Axiomatik*, Ackermann, München, 1915.

DMV: Bericht über die Jahresversammlung zu Braunschweig - am 20. bis 25. September 1897, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 6, S. 3-8, 1899.

Drüll, Dagmar: *Heidelberger Gelehrtenlexikon*, Teil: 1803 - 1932, Springer, Berlin, 1986.

Edwards, Harold M.: On the Kronecker Nachlass, *Historia Mathematica* 5, S. 419-426, 1978.

——: The Genesis of Ideal Theory, *Archive for the History of Exact Sciences* 23, S. 321-378, 1980.

Edwards, Harold M.; Neumann, Olaf; Purkert, Walter: Dedekinds "Bunte Bemerkungen" zu Kroneckers "Grundzüge", *Archive for the History of Exact Sciences* 27, S. 49-85, 1982.

Epple, Moritz: *Die Entstehung der Knotentheorie - Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie*, Vieweg, Braunschweig Wiesbaden, 1999.

Fraenkel, Abraham A. : Axiomatische Begründung von *Hensels* $p$-adischen Zahlen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 141, 43-76, 1912.

——: *Lebenskreise : Aus den Erinnerungen eines jüdischen Mathematikers*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1967.

Fraenkel, Abraham A.; Hensel, Kurt: Das Mathematische Institut der Universität 1866-1927, in: Hermelink, Heinrich; Kaehler, Siegfried A. (Hg.), *Die Philipps-Universität zu Marburg 1527-1927; 5 Kapitel aus ihrer Geschichte (1527-1866) & Die Universität Marburg seit 1866 in Einzeldarstellungen*, S. 753-756, Elwert, Marburg, 1927.

Frei, Günther (Hg.): *Der Briefwechsel David Hilbert - Felix Klein : (1886 - 1918)*, mit Anmerkungen herausgegeben von Günter Frei, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1985.

——: How Hasse was led to the theory of quadratic forms, the local-global principle, the theory of the norm residue symbol, the reciprocity laws, and to class field theory. In: Miyake, Katsuya (Hg.) *Class field theory - its centenary and prospect*, Proceedings of the 7th MSJ International Research Institute of the Mathematical Society of Japan, Tokyo, June 3-12, 1998, S. 31-62, Mathematical Society of Japan: Advanced Studies in Pure Mathematics, Bd. 30, Tokyo, 2001.

——: The Unpublished Section Eight: On the Way to Function Fields over a Finite Field, in: Goldstein, Catherine; Schappacher, Norbert; Schwermer, Joachim: *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, S. 159-198, Springer, Berlin Heidelberg, 2007.

Frei, Günther; Stammbach, Urs: *Die Mathematiker an den Zürcher Hochschulen*, Birkhäuser, Basel, 1994.

Frobenius, Georg: Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 88, S. 96-117, 1879.

——: Ueber die Elementarteiler der Determinanten, *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* , S. 31-44, 1894.

——: Über Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe, *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* , S. 689 - 703, 1896.

Fueter, Rudolf: Die Theorie der Zahlstrahlen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 130, S. 197-237, 1905.

Galois, Évariste: Sur la théorie des nombres, *Bulletin des Sciences mathématiques de M. Férussac* 13, S. 428-435, 1830.

Gauß, Carl Friedrich: *Disquisitiones Arithmeticae*, Fleischer, Leipzig, 1801.

——: Disquisitiones generales de congruentiis, aus dem Nachlaß veröffentlicht in: *Werke*, Bd. 2: Höhere Arithmetik, S. 212-240, Universitätsdruckerei, Göttingen, 1863.

——: *Mathematisches Tagebuch 1796-1814*; übersetzt von Schuhmann, Elisabeth, mit Anmerkungen von Wußing, Hans, eingeleitet von Biermann, Kurt-R., Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1976, zitiert [Gauß, 1976].

Goldstein, Catherine; Schappacher, Norbert: A Book in Search of a Discipline (1801-1860),in: Goldstein, Catherine; Schappacher, Norbert; Schwermer, Joachim: *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, S. 2-65, Springer, Berlin Heidelberg, 2007.

——: Several Disciplines and a Book (1860-1901), in: Goldstein, Catherine; Schappacher, Norbert; Schwermer, Joachim: *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, S. 66-103, Springer, Berlin Heidelberg, 2007, zitiert [Goldstein/Schappacher, 2007a].

Gray, Jeremy J.: The 19th-century revolution in mathematical ontology, in: Gillies, Donald (Hg.): *Revolutions in Mathematics*, S. 226-248, Clarendon Press, Oxford, 1992.

——: *Plato's ghost : the modernist transformation of mathematics*, Princeton University Press, Princeton, 2008.

Hasse, Helmut: Kurt Hensel zum Gedächtnis, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 187, S. 1-13, 1950.

——: Kurt Hensels entscheidender Anstoß zur Entdeckung des Lokal-Global-Prinzips, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 209, S. 3-4, 1962.

Haubrich, Ralf: *Zur Entstehung der algebraischen Zahlentheorie Richard Dedekinds*, Dissertation, Göttingen, 1992.

Hawkins, Thomas W.: Weierstrass and the Theory of Matrices, *Archive for the History of Exact Sciences* 17, S. 119-161, 1977.

Haymann, Walter Kurt: Kurt Hensel - der Mensch; 29. Dezember 1861 - 1. Juni 1941, in: Begehr, Heinrich (Hg.): *Mathematik in Berlin : Geschichte und Dokumentation*, Bd. 2, S. 105-110, Shaker, Aachen, 1998.

Hensel, Sebastian(Hg.): *Die Familie Mendelssohn : 1729 - 1847 ; nach Briefen und Tagebüchern*, Behr, Berlin, 1879.

——: *Ein Lebensbild aus Deutschlands Lehrjahren*, Behr, Berlin, 1903.

Hensel, Paul: *Sein Leben in seinen Briefen*, hg. von Elisabeth Hensel, Societäts-Verlag, Frankfurt a.M., 1937.

Hilbert, David: Über die Zerlegung der Ideale eines Zahlkörpers in Primideale, *Mathematische Annalen* 44, S. 1-8, 1894. WA: *Gesammelte Abhandlungen*, Bd.1, S. 6-12.

——: Grundzüge einer Theorie des Galois'schen Zahlkörpers, *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, S. 224-236, 1894. Zitiert nach: *Gesammelte Abhandlungen*, Bd.1, S. 13 - 23 als [Hilbert, 1894a].

——: Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 4, S. I-XVIII u. 175-546, 1897. Zitiert nach: *Gesammelte Abhandlungen*, Bd.1, S. 63 - 363.

——: *Grundlagen der Geometrie*, Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen, Teubner, Leipzig, 1899. Zitiert nach: 11. Auflage, Teubner, Stuttgart, 1972.

——: Mathematische Probleme; Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Congress zu Paris 1900, *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, S. 253-297, 1900. Zitiert nach: *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 3, S. 253-297.

——: *Gesammelte Abhandlungen*, Springer, Berlin, Bd. 1: 1932, Bd. 3: 1935.

Hurwitz, Adolf: Ueber die Theorie der Ideale. *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, S. 291-298, 1894. WA: *Mathematische Werke*, Bd.2, S. 191-197.

——: Ueber einen Fundamentalsatz der arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische*

*Klasse*, S. 230-240, 1895. Zitiert nach:*Mathematische Werke*, Bd.2, S. 198-207.

——: *Mathematische Werke*, Zweiter Band: Zahlentheorie, Algebra und Geometrie, Birkhäuser, Basel, 1933.

Klein, Felix: Über Arithmetisierung der Mathematik, *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, S. 82-91, 1895. Zitiert nach: *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Bd. 2, S. 232-240, Springer, Berlin, 1922.

Klein, Felix; Fricke, Robert: *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, ausgearbeitet und vervollständigt von R. Fricke, Bd. 2: Fortbildung und Anwendung der Theorie, Teubner, Leipzig, 1892.

Kneser, Adolf: Leopold Kronecker; Rede, gehalten bei der Hundertjahrfeier seines Geburtstages in der Berliner Mathematischen Gesellschaft am 19. Dezember 1923, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 33, S. 210-228, 1925.

Kronecker, Leopold: Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 91, S. 301-334, 1881. Zitiert nach: *Werke*, Bd. 2, S. 193-236.

——: *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*, Reimer, Berlin, 1882. WA: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 92, S. 1-123, 1882. Zitiert nach: *Werke*, Bd. 2, S. 237 - 387.

——: Über den Begriff der Zahl in der Mathematik, 1891, herausgegeben von Boniface, Jacqueline; Schappacher, Norbert, in: Sur le concept de nombre en mathématique - cours inédit de Leopold Kronecker, *Revue d'histoire des mathématiques* 7, S. 207-275, 2001, zitiert [Kronecker, 1891].

——: Zur Theorie der allgemeinen complexen Zahlen und der Modulsysteme, *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* , S. 429-438, 447-465, 557-578, 595-612, 983-1016, 1888. Zitiert nach: *Werke*, Bd. 3(2), S. 1-114.

——: *Vorlesungen über Zahlentheorie*, bearbeitet von Hensel, Kurt, Teubner, Leipzig, 1901.

——: *Werke*, Hg. Kurt Hensel, 5 Bände, Teubner, Leipzig, Bd. 1: 1895, Bd. 2: 1897, Bd. 3(1): 1899, Bd. 4: 1929, Bd. 5: 1930, Bd. 3(2): 1931. WA: Chelsea, New York, 1968.

Kühne, Hermann: Angenäherte Auflösung von Kongruenzen nach Primmodulsystemen in Zusammenhang mit den Einheiten gewisser Körper, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 126, S. 102-115, 1903.

Kürschák, József: Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 142, S. 211-253, 1913.

Kummer, Ernst Eduard: Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in ihre Primfactoren, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 35, S. 327 - 367, 1847. WA: *Collected Papers*, Bd. 1, S. 211-251.

——: Über die allgemeinen Reciprocitätsgesetze unter den Resten und Nichtresten der Potenzen, deren Grad eine Primzahl ist, *Mathematische Abhandlungen der Königlichen Akademie zu Berlin*, S. 19 - 159, 1859. Zitiert nach: *Collected Papers*, Bd. 1, S. 699-839.

——: *Collected Papers*, Volume I: Contributions to Number Theory, Springer, Berlin Heidelberg, 1975.

Lackmann, Thomas: *Das Glück der Mendelssohns - Geschichte einer deutschen Familie*, Aufbau, Berlin, 2005.

Landsberg, Georg: *Untersuchungen über die Theorie der Ideale*, Dissertation, Breslau, 1890.

——: Zur Grundlegung der arithmetischen Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen, *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, S. 407-418, 1895.

——: Ueber das Analogon des Riemann-Roch'schen Satzes in der Theorie der algebraischen Zahlen, *Mathematische Annalen* 50, S. 577-582, 1898.

Lemmermeyer, Franz; Schappacher, Norbert: Introduction to the first English edition of Hilbert's Zahlbericht. In: Hilbert, David: *The Theory of Algebraic Number Fields*, S. XXIII-XXXVI, Springer, Berlin Heidelberg, 1998.

Lenstra, Hendrik Willem jun; Stevenhagen, Peter: Chebotarëv and his density theorem, Mathematcial Intelligencer, 18 (2), S. 26-37, 1996.

Lepsius, Sabine: *Ein Berliner Künstlerleben um die Jahrhundertwende : Erinnerungen*, G. Müller, München, 1972.

Lucius, Friedemann: *Ringe mit einer Theorie des größten gemeinsamen Teilers*, Dissertation, Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Göttingen, Göttingen, 1997.

Mehrtens, Herbert: *Moderne - Sprache - Mathematik : eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme*, Suhrkamp, Frankfurt am Main, 1990.

Minkowski, Hermann: Peter Gustav Lejeune-Dirichlet und seine Bedeutung für die heutige Mathematik, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 14, S. 149-163, 1905. Zitiert nach: *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 2, S. 447-461, Teubner, Leipzig, 1911.

——: *Briefe an David Hilbert*, Mit Beiträgen u. hrsg. von Lily Rüdenberg u. Hans Zassenhaus, Springer, Berlin Heidelberg, 1973.

Neukirch, Jürgen: *Algebraische Zahlentheorie*, Springer, Berlin, 1992.

Neumann, Olaf: Was sollen und was sind Divisoren, *Mathematische Semesterberichte* 48, Nr.2, S. 139-192, 2001.

Noether, Max: Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen, *Mathematische Annalen* 23, S. 311-358, 1884.

Ore, Öystein: Erläuterungen zur vorstehenden Abhandlung [Dedekind, 1882], in: Dedekind, Richard: *Gesammelte mathematische Werke*, Vieweg, Braunschweig, 1. Band, S. 396-397, 1930.

Perron, Oskar: Was sind und was sollen die irrationalen Zahlen?, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 16, S. 142-155, 1907.

——: Nekrolog auf Kurt Hensel. In: *Jahrbuch der Bayerischen Akademie der Wissenschaften* 1944/48, S. 234-236, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München, 1948.

Petri, Birgit; Schappacher, Norbert: On Arithmetization, in: Goldstein, Catherine; Schappacher, Norbert; Schwermer, Joachim: *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, S. 343-374, Springer, Berlin Heidelberg, 2007.

Purkert, Walter: *Die Entwicklung des abstrakten Körperbegriffs*, Dissertation, Hochschulschrift Universität Leipzig, 1972.

Reichardt, Hans: Erinnerungen an Kurt Hensel (1861 - 1941), in: Pieper, Herbert: *Zahlen aus Primzahlen*, 2. erw. Auflage, mit Anh. von H. Hasse u. H. Reichardt, S. 197 - 201, Birkhäuser, Basel, 1984.

Rheinberger, Hans-Jörg: *Experiment · Differenz · Schrift: Zur Geschichte epistemischer Dinge*, Basilisken-Presse, Marburg, 1992.

Schappacher, Norbert: David Hilbert, report on algebraic number fields ("Zahlbericht"). In: Grattan-Guinness, Ivor (Hg.): *Landmark Writings in Western Mathematics*, S. 700-709, Elsevier, Amsterdam Boston, 2005.

Schönemann, Theodor: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der höheren Congruenzen, deren Modul eine reelle Primzahl ist, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 31, S. 269-325, 1845.

Selling, Eduard: Ueber die idealen Primfactoren der complexen Zahlen, welche aus den Wurzeln einer beliebigen irreductiblen Gleichung rational gebildet werden, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 10, S. 17-47, 1865.

Serret, Joseph-Alfred: *Cours d'algèbre supérieure*, 3. Auflage, Gauthier-Villars, Paris, 1866.

——: *Handbuch der höheren Algebra*, deutsche Bearbeitung von Gustav Wertheim, Band 1, Teubner, Leipzig, 1868.

Sponsel, Rudolf: *Verfolgte MathematikerInnen*, IP-GIPT, Erlangen, www.sgipt.org/politpsy/3reich /wis/mathe/verfolgt.htm, online seit 2005, angesehen 6.10. 2010.

Steinitz, Ernst: Algebraische Theorie der Körper, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 137, S. 167-309, 1910.

Ullrich, Peter: On the origins of p-adic analysis. In: Behara, Minaketan; Fritsch, Rudolf; Lintz, Rubens G. (Hg.): *Gaussiana, Proceedings of the 2nd Gauss Symposium (München 1993)*, Conference A: Mathematics and Theoretical Physics, S. 459-473, Walter de Gruyter & Co., Berlin New York, 1995.

——: The genesis of Hensel's p-adic numbers. In: Butzer, Paul L. (Hg.): *Charlemagne and his Heritage: 1200 Years of Civilization Science in Europe (Aachen 1995)*, Vol. 2: Mathematical Arts, S. 163-178, Turnhout, Brepols, 1998.

——: Der Henselsche Beweisversuch für die Transzendenz von e. In: Toepell, Michael (Hg.): *Mathematik im Wandel - Anregungen zu einem fächerübergreifenden Mathematikunterricht*, (Nürnberg-Rummelsberg 1995), Bd.1, S. 320-329, Verlag Franzbecker, Hildesheim, 1998, zitiert [Ullrich, 1998a].

—— : Die Henselschen p-adischen Zahlen: Beispiel einer Erfindung in der Mathematik? in: Binder, Christa (Hg.): *Tagungsband des V. Österreichischen Symposions zur Geschichte der Mathematik (Neuhofen an der Ybbs 1999)*, S. 133-138, Österreichische Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte, Wien, 1999.

——: Die Entdeckung der Analogie zwischen Zahl- und Funktionenkörpern: der Ursprung der "Dedekind-Ringe," *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 101, S. 116-134, 1999, zitiert [Ullrich, 1999a].

Waerden, Bartel L.: *Moderne Algebra*, unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin u. E. Noether, Teil 1, Springer, Berlin, 1930.

Weber, Heinrich: Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie, *Mathematische Annalen* 43, S. 521-549, 1893.

——: *Lehrbuch der Algebra*, Zweiter Band, 2. Auflage, Vieweg, Braunschweig, 1899.

Weierstraß, Karl: *Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transzendenten*, bearbeitet von Hettner, Georg; Knoblauch, Johannes, Bd. 4 der *Mathematischen Werke*, Mayer & Müller, Berlin, 1902.

Weil, André: Introduction, in: Kummer, Ernst Eduard: *Collected Papers*, Bd.1, S. 1-14, Springer, Berlin Heidelberg, 1975.

Wittgenstein, Ludwig: *Philosophische Bemerkungen*, Bd. 2 der Werkausgabe, 7. Auflage, Suhrkamp, 2001.

# C Chronologie der betrachteten mathematischen Arbeiten (bis 1930)[140]

Gauß, Carl Friedrich: *Disquisitiones Arithmeticae*, Fleischer, Leipzig, 1801.

——: *Mathematisches Tagebuch 1796-1814*; übersetzt von Schuhmann, Elisabeth, mit Anmerkungen von Wußing, Hans, eingeleitet von Biermann, Kurt-R., Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1976, zitiert [Gauß, 1976].

Galois, Évariste: Sur la théorie des nombres, *Bulletin des Sciences mathématiques de M. Férussac* 13, S. 428-435, 1830.

Schönemann, Theodor: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der höheren Congruenzen, deren Modul eine reelle Primzahl ist, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 31, S. 269-325, 1845.

[140] Die Arbeiten Hensels sind nicht eingefügt, da bei verschiedenen Lektüreinteressen verschieden viele seiner Arbeiten als in so einem Schema relevant erscheinen.

Kummer, Ernst Eduard: Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in ihre Primfactoren, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 35, S. 327 - 367, 1847. WA: *Collected Papers*, Bd. 1, S. 211-251.

1850

Dedekind, Richard: Über die Einführung neuer Funktionen in die Mathematik; Habilitationsvortrag vom 30.6.1854, aus dem Nachlaß veröffentlicht in: *Gesammelte mathematische Werke*, Bd.3, S. 428-438, zitiert [Dedekind, 1854/1932].

——: Abriß einer Theorie der höheren Kongruenzen in bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 54, S. 1-26, 1857. Zitiert nach: *Gesammelte mathematische Werke*, Bd.1, S. 40-66.

Kummer, Ernst Eduard: Über die allgemeinen Reciprocitätsgesetze unter den Resten und Nichtresten der Potenzen, deren Grad eine Primzahl ist, *Mathematische Abhandlungen der Königlichen Akademie zu Berlin*, S. 19 - 159, 1859. Zitiert nach: *Collected Papers*, Bd. 1, S. 699-839.

1860

Gauß, Carl Friedrich: Disquisitiones generales de congruentiis, aus dem Nachlaß veröffentlicht in: *Werke*, Bd. 2: Höhere Arithmetik, S. 212-240, Universitätsdruckerei, Göttingen, 1863.

Selling, Eduard: Ueber die idealen Primfactoren der complexen Zahlen, welche aus den Wurzeln einer beliebigen irreductiblen Gleichung rational gebildet werden, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 10, S. 17-47, 1865.

Serret, Joseph-Alfred: *Cours d'algèbre supérieure*, 3. Auflage, Gauthier-Villars, Paris, 1866.

Bachmann, Paul: *Die Theorie der complexen Zahlen welche aus zwei Quadratwurzeln zusammengesetzt sind*, Weber, Berlin, 1867. Ergebnisse mitgeteilt in: Zur Theorie der complexen Zahlen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 67, S. 200-204, 1867.

Serret, Joseph-Alfred: *Handbuch der höheren Algebra*, deutsche Bearbeitung von Gustav Wertheim, Band 1, Teubner, Leipzig, 1868.

1870

Dedekind, Richard: Theorie der Ideale im zweiten Teil des zehnten Supplements "Ueber die Composition der binären quadratischen Formen", §§159-170, S. 423-497. In: Lejeune-Dirichlet, Peter Gustav: *Vorlesungen über Zahlentheorie*, herausgegeben und mit Zusätzen versehen von Richard Dedekind, 2.vermehrte Auflage, Vieweg, Braunschweig, 1871.

——: Zur Theorie der Ideale, *Göttingische gelehrte Anzeigen*, 20.9.1871, S. 1489, zitiert [Dedekind, 1871a].

Bachmann, Paul: *Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehung zur Zahlentheorie; Academische Vorlesungen*, Teubner, Leipzig, 1872.

Dedekind, Richard: [Besprechung von] Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehung zur Zahlentheorie, Akademische Vorlesungen von Dr. Paul Bachmann, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 18, Literaturzeitung S. 14-24, 43. Zitiert nach: *Gesammelte mathematische Werke*, Bd. 3, S. 408-419. (Zwei der Ergänzungen auf S. 43 fehlen im WA.)

——: Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Kongruenzen, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 23, S. 1-23, 1878. Zitiert nach: *Gesammelte mathematische Werke*, Bd.1, S. 202-230.

Frobenius, Georg: Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 88, S. 96-117, 1879.

——1880——

Kronecker, Leopold: Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 91, S. 301-334, 1881. Zitiert nach: *Werke*, Bd. 2, S. 193-236.

——: *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*, Reimer, Berlin, 1882. WA: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 92, S. 1-123, 1882. Zitiert nach: *Werke*, Bd. 2, S. 237 - 387.

Dedekind, Richard; Weber, Heinrich: Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 92, S. 181-290, 1882. Zitiert [Dedekind/Weber, 1882] nach: Dedekind, Richard: *Gesammelte mathematische Werke*, Bd. 1, S. 238-349.

Dedekind, Richard: Über die Diskriminanten endlicher Körper, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 29, S. 1- 56, 1882. Zitiert nach: *Gesammelte mathematische Werke*, Bd.1, S. 351-396.

Noether, Max: Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen, *Mathematische Annalen* 23, S. 311-358, 1884.

Dedekind, Richard: *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Vieweg, Braunschweig, 1888.

Kronecker, Leopold: Zur Theorie der allgemeinen complexen Zahlen und der Modulsysteme, *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* , S. 429-438, 447-465, 557-578, 595-612, 983-1016, 1888. Zitiert nach: *Werke*, Bd. 3(2), S. 1-114.

——1890——

Landsberg, Georg: *Untersuchungen über die Theorie der Ideale*, Dissertation, Breslau, 1890.

Kronecker, Leopold: Über den Begriff der Zahl in der Mathematik, 1891, herausgegeben von Boniface, Jacqueline; Schappacher, Norbert, in: Sur le concept de nombre en mathématique - cours inédit de Leopold Kronecker, *Revue d'histoire des mathématiques* 7, S. 207-275, 2001, zitiert [Kronecker, 1891].

Klein, Felix; Fricke, Robert: *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, ausgearbeitet und vervollständigt von R. Fricke, Bd. 2: Fortbildung und Anwendung der Theorie, Teubner, Leipzig, 1892.

Weber, Heinrich: Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie, *Mathematische Annalen* 43, S. 521-549, 1893.

Brill, Alexander; Noether, Max: Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 3, S. 107-566, 1894.

Baker, Henry Frederick: On the theory of Riemann's integrals, *Mathematische Annalen* 75, S. 118-132, 1894.

Dedekind, Richard: Zur Theorie der Ideale, *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, S. 272-277, 1894.

Frobenius, Georg: Ueber die Elementarteiler der Determinanten, *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* , S. 31-44, 1894.

Hilbert, David: Über die Zerlegung der Ideale eines Zahlkörpers in Primideale, *Mathematische Annalen* 44, S. 1-8, 1894. WA: *Gesammelte Abhandlungen*, Bd.1, S. 6-12.

——: Grundzüge einer Theorie des Galois'schen Zahlkörpers, *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, S. 224-236, 1894. Zitiert nach: *Gesammelte Abhandlungen*, Bd.1, S. 13 - 23 als [Hilbert, 1894a].

Hurwitz, Adolf: Ueber die Theorie der Ideale. *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, S. 291-298, 1894. WA: *Mathematische Werke*, Bd.2, S. 191-197.

Dedekind, Richard: Ueber die Begründung der Idealtheorie, *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, S. 106-113, 1895. WA: *Gesammelte mathematische Werke*, Bd.2, S. 50-58.

Hurwitz, Adolf: Ueber einen Fundamentalsatz der arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, S. 230-240, 1895. Zitiert nach:*Mathematische Werke*, Bd.2, S. 198-207.

Landsberg, Georg: Zur Grundlegung der arithmetischen Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen, *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, S. 407-418, 1895.

Klein, Felix: Über Arithmetisierung der Mathematik, *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, S. 82-91, 1895. Zitiert nach: *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Bd. 2, S. 232-240, Springer, Berlin, 1922.

Frobenius, Georg: Über Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe, *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* , S. 689 - 703, 1896.

Hilbert, David: Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 4, S. I-XVIII u. 175-546, 1897. Zitiert nach: *Gesammelte Abhandlungen*, Bd.1, S. 63 - 363.

Landsberg, Georg: Ueber das Analogon des Riemann-Roch'schen Satzes in der Theorie der algebraischen Zahlen, *Mathematische Annalen* 50, S. 577-582, 1898.

DMV: Bericht über die Jahresversammlung zu Braunschweig - am 20. bis 25. September 1897, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 6, S. 3-8, 1899.

Weber, Heinrich: *Lehrbuch der Algebra*, Zweiter Band, 2. Auflage, Vieweg, Braunschweig, 1899.

Hilbert, David: *Grundlagen der Geometrie*, Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen, Teubner, Leipzig, 1899. Zitiert nach: 11. Auflage, Teubner, Stuttgart, 1972.

1900

Hilbert, David: Mathematische Probleme; Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Congress zu Paris 1900, *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, S. 253-297, 1900. Zitiert nach: *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 3, S. 253-297.

Kronecker, Leopold: *Vorlesungen über Zahlentheorie*, bearbeitet von Hensel, Kurt, Teubner, Leipzig, 1901.

Weierstraß, Karl: *Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transzendenten*, bearbeitet von Hettner, Georg; Knoblauch, Johannes, Bd. 4 der *Mathematischen Werke*, Mayer & Müller, Berlin, 1902.

Kühne, Hermann: Angenäherte Auflösung von Kongruenzen nach Primmodulsystemen in Zusammenhang mit den Einheiten gewisser Körper, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 126, S. 102-115, 1903.

Minkowski, Hermann: Peter Gustav Lejeune-Dirichlet und seine Bedeutung für die heutige Mathematik, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 14, S. 149-163, 1905. Zitiert nach: *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 2, S. 447-461, Teubner, Leipzig, 1911.

Fueter, Rudolf: Die Theorie der Zahlstrahlen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 130, S. 197-237, 1905.

Perron, Oskar: Was sind und was sollen die irrationalen Zahlen?, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 16, S. 142-155, 1907.

1910

Steinitz, Ernst: Algebraische Theorie der Körper, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 137, S. 167-309, 1910.

Fraenkel, Abraham A. : Axiomatische Begründung von *Hensels* $p$-adischen Zahlen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 141, 43-76, 1912.

Kürschák, József: Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 142, S. 211-253, 1913.

Dingler, Hugo: *Das Prinzip der logischen Unabhängigkeit in der Mathematik : zugleich als Einführung in die Axiomatik*, Ackermann, München, 1915.

Chebotaryov, Nikolai G.: Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören, *Mathematische Annalen*, 95, S. 191 - 228, 1925. (Dort "Tschebotareff" umschrieben.)

Waerden, Bartel L.: *Moderne Algebra*, unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin u. E. Noether, Teil 1, Springer, Berlin, 1930.

# D Brief Kurt Hensels an Heinrich Weber vom 23.11.1897

Handschriftenabteilung der SUB Göttingen, 8° Cod.Ms. philos. 205

—Blatt 24/1—

Berlin W.
Kurfürstendamm 236
d. 23.11.1897

Hochgeehrter Herr Professor.

Aus Ihren freundlichen Zeilen habe ich mit Freude ersehen, dass Ihr Lehrbuch der Algebra schon jetzt eine zweite Auflage erlebt, und ich spreche Ihnen meinen besten Glückwunsch zu diesem Erfolge aus; es ist das einzige Lehrbuch dieser Disciplin, welches vollständig die modernen Anschauungen wiedergiebt, und diese Wissenschaft so schön giebt, wie sie wirklich ist; und je mehr ich mich in dieses Werk hineinvertieft habe, desto mehr Freude an der Darstellung und desto mehr Anregung zu eigenem Nachdenken habe ich darin gefunden.

Daher waren mir Ihre freundlichen Zeilen eine ganz besondere Freude, und ich wäre Ihrer freundlichen Aufforderung schon einige Tage früher nachgekommen, hätte ich nicht noch das Eintreffen der beiden kleinen Noten abwarten wollen, welche ich in Göttingen vorgelegt habe, und die ich zugleich mit diesem Briefe an Sie abgehen lasse. Ehe ich nämlich eingehender auf Ihre gütige Aufforderung Bezug nehme, möchte ich Sie bitten diese Abhandlungen einer kurzem Durchsicht zu unterwerfen. Sie beziehen sich auf eine neue Auffassung der Theorie der idealen Zahlen, zu welcher ich nach vierjähriger Arbeit gekommen bin, und deren Grundzüge ich in Braunschweig in etwa der Weise angegeben habe, wie sie sich im ersten Paragraphen der ersten jener beiden Noten dargelegt finden. Zu meiner grössten Freude hat sich Herr Dedekind damals in einem Nachwort zu jenem Vortrage dahin ausgesprochen, dass ihm diese Principien eine Vereinfachung für die Theorie der algebraischen Zahlen zu ergeben scheinen, und ebenso hat sich Herr Hermite geäussert, dem ich eine Darstellung jener Anschauungen schickte. Ich habe nun jene Principien in diesen beiden Noten auf einige Probleme der höheren Arithmetik angewendet, welche sich auch in Ihrer Algebra behandelt finden, und es scheint mir, dass dieselben bei dieser Auffassung wesentlich einfacher gelöst werden (das erste, die Bestimmung der Körperdiscriminante, wird vollständig erst durch diese Behandlung gelöst, während vorher nur für den allgemeinen Fall die schöne Lösung des Herren Dedekind vorhanden war). Ich habe mich aber schon seit längerer Zeit davon überzeugt, dass die ganze Auffassung der Entwickelbarkeit der algebraischen Zahlen modulo $p^M$ in Potenzreihen in der ganzen Theorie eine wesentliche Vereinfachung herbeiführt, weil hier die Theilbarkeit durch die idealen Primfactoren vollständig durch das Verschwinden der bezüglichen Entwickelungscoefficienten ersetzt wird. Dadurch wird aber die höhere Arithmetik vollständig das Abbild der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen, und schon durch die Analogie mit dieser so viel weiter ausgestatteten Theorie wird man auf eine Menge von Problemen geführt deren Erledigung ebenfalls durch die Analogie sehr vereinfacht wird. Ich weiss nun nicht, ob sie geneigt wären von dieser Auffassung in Ihrer Algebra Notiz zu nehmen. Sollte dies der Fall sein, so könnte ich Ihnen eine Herleitung jener Sätze von der Idealtheorie aus zur Verfügung stellen, bei welcher die Aufstellung der Sätze verhältnissmässig sehr einfach wird, und dann könnten die hier behandelten drei Probleme sich sehr einfach anschliessen. Ich habe aber auch eine andere Herleitung, welche die Idealtheorie garnicht voraussetzt, und jene Entwickelung durch einfache Erweiterung der Newton'schen Parallelogramme und der Bernoulli'schen Näherungsmethoden beweist: Dann bedarf man eben der Theorie der Ideale oder der Formen gar-

—Blatt 24/2—

nicht mehr und die ganze Theorie der algebraischen Zahlen wird wörtlich ebenso wie die Theorie des algebraischen Gebildes $f(y,x) = 0$.

Ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mir mit einem Worte schreiben wollten, ob Ihnen diese Auffassung der Theorie der algebraischen Zahlen Berechtigung zu haben scheint oder nicht; ich habe mich zu ihr erst nach langem und gründlichem Studium der Ideal- und Formentheorie entschlossen, insbesondere, als ich sah, dass gewisse Fragen sowohl bei den Zahlen, als auch bei den algebraischen Functionen von 2 und mehreren Variablen auch mit den Kroneckerschen Hilfsmitteln nicht gelöst werden konnten, oder doch auf für mich unüberwindliche Schwierigkeiten führten, während andererseits die Entwickelung nach Potenzen einer [Einfügung: od mehrerer] irreductiblen Functionen oder Zahlen in jedem derartigen Gebiete geht und sich wunderbar einfach gestaltet.

Was ich irgend thun kann, um Ihnen die Arbeit bei eventueller Berücksichtigung dieser Anschauungen zu erleichtern, würde ich selbstverständlich mit dem grössten Vergnügen thun. Aber auch, wenn Sie die Aufnahme derselben nicht für angezeigt halten, bitte ich Sie versichert zu sein, dass ich mit der grössten Freude Ihnen über meine anderen Arbeiten jede Auskunft geben werde, welche Ihnen erwünscht sein sollte.

Verzeihen Sie bitte diesen ausführlichen Brief und halten Sie ihn dem grossen Interesse zu Gute, das ich an Ihrem schönen Buche nehme. Wir haben in Deutschland leider nicht viele gute Lehrbücher, und die Ihrigen sind für uns ein ganz besonders werthvolles Besitzthum.

Es that mit sehr leid, dass eine schwere Erkrankung meines Schwiegervaters mich verhindert hat, Sie in Zürich zu sehen. Ich hoffe aber sehr, dass ich im Frühjahre des nächsten Jahres zum Besuche meines Bruders nach Strassburg kommen und dort einige Zeit bleiben werde. Bei diesem Plane spielt der grosse Wunsch, Sie sehen zu dürfen, eine grosse Rolle; hoffentlich sind Sie dann dort und gestatten mir diesen Wunsch zu verwirklichen.

Mit der Bitte mich Ihrer verehrten Frau Gemahlin angelegentlichst empfehlen zu wollen bin ich

Ihr aufrichtig ergebener

K.Hensel

# Wissenschaftlicher Werdegang

| | |
|---|---|
| 1994 | Abitur, Wilhelm-Ostwald- Gymnasium Leipzig |
| 1994 - 2002 | Studium der Mathematik mit Nebenfach Philosophie in Bonn und Göttingen |
| 2002 | Diplommathematikerin |
| 2002 - 2008 | wissenschaftliche Mitarbeiterin am Fachbereich Mathematik der TU Darmstadt, Forschungsaufenthalte in Zürich und Straßburg |
| 2009 - 2011 | winfoline-Studium "Information Systems" |
| 2011 | Master of Science in Information Systems |
| 2011 | Promotion in Geschichte der Mathematik |